

НАУКОВІ ВІСТІ КПІ

Міжнародний науково-технічний журнал

№ 1 (142)

2026

Започаткований у вересні 1997 року

Головний редактор
М.О. Безуглий, д-р. техн. наук, проф.

Заступник головного редактора
М.Ю. Ільченко, акад. НАН України

Відповідальний секретар –
випусковий редактор
П.П. Маслянко, канд. техн. наук, доц.

У номері:

Системний аналіз
та наука про дані

Автоматизація,
комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка

Комп'ютерна інженерія

Адреса редакції:
КПІ ім. Ігоря Сікорського
просп. Берестейський, 37,
Київ, 03056, Україна
Тел. (+38 044) 204-94-53
E-mail: n.visti@kpi.ua
<https://scinews.kpi.ua>

Засновник – Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Внесений до реєстру суб'єктів у сфері медіа з присвоєнням ідентифікатора медіа R30-02405
(рішення Національної ради з питань телебачення і радіомовлення № 1794 від 21.12.2023)

Згідно з наказами МОН України № 1643 від 28.12.2019, № 409 від 17.03.2020 та № 392 від 05.04.2023
журнал включено до категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України з технічних наук
за спеціальностями:

*F2 Інженерія програмного забезпечення, F3 Комп'ютерні науки, F7 Комп'ютерна інженерія,
F4 Системний аналіз та наука про дані, G5 Електроніка, електронні комунікації,
приладобудування та радіотехніка, G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка*

Відповідно до Наказу МОН України № 56 від 19.01.2026 «Про внесення змін до Порядку формування
Переліку наукових фахових видань України» з 01.06.2026 запланована публікація статей
за спеціальностями кластера «Інформаційні технології та електроніка»

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», протокол № 3 від 09.03.2026 р.

Члени редакційної колегії

М.О. Безуглий,	д-р техн. наук, проф., Україна
М.Ю. Ільченко,	д-р техн. наук, проф., Україна
І.А. Дичка,	д-р техн. наук, проф., Україна
Г.С. Тимчик,	д-р техн. наук, проф., Україна
І.І. Синявський,	д-р техн. наук, ст. дослідник, Україна
Antoine Manzanera,	д-р наук, проф., Франція
Jozef Korbicz,	д-р наук, проф., Польща
María T. Orvañanos-Guegtero,	д-р філософії, доцент, Мексика
Oleksandr Vasilevskyi,	д-р наук, проф., США
Pawel Komada,	д-р наук, проф., Польща
Sergii Babichev,	д-р техн. наук, проф., Чехія

Секретар редакції Т.Г. Кулікова

Редактори Н.В. Мурашова

Комп'ютерна верстка Л.М. Котовська

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р., просп. Берестейський, 37, Київ, 03056

Підп. до друку 09.03.2026. Формат 60×84¹/₈. Папір офс. Гарнітура UkrainianTimesET.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 8,91. Обл.-вид. арк. 7,37. Наклад 30 пр. Зам. № 26-022.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15, Київ, 03056
Тел. (044) 204-81-78

KPI SCIENCE NEWS

International research journal

№ 1 (142)

2026

Founded in September, 1997

Editor-in-chief
M.O. Bezuglyi, Prof.

Deputy editor-in-chief
M.Yu. Ilchenko, Academician of NASU

Executive editor – release editor
P.P. Maslianko, Assoc. Prof., PhD

In the issue:

System Analysis
and Data Science

Automation,
Computer-Integrated
Technologies and Robotics

Computer Engineering

Editorial office:
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute,
ave. Beresteyskyi, 37,
Kyiv, 03056, Ukraine
E-mail: n.visti@kpi.ua
<https://scinews.kpi.ua>

Founder – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

Entered into the register of subjects in the field of media with the assignment of media identifier R30-02405 (decision of the National Council on Television and Radio Broadcasting of Ukraine No. 1794 dated 21.12.2023)

According to the orders of MES of Ukraine from 12.28.2019 No. 1643, from 03.17.2020 No. 409, and from 04.05.2023 No. 392 the journal is included in the “B” category of the List of scientific publications of Ukraine on technical sciences in the following specialities: F2 Software Engineering, F3 Computer Science, F7 Computer Engineering, F4 System Analysis and Data Science, G5 Electronics, Electronic Communications, Instrument Making and Radio Engineering, G7 Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics

In accordance with the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 56, dated January 19, 2026, titled “On Amendments to the Procedure for Forming the List of Scientific Professional Publications of Ukraine”, it is anticipated that beginning June 1, 2026, articles will be published in the specialties encompassed by the “Information Technologies and Electronics” cluster

Advised by the Academic Council of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, protocol No. 3 on 09.03.2026.

Editorial Board

Mykhailo Bezuglyi,	Dr. Tech. Sci., Prof., Ukraine
Mykhailo Ilchenko,	Dr. Tech. Sci., Prof., Ukraine
Ivan Dychka,	Dr. Tech. Sci., Prof., Ukraine
Hryhorii Tymchyk,	Dr. Tech. Sci., Prof., Ukraine
Ivan Syniavskiy,	Dr. Tech. Sci., Sr. Researcher, Ukraine
Antoine Manzanera,	Dr.Sc., Prof., France
Jozef Korbicz,	D.Sc., Prof., Poland
María T. Orvañanos-Guerrero,	PhD, Associate Professor, Mexico
Oleksandr Vasilevskiy,	D.Sc., Prof., USA
Pawel Komada,	D.Sc., Prof., Poland
Sergii Babichev,	Dr. Tech. Sci., Prof., Czech Republic

Editorial secretary T.G. Kulikova

Editors N.V. Murashova

Desktop publishing L.M. Kotovska

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Registration Certificate – ДК № 5354 on 25.05.2017, Ave. Beresteiskiy, 37, Kyiv, 03056

Signed for printing on 09.03.2026. Format 60×84¹/₈. Text-weight paper. Font UkrainianTimesET.
Print. tech. – electrographic. Convent. printed sheets 8,91. Published sheets 7,37. Edition of 30 copies. Order No. 26-022.

Publishing House “Politehnika”, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Politekhnichna Str., 14, building 15, Kyiv, 03056
Tel. (044) 204-81-78

З М І С Т

Системний аналіз та наука про дані

<i>Романюк В.В.</i> Моделі динамічної логістичної регресії для прогнозування ризику банкрутства у будівельній галузі України	7
<i>Ориняк І.В., Кольцов Д.Р., Тавров Д.Ю.</i> Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротацийного балкового сплайна	19
<i>Волошин В.С., Ткаленко І.А.</i> Метод аналізу полікомпонентних складних систем на основі багатовимірних матриць суміжності та ентропійних відношень між компонентами системи	32

Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

<i>Стешенко Я.В., Протасов А.Г.</i> Інтелектуальна система адаптивного керування технологічним процесом укладання асфальтобетону на основі нейромережевих моделей	42
<i>Чиж І.Г.</i> Варіолінзи, як нерухомі елементи ZOOM-оптичних систем.....	50

Комп'ютерна інженерія

<i>Грузін Д.Л., Литвинов О.А.</i> Інженерія програмних систем на основі архітектури CQRS з EVENT SOURCING, що ґрунтується на знімку стану системи.....	60
Автори номера.....	75

CONTENTS

System Analysis and Data Science

<i>Romanuke V.V.</i> Dynamic logistic regression modeling for bankruptcy risk prediction in ukrainian building sector	7
<i>Orynyak I.V., Koltsov D.R., Tavrov D.Y.</i> Method for detecting corner points in images using a corotational beam spline	19
<i>Voloshyn V.S., Tkalenko I.A.</i> Method for analyzing multicomponent complex systems based on multidimensional matrices of adjacency and entropy relations between system components	32

Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics

<i>Steshenko Y.V., Protasov A.G.</i> Intelligent system for adaptive control of the technological process of laying asphalt concrete based on neural network models	42
<i>Chyzh I.G.</i> Vario lenses as fixed elements of ZOOM-optical systems.....	50

Computer Engineering

<i>Hruzin D.L., Lytvynov O.A.</i> Engineering of software systems based on snapshot-centric CQRS with EVENT SOURCING architecture	60
Contributors to the issue	75

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА НАУКА ПРО ДАНІ

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350247>

UDC 519.237.5+336.201.2

Vadim V. Romanuke*, <https://orcid.org/0000-0001-9638-9572>

Vinnitsia Institute of Trade and Economics of State University of Trade and Economics,
Vinnitsia, Ukraine, <https://ror.org/03r6hgz93>

*Corresponding author: romanukevadimv@gmail.com

DYNAMIC LOGISTIC REGRESSION MODELING FOR BANKRUPTCY RISK PREDICTION IN UKRAINIAN BUILDING SECTOR

Background. Financial distress and bankruptcy forecasting has gained significant importance in the context of post-war economic recovery and restructuring of Ukrainian industries. Firms in the building-and-construction materials sector operate under high uncertainty, where early detection of insolvency risk is crucial for maintaining financial stability. Logistic regression models, widely used in environmental and risk analytics, can be adapted to represent the nonlinear transition from solvency to bankruptcy as a probabilistic process.

Objective. The paper aims to develop and evaluate both static and dynamic logistic regression models for predicting the potential bankruptcy of a representative Ukrainian building-materials manufacturer. The dynamic extension seeks to capture the temporal persistence in financial performance through lagged predictors.

Methods. A synthetic monthly dataset (5 years, 60 observations) is generated to simulate realistic financial ratios, including liquidity, leverage, profitability, efficiency, and interest coverage (solvency). The models are estimated in MATLAB using maximum-likelihood logistic regression with L2 regularisation (ridge penalty) to retain correlated predictors. The dynamic model incorporated one-period lags of all financial ratios and the one-period-lagged response. Predictive performance is assessed by accuracy, precision, recall, F1-score, and the confusion matrix.

Results. The static logistic model achieved an average accuracy of around 89 %, yet it failed to predict two bankruptcy-risky months out of six ones. The dynamic model improved performance to 94 % accuracy, without missing a bankruptcy-risky month, but falsely labelling a non-risky month as bankruptcy-risky one. The signs of estimated coefficients are consistent with economic logic: higher leverage increases bankruptcy probability, whereas greater liquidity, profitability, efficiency, and solvency reduce it.

Conclusions. Dynamic L2-regularised logistic regression provides an interpretable and computationally efficient framework for early bankruptcy prediction in Ukrainian industrial firms. The inclusion of lagged financial indicators enhances predictive stability and timeliness, enabling practical early-warning applications.

Keywords: bankruptcy prediction; logistic regression; dynamic modelling; financial ratios; L2 regularisation; early-warning system; Ukrainian building sector.

Introduction

The probability of firm bankruptcy remains one of the central concerns in modern financial analytics, especially in economies exposed to structural trans-

formations and unstable market conditions [1, 2]. In Ukraine, the construction and building-materials sectors have faced recurrent disruptions caused by macroeconomic turbulence, exchange rate volatility, and evolving regulatory frameworks. These circumstances

Пропозиція для цитування цієї статті: В.В. Романюк, «Моделі динамічної логістичної регресії для прогнозування ризику банкрутства у будівельній галузі України», *Наукові вісті КПИ*, № 1, с. 7–18, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350247>

Offer a citation for this article: Vadim V. Romanuke, “Dynamic logistic regression modeling for bankruptcy risk prediction in Ukrainian building sector”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 7–18, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350247>

increase the risk of financial distress among manufacturing enterprises and, consequently, create the need for quantitative models capable of providing early warning signals about potential bankruptcy. Reliable bankruptcy prediction models not only help firms assess their own financial sustainability but also support creditors, investors, and policymakers in managing credit and investment risks more effectively [3, 4].

A considerable body of research on bankruptcy prediction has emerged since the mid-20th century, ranging from discriminant analysis [5] and logit models [6] to more recent approaches employing machine learning and hybrid ensemble techniques [7, 8]. Among these, logistic regression continues to occupy a prominent position because of its interpretability, robustness, and statistical grounding [9, 10]. Logistic models explicitly connect the probability of bankruptcy to a vector of financial indicators (such as liquidity, leverage, profitability, and efficiency), allowing the analyst to quantify the marginal impact of each ratio on the likelihood of financial failure. Moreover, unlike linear discriminant methods, logistic regression does not impose the assumption of normally distributed predictors, which makes it particularly suitable for financial data often characterised by skewness, outliers, and bounded ratios [11].

While static logistic models have proven useful, they fail to account for the temporal dynamics inherent in financial distress processes. A firm's transition toward insolvency rarely occurs as a sudden event. Instead, it develops gradually as liquidity deteriorates, leverage increases, or profitability declines over successive periods. Therefore, incorporating lagged predictors into the logistic framework enables one to capture persistence and delayed effects of financial indicators on bankruptcy risk. This leads to a dynamic logistic regression model, where the current probability of bankruptcy depends not only on present-period ratios but also on their historical trajectories.

However, the inclusion of multiple correlated and lagged predictors increases the risk of multicollinearity and model instability. To mitigate this, L2 regularisation (ridge penalty) can be introduced into the likelihood function [12]. Regularisation shrinks coefficient magnitudes toward zero without eliminating predictors entirely, thereby preserving all available financial information while controlling overfitting [13, 14]. This makes the model more stable and generalizable, particularly when the number of predictors approaches or exceeds the number of observed periods, which is a typical limitation in firm-level bankruptcy datasets.

Problem statement

The objective of this study is to construct and analyse a regularised dynamic logistic regression model for bankruptcy prediction in the context of a Ukrainian building-materials manufacturer. A synthetic dataset will be generated to emulate realistic financial ratios and their temporal dependencies, reflecting the operational specifics of a mid-sized construction-related enterprise. The model will be estimated by maximum penalised likelihood, with predictive performance evaluated through classification metrics such as accuracy, precision, recall, F1-score, and the confusion matrix. The results will illustrate how the proposed approach can provide interpretable and quantitatively consistent insights into bankruptcy risk even in data-constrained environments.

Notation and dynamic logistic model

Let $b(t)$ be the indicator of bankruptcy at time period t for the firm: $b(t) = 1$ means the bankruptcy in the next period, $b(t) = 0$ means no bankruptcy in the next period. Let

$$\mathbf{X}(t) = [x_k(t)]_{1 \times K} \in \mathbb{R}^K \quad (1)$$

be a vector of contemporaneous financial ratios observed at period t . We also include lagged values up to L lags of predictors and N lags of the response. Define the stacked predictor vector:

$$\mathbf{Y}_{(L+1)K}(t) = [y_i(t)]_{1 \times (L+1)K} \in \mathbb{R}^{(L+1)K} \quad (2)$$

by

$$y_k(t) = x_k(t) \text{ for } k = \overline{1, K} \text{ and } y_k(t-l) = x_k(t-l) \text{ for } k = \overline{1, K} \text{ and } l = \overline{1, L}. \quad (3)$$

The vector of lagged responses is

$$\mathbf{B}_{-N}(t) = [b(t-j)]_{1 \times N} \in \mathbb{U}_{0-1}^N \subset \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

where \mathbb{U}_{0-1}^N is the unit hypercubic lattice in \mathbb{R}^N whose vertices are of only 0's and 1's.

The dynamic logistic model assumes that

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{(L+1)K}(t); \mathbf{B}_{-N}(t)]}{1 - P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{(L+1)K}(t); \mathbf{B}_{-N}(t)]} \right) = \\ & = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{(L+1)K} \alpha_i y_i(t) + \sum_{j=1}^N \mu_j b(t-j) = \\ & = \alpha_0 + \mathbf{A}_{(L+1)K} \cdot [\mathbf{Y}_{(L+1)K}(t)]^T + \mathbf{M}_N \cdot [\mathbf{B}_{-N}(t)]^T, \quad (5) \end{aligned}$$

where

$$P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{(L+1)K}(t); \mathbf{B}_{-N}(t)] = p_t \quad (6)$$

is the conditional probability of bankruptcy at time period $t + 1$, denoted by p_t ,

$$\mathbf{A}_{(L+1)K} = [\alpha_i]_{1 \times (L+1)K} \in \mathbb{R}^{(L+1)K} \quad (7)$$

is a vector of $(L + 1)K$ model predictor parameters,

$$\mathbf{M}_N = [\mu_j]_{1 \times N} \in \mathbb{R}^N \quad (8)$$

is a vector of N model lagged-response parameters, and α_0 is the intercept parameter [9].

So, overall there are K contemporaneous and $LK + N$ lagged predictors in model (5), gathered in vectors (7) and (8), respectively. We estimate them by penalised maximum likelihood with an L2 (ridge) penalty:

$$\max_{\{\alpha_0, \mathbf{A}_{(L+1)K}, \mathbf{M}_N\}} \left(\sum_{t=1}^T [b(t) \ln p_t + (1 - b(t)) \ln(1 - p_t)] - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(L+1)K} \alpha_i^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \mu_j^2 \right), \quad (9)$$

where conditional probability (6) is deduced from (5) as

$$p_t = \left[1 + \exp(-\alpha_0 - \mathbf{A}_{(L+1)K} \cdot [\mathbf{Y}_{(L+1)K}(t)]^T - \mathbf{M}_N \cdot [\mathbf{B}_{-N}(t)]^T) \right]^{-1}, \quad (10)$$

and where λ is the regularisation hyperparameter, $\lambda \geq 0$. The ridge (L2 regularisation) is chosen because it shrinks coefficients (mitigating variance and multicollinearity) without performing variable selection; this preserves all financial ratios and their lags for interpretation.

Synthetic data design for a building-materials manufacturer in Ukraine

We must generate a realistic synthetic time series of financial ratios for a mid-sized building-materials manufacturer and a corresponding binary outcome indicating whether the firm will declare bankruptcy in the next period. Our time span is five years with monthly observations (quarterly observations might have fitted better, but this would elongate the span to 15 years, which is quite unreliable due to the current situation in Ukraine). Denote the time span length by $T = 60$. This gives enough temporal depth for lagged effects while remaining plausible for a single firm.

In our synthetic dataset, the total number of predictors (independent variables) corresponds to the main financial ratio categories presented in Table 1. The liquidity below 1 is considered weak, whereas the liquidity above 3 may mean over-capitalised. For many manufacturing firms the leverage is about 0.4 to 1.0. Capital intensive sectors may accept higher leverage, but beyond 1 it is often seen as riskier. The profitability is very dependent on industry margin norms; the building-materials sector may have lower profitability due to cost-and-price pressures. For many manufacturing firms the profitability is about 0.05 to 0.15, and value 0.2 is considered top strong. The efficiency for manufacturing might be 0.5 to 2.0 times per year, but the efficiency ratios vary hugely: inventory turnover, receivables turnover, asset turnover – all have different benchmark ranges. The solvency above 3 is often considered safe, whereas values below 2 indicate risk.

To approximately cover the typical ranges of the predictors, we generate their values with using

Table 1. Main financial ratio categories used as predictors

Name of the predictor	Denotation	Financial meaning	Example formula (simplified)	Typical benchmark range	Role in bankruptcy prediction
Current ratio	$x_1(t)$	Liquidity	Current assets / Current liabilities	0.4–3.5	Low → risk of insolvency
Debt-to-equity ratio	$x_2(t)$	Leverage	Total debt / Equity	0.1–0.95	High → risk of default
Return on assets	$x_3(t)$	Profitability	Net income / Total assets	–0.15–0.20	Low or negative → poor performance
Asset turnover	$x_4(t)$	Efficiency	Sales / Total assets	0.2–2.0	Low → inefficient resource use
Interest coverage ratio	$x_5(t)$	Solvency	EBIT (earnings before interest and taxes) / Interest expense	0.5–6.5	Low → high debt servicing stress

values ρ of uniformly distributed random variable on interval (0; 1):

$$x_1(t) = 0.8 + 1.2\rho, \quad (11)$$

$$x_2(t) = 0.2 + 1.8\rho, \quad (12)$$

$$x_3(t) = -0.05 + 0.15\rho, \quad (13)$$

$$x_4(t) = 0.3 + 1.2\rho, \quad (14)$$

$$x_5(t) = 0.5 + 6.5\rho. \quad (15)$$

The descriptive statistics of the dataset is presented in Table 2, where we can see that the data generated by (11)–(15) are successfully covered by plausible real-world ratio intervals in Table 1.

Table 2. Descriptive statistics of the synthetic time series for a building-materials manufacturer in Ukraine

Denotation	Predictor	Minimum	Mean	Maximum	Standard deviation
$x_1(t)$	Liquidity	0.8218	1.4009	1.9944	0.3326
$x_2(t)$	Leverage	0.2085	1.2088	1.9927	0.5201
$x_3(t)$	Profitability	-0.0496	0.0318	0.0972	0.0405
$x_4(t)$	Efficiency	0.3036	0.9002	1.4901	0.3777
$x_5(t)$	Solvency	0.5068	3.3272	6.9835	1.9405

The total number of events $b(t) = 1$ is 22, which is 36.67 % (Fig. 1, where higher and lower bars correspond to 1 and 0, respectively). This number is obtained by following interpretable if-then rules built from the ratios in Table 1. This is due to a stakeholder (owner of the firm), for example, sees only the values of those five financial indicators

and decides whether $b(t) = 0$ or $b(t) = 1$ based on them. The stakeholder (owner) does not know anything about those parameters (7) and (8) or model (10). So, a realistic way of assigning the value of $b(t)$ (binary risk of bankruptcy) must be based on only values of liquidity, leverage, profitability, efficiency, solvency at a time t and, plausibly, at a few previous time periods $t - 1, \dots, t - L$. For instance, $b(t) = 1$ if $x_2(t) > 1.025$, but $b(t) = 0$ if $b(t - 1) = 1$. Above that, $b(t) = 0$ if the values of liquidity, profitability, efficiency, solvency are simultaneously above their 90 % means.

The suggested way of generating a synthetic dataset for a building-materials manufacturer is very interpretable. Although it is brittle, not smooth, and can lead to either many or very few events unless tuned, it reflects the current economic instability and riskiness of Ukrainian building-materials manufacturers. The bankruptcy binary risk presented in Fig. 1 openly exposes the situation for the past five years, where the longest span without bankruptcy risk is just three months (there are three such quarters). This piano-like picture is quite realistic for a mid-sized building-materials manufacturer in Ukraine.

Estimation and software

In the case of five predictors and one lag, including one-lagged-response predictor, model (10) is simplified to:

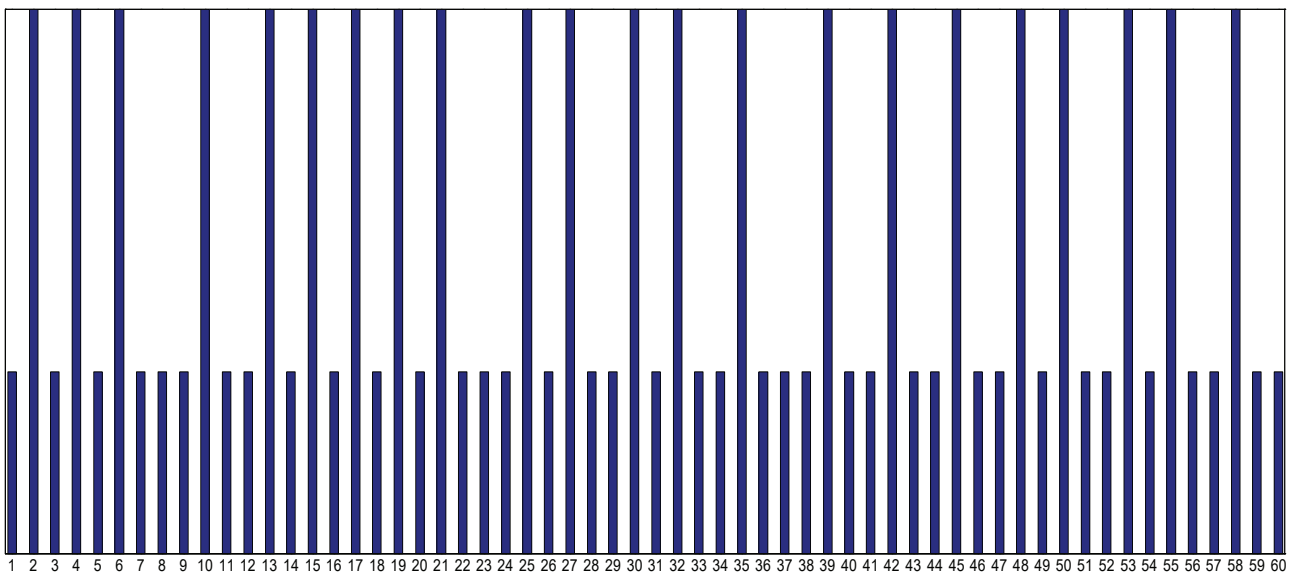


Fig. 1. Binary risk of bankruptcy (higher bars) throughout 60 periods

$$\begin{aligned}
P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{10}(t); \mathbf{B}_{-1}(t)] &= p_t = \\
&= [1 + \exp(-\alpha_0 - \mathbf{A}_{10} \cdot [\mathbf{Y}_{10}(t)]^T - \mathbf{M}_1 \cdot [\mathbf{B}_{-1}(t)]^T)]^{-1} = \\
&= [1 + \exp(-\alpha_0 - \mathbf{A}_{10} \cdot [\mathbf{Y}_{10}(t)]^T - \mu_1 \cdot b(t-1))]^{-1}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Dynamic logistic regression model (16) is built by solving problem (9) as

$$\begin{aligned}
\max_{\{\alpha_0, \mathbf{A}_{10}, \mu_1\}} & \left(\sum_{t_1 \in T_1} (\alpha_0 + \mathbf{A}_{10} \cdot [\mathbf{Y}_{10}(t_1)]^T + \mu_1 \cdot b(t_1 - 1)) + \right. \\
& + \sum_{t=1}^T \ln(\alpha_0 + \mathbf{A}_{10} \cdot [\mathbf{Y}_{10}(t)]^T + \mu_1 \cdot b(t-1)) - \\
& \left. - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^2 - \frac{\lambda}{2} \cdot \mu_1^2 \right) \quad (17)
\end{aligned}$$

by

$$\begin{aligned}
b(t_1) &= 1 \quad \forall t_1 \in T_1 \subset \{\overline{1, T}\} \quad \text{and} \\
b(t) &= 0 \quad \forall t \in \{\{\overline{1, T}\} \setminus T_1\} \quad (18)
\end{aligned}$$

If all the lags are ignored, dynamic logistic regression model (16) is further simplified to a static logistic regression model:

$$\begin{aligned}
P[b(t)=1 | \mathbf{X}_5(t)] &= p_t = \\
&= [1 + \exp(-\alpha_0 - \mathbf{A}_5 \cdot [\mathbf{X}_5(t)]^T)]^{-1}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Static logistic regression model (19) is built by solving problem (9) as

$$\begin{aligned}
\max_{\{\alpha_0, \mathbf{A}_5\}} & \left(\sum_{t_1 \in T_1} (\alpha_0 + \mathbf{A}_5 \cdot [\mathbf{X}_5(t_1)]^T) + \right. \\
& + \sum_{t=1}^T \ln(\alpha_0 + \mathbf{A}_5 \cdot [\mathbf{X}_5(t)]^T) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 \left. \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

by (18). To estimate performance of both models (16) and (19), we use the initial 70 % of chronological data for training and last 30 % for testing (temporal split) to emulate forecasting performance. So, the size of the training set is 42. For the case of static model (19) the size of the test set is 18, and for the case of dynamic model (16) the size of the test set is 17 due to the lag. It is worth noting that the number of nonzero risk indicators in the test set is 6 (it is well seen in Fig. 1), which is about one third of the test set size.

We use MATLAB-function “lassoglm” with “binomial” family and the parameter of the pure ridge [15, 16] to perform penalised logistic regression by sweeping λ between 0 and 0.1:

$$\lambda \in \left\{ 0, \left\{ w \cdot 10^{-5} \right\}_{w=1}^9, \left\{ w \cdot 10^{-4} \right\}_{w=1}^9, \left\{ w \cdot 10^{-3} \right\}_{w=1}^{100} \right\}. \quad (21)$$

Then a λ^* is selected such that optimises the performance metrics, including:

- 1) accuracy (fraction of correctly predicted days), which is to be maximised;
- 2) precision, recall, F1-score for the bankruptcy class, which all are to be maximised;
- 3) confusion matrix whose integer entries of True Positive (TP) and True Negative (TN) are to be maximised, while False Positive (FP) and False Negative (FN) are to be minimized.

Before running the optimisation problem within MATLAB-function “lassoglm”, all the predictors are standardised by subtracting the mean value over the training set and dividing by the standard deviation over the training set [12, 17, 18]. That is, both the training and test sets are standardised. This allows applying the penalty evenly [15].

We establish the simplest way to predict the bankruptcy risk. If $p_t > 0.5$ then the bankruptcy in the next period is predicted; if $p_t < 0.5$ then no bankruptcy in the next period is predicted. The case $p_t = 0.5$ is not excluded, though; if it occurs then the next period (which is $t + 1$ here) is declared the 0.5-uncertainty-bankruptcy period. In fact, this case is almost as bad as the case $p_t > 0.5$.

Results and interpretation

First we try static model (19) over set (21). The best value of λ is $\lambda^* = 0.07$, where static model (19) is

$$\begin{aligned}
P[b(t)=1 | \mathbf{X}_5(t)] &= p_t = \\
&= [1 + \exp(0.6111 + 0.3614x_1(t) - 0.8290x_2(t) + \\
& + 0.4264x_3(t) + 0.1576x_4(t) - 0.2507x_5(t))]^{-1} \quad (22)
\end{aligned}$$

at which the FN number is 2, while there are no FP predictions, Owing to that, the precision is 100 %. The accuracy is 88.89 %, which is usually said that it could be better. Due to the two bankruptcy-risky periods unseen by the static model (Fig. 2), the recall is 66.67 % being unsatisfactory. The F1-score is 80 %, which is not considered acceptable as well.

However, as we look closely at Fig. 2, the weak inaccuracy of static model (22) appears even worse. The matter is that the predicted probability polyline is squeezed and thus many non-risky periods have not really low probabilities, whereas bankruptcy-risky periods have not really high probabilities. In fact, the predicted probability varies between 0.0719 (at $t = 52$) and 0.7993 (at $t = 55$). Moreover, Fig. 2 reveals that there are two periods ($t = 51$ and $t = 54$), where the

predicted probability is very close to 0.5 ($p_{51} = 0.4995$ and $p_{54} = 0.4905$), that is the 0.5-uncertainty-bankruptcy periods factually ensue.

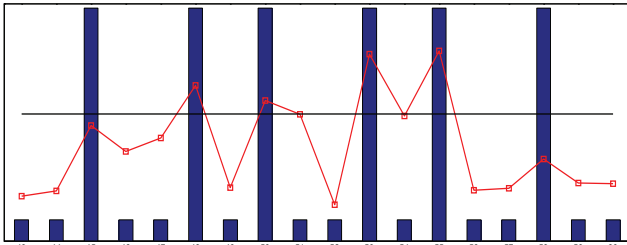


Fig. 2. The test set of 18 periods for static model (22) and the square-marked predicted probability, where the black horizontal line is at 0.5 level (the two bankruptcy-risky periods at $t = 45$ and $t = 58$ are left unseen by the model)

Besides, there is another pretty strange moment in static model (22): this is the positivity of the solvency coefficient $\alpha_5 = 0.2507$, which means that the increasing solvency must raise the probability of bankruptcy. By its absolute value this coefficient is far less than the leverage coefficient $\alpha_2 = 0.8290$ (whose positivity is quite natural and understandable), but still it is more influential than the efficiency coefficient $\alpha_4 = -0.1576$. This and the other inconsistencies mentioned above prompt to try including lagged predictors into consideration, as their influence may rectify predictability and improve performance of regression models.

Hence, subsequently, we try dynamic model (16) over set (21). The best value of λ is $\lambda^* = 0.007$, where dynamic model (16) is

$$\begin{aligned}
 P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{10}(t); \mathbf{B}_{-1}(t)] &= p_t = \\
 &= [1 + \exp(1.8066 + 0.0868x_1(t) - 2.6287x_2(t) + \\
 &\quad + 1.0353x_3(t) + 0.2122x_4(t) + 0.1474x_5(t) + \\
 &\quad + 0.0762x_1(t-1) + 0.7351x_2(t-1) - 0.6606x_3(t-1) - \\
 &\quad - 0.7530x_4(t-1) + 0.1537x_5(t-1) + \\
 &\quad + 2.5959b(t-1))]^{-1}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Dynamic model (23) performs over the test set of 17 periods far better than static model (22). Indeed, including the lags helped not only increase the accuracy up to 94.44 % and F1-score to 92.31 %, but also to stretch predicted probability polyline (Fig. 3), whereas there are no FN predictions and only one FP prediction (at $t = 47$). Now the predicted probability varies between 0 and 0.9971, and there are no 0.5-uncertainty-bankruptcy periods (despite $p_{58} = 0.5183$, it is farther from the real-prac-

tice uncertainty, and this risky period has been correctly predicted). The performance metrics of static model (22) and dynamic model (23) are presented in Table 3 for comparability.

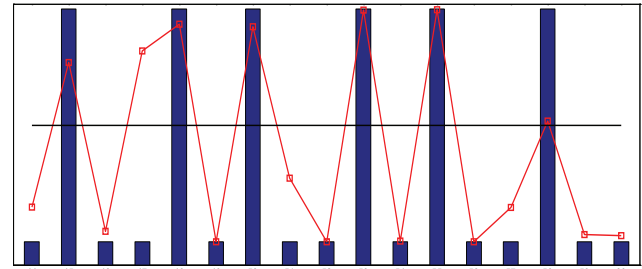


Fig. 3. The test set of 17 periods for dynamic model (23) and the square-marked predicted probability, where the black horizontal line is at 0.5 level

Table 3. Performance metrics of the static and dynamic models for the synthetic 60-period time series in Fig. 1

Performance metric	Static model (22)	Dynamic model (23)
Accuracy	0.888 889	0.944 444
Precision	1	0.857 143
Recall	0.666 667	1
F1-score	0.8	0.923 077
TP	4	6
TN	12	11
FP	0	1
FN	2	0

Although dynamic model (23) drops the precision down to 85.71 %, it is caused by the single FP prediction (which, obviously, is a way better than having an FN prediction). The remaining performance metrics indicate the clear advantage of the lagged regression. Another optimistic peculiarity of the one-lagged regression model is that its coefficients at the five non-lagged predictors all have interpretable signs – negative ones at liquidity, profitability, efficiency, and solvency, while the leverage coefficient sign is positive. The lagged predictors do not completely follow this pattern as the lagged leverage coefficient is negative, while the lagged profitability and efficiency coefficients are positive. The lagged response has a negative coefficient ($\mu_1 = -2.5959$) as well. However, this is commonly normal due to the following reasons:

1. Lagged predictors may flip signs because the current ratios already explain most of the variation in bankruptcy, so the lagged ones only capture left-

over corrections, often producing opposite-direction effects due to multicollinearity.

2. A lagged variable enters the model after its current version, so its coefficient reflects changes rather than levels; this naturally yields inverted signs.

3. Lagged response gets a negative sign because, in our synthetic setup, distress is reversible: if the last period was distressed but today's ratios look healthy, the model learns a mean-reversion effect.

4. When distress does not persist automatically but depends on today's fundamentals, the lagged response serves as a "temporary shock indicator", leading to a negative coefficient.

Hence, the regularised dynamic logistic regression model (16) by (17) proves to be interpretable and

quantitatively consistent for bankruptcy risk prediction of a building-materials manufacturer in Ukraine. Despite not very large training set (42 periods are used to estimate 12 coefficients of the model), the lagged regression successfully captures bankruptcy-risky periods during 17 test set points for synthetic datasets generated by (11)–(15) with descriptive statistics similar to that in Table 2. Nevertheless, the question is whether the lagged regression model is enough robust and sustainable. To answer this question, the synthetic dataset should be extended and the respective model should be tested on a much longer test span.

So, using the similar if-then rules built from the ratios in Table 1, by which the bankruptcy binary risk is generated for 60 periods (Fig. 1), we generate

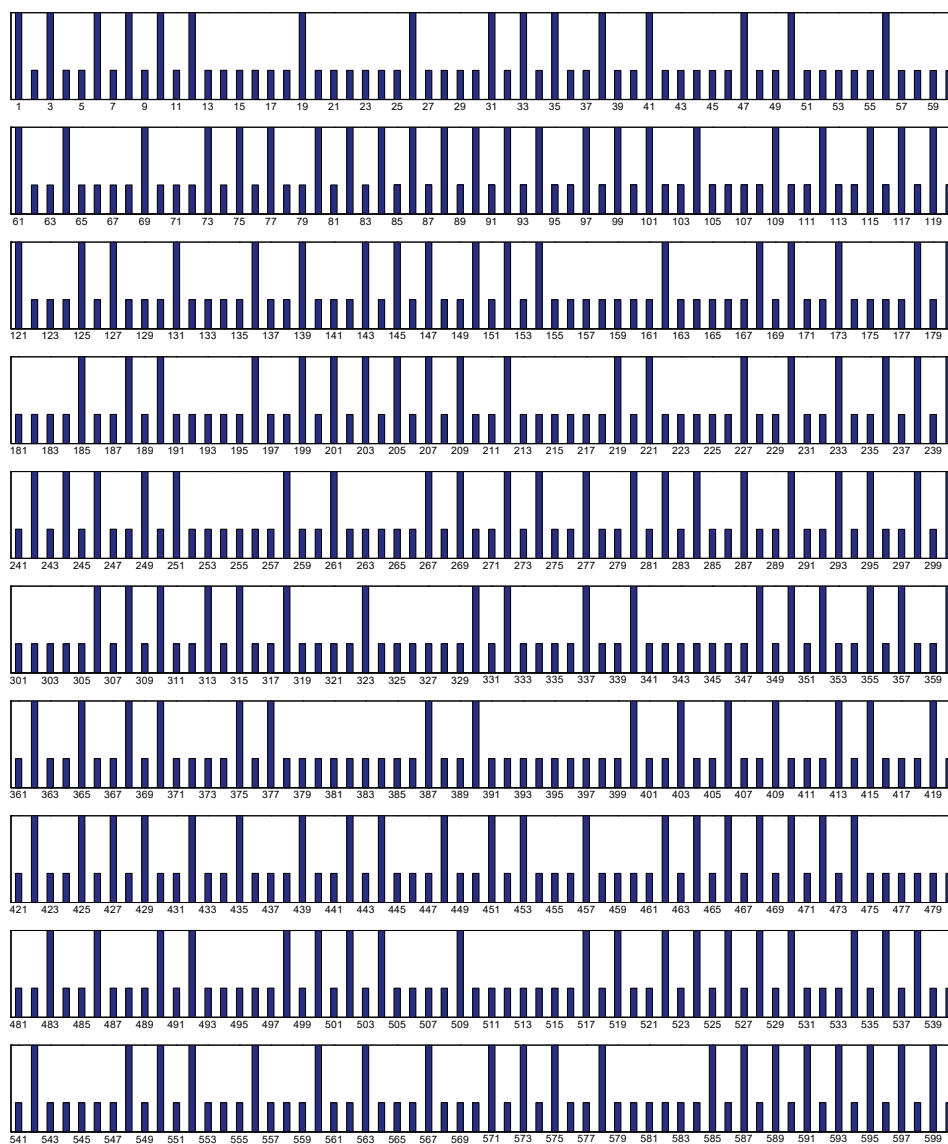


Fig. 4. Binary risk of bankruptcy throughout 600 periods, divided into 10 equal spans

a synthetic 600-period time series of the bankruptcy binary risk (Fig. 4). Herein, the total number of events $b(t) = 1$ is 188, which is 31.33 %, and so we keep roughly a one third of risky periods. The size of the training set is 420. For the case of static model (19) the size of the test set is 180, and for the case of dynamic model (16) the size of the test set is 179 due to the lag. It is worth noting that the number of nonzero risk indicators in the test set is 59 (it is well seen and can be calculated in the three bottom spans in Fig. 4), which is about one third of the test set size. The 59 risky periods are almost equally scattered throughout the test span (20, 19, and 20 risky periods in the three bottom spans in Fig. 4).

When we apply static model (19) for the 600-period time series, the regularisation hyperparameter is set to $\lambda^* = 0.07$ for keeping congruence with static model (22). In this way, our static model (19) becomes one with interpretably signed coefficients (negative coefficients at liquidity, profitability, efficiency, and solvency, while the leverage coefficient sign is positive):

$$P[b(t) = 1 | X_5(t)] = p_t = [1 + \exp(1.0236 + 0.0308x_1(t) - 1.0503x_2(t) + 0.2479x_3(t) + 0.1247x_4(t) + 0.2086x_5(t))]^{-1}. \quad (24)$$

However, static model (24) performs poorly on the 180-period test span: its accuracy is 72.22 %,

the precision is 60.47 %, while the recall and F1-score drop down to 44.07 % and 50.98 %, respectively. The number of FN predictions is 33, which is huge (55.93 %) with respect to the 59 bankruptcy-risky periods in the test span. The number of FP is 17, so altogether the 50 false predictions constitute 27.78 % of the test set, which is quite unacceptable. In addition, just like static model (19) for the 60-period time series, the predicted probability polyline is squeezed and again many non-risky periods have not really low probabilities, whereas bankruptcy-risky periods have not really high probabilities (Fig. 5). In fact, the predicted probability varies between 0.0433 (at $t = 437$) and 0.7696 (at $t = 502$). Fig. 5 also reveals that there are four periods ($t = 442, t = 522, t = 527, t = 578$), where the predicted probability is no farther from 0.5 than by 0.004, that is the 0.5-uncertainty-bankruptcy periods factually ensue.

For keeping congruence with dynamic model (23), the regularisation hyperparameter is set to $\lambda^* = 0.007$ in applying dynamic model (16) for the 600-period time series. Then the respective dynamic model (16) also has interpretably signed coefficients at the non-lagged predictors (negative coefficients at liquidity, profitability, efficiency, and solvency, while the leverage coefficient sign is positive), although the lagged predictors and response have coefficients that all are sign-inverted:

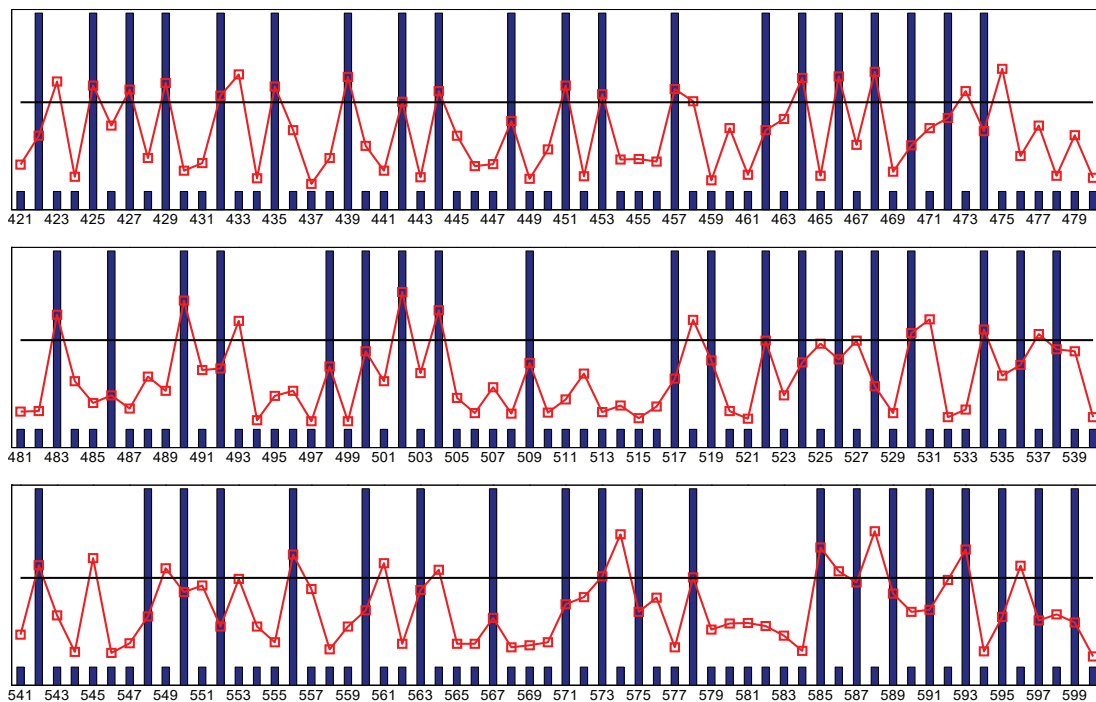


Fig. 5. The three spans of the test set of 180 periods for static model (24) and the square-marked predicted probability

$$\begin{aligned}
 P[b(t)=1 | \mathbf{Y}_{10}(t); \mathbf{B}_{-1}(t)] = p_t = & [1 + \exp(2.2584 + \\
 & + 0.1765x_1(t) - 2.4866x_2(t) + 0.3840x_3(t) + \\
 & + 0.3259x_4(t) + 0.4966x_5(t) - 0.0521x_1(t-1) + \\
 & + 0.2099x_2(t-1) - 0.2184x_3(t-1) - 0.1234x_4(t-1) - \\
 & - 0.1195x_5(t-1) + 2.3423b(t-1))]^{-1}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Just like in the case of the static models, whose respective six coefficients differ significantly by their absolute values, the 12 coefficients of lagged regression (25) significantly differ from those of lagged regression (23). Dynamic model (25) nonetheless performs far better than static model (24): its accuracy is 91.11 %, the precision is 92.16 %, although the recall and F1-score are not that good (Table 4). The number of FN predictions is 12, which is still pretty poor (20.34 %) with respect to the 59 bankruptcy-risky periods in the test span. The number of FP is 4, so altogether the 16 false predictions constitute 8.89 % of the test set, which could be acceptable, though. All the more, the predicted probability polyline is not squeezed (Fig. 6), where the predicted probability varies between 0.0000235 (at $t = 499$) and 0.9896 (at $t = 502$, where the static model performed its best prediction as well). The predicted probability is no closer to 0.5 than by 0.0017, but there is

one period ($t = 548$), where it is no farther from 0.5 than by 0.004, ensuing factually a 0.5-uncertainty-bankruptcy period. If to widen the 0.5-uncertainty interval to 0.01, another risky-uncertain period ($t = 567$) emerges. By the way, the model labels both the periods non-risky, making its contribution to the FN number.

Although the lagged regression performs not poorly over the tenfold data, especially compared to the static regression (Table 4), the FN number is still badly high. This implies that the logistic model cannot perform satisfactorily on too large datasets like that one in Fig. 4. Therefore, the model should be re-estimated through shorter or not very long time spans like that one in Fig. 1.

According to dynamic model (23), where L2 regularisation helps manage multicollinearity between $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{X}(t-1)$, the lagged financial indicators help anticipate bankruptcy earlier, particularly for firms showing deteriorating performance over several periods. The dynamic logistic regression model, which incorporates both contemporaneous and one-period-lagged financial indicators, reveals several important insights into bankruptcy risk. As expected, the current-period predictors display intuitive signs: higher liquidity, profitability, efficiency, and solvency reduce the probability of distress, while higher leverage increases it. These results are fully consistent with standard financial theory and

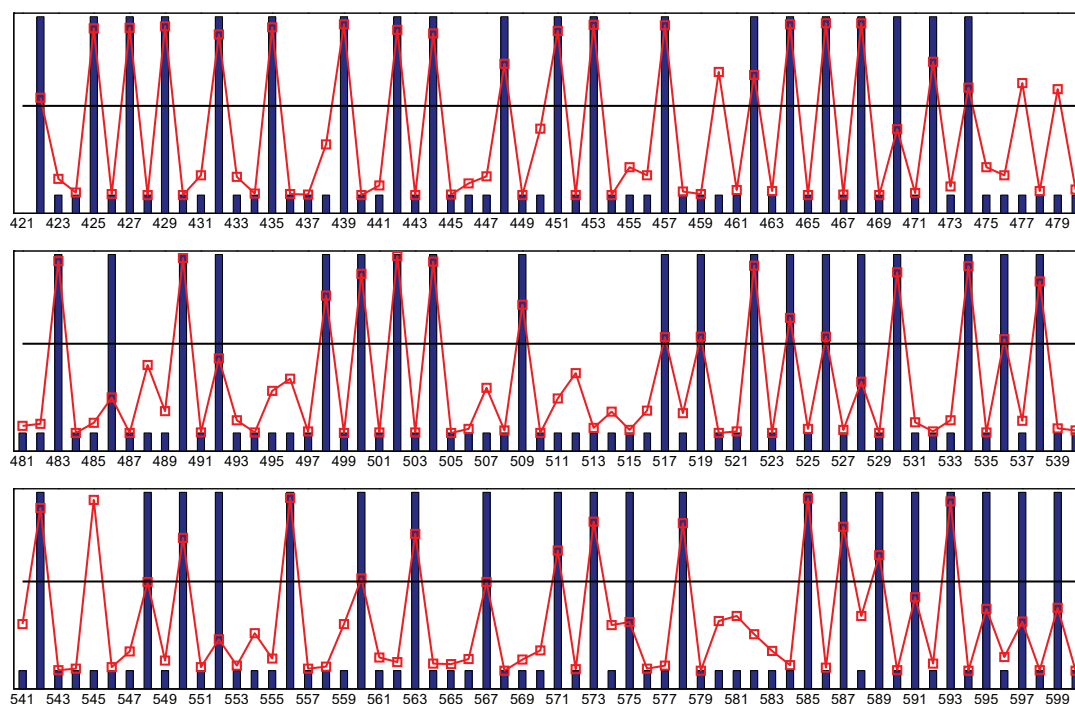


Fig. 6. The three spans of the test set of 179 periods for dynamic model (25) and the square-marked predicted probability

Table 4. Performance metrics of the static and dynamic models for the synthetic 600-period time series in Fig. 4

Performance metric	Static model (24)	Dynamic model (25)
Accuracy	0.722 222	0.911 111
Precision	0.604 651	0.921 569
Recall	0.440 678	0.79 661
F1-score	0.509 804	0.854 545
TP	26	47
TN	104	117
FP	17	4
FN	33	12

empirical evidence. The more interesting behaviour emerges in the lagged predictors, where we unexpectedly obtain negative leverage along with positive profitability and efficiency. Nevertheless, these inverted or non-intuitive signs do not indicate estimation errors; instead, they reflect the structure of the synthetic data and the dynamic relationships embedded in the system.

First, the lagged leverage coefficient becomes negative because the current leverage already absorbs nearly all the explanatory power related to financial pressure. The lagged value therefore captures changes rather than levels: a firm whose leverage was very high in the previous period but has decreased today is less likely to be distressed. In this sense, the lagged coefficient reflects a deleveraging recovery effect.

Similarly, the positive coefficients on lagged profitability and efficiency arise because the model interprets them relative to the current values. When profitability or efficiency drop sharply from one period to the next, bankruptcy risk increases – so a high previous-period value combined with a low current value signals deterioration. The lagged coefficients thus take positive signs to encode this downward momentum effect.

Finally, the negative coefficient on the lagged response confirms that distress in this synthetic setup is not a persistent absorbing state. Firms marked as distressed in one period can recover in the next if their financial ratios improve. Therefore, when the model sees $b(t-1) = 1$ but today's fundamentals look healthy, it interprets past distress as a temporary shock that is likely to reverse, producing a negative effect.

Altogether, these patterns confirm that the dynamic model does not merely reproduce static financial relationships but captures binary transitions between sustainable and critical states, momentum

effects, and reversions, all driven by the interplay between current and lagged financial indicators [2, 6, 19]. Despite some signs appearing counterintuitive when viewed in isolation, the combined structure reflects precisely the data-generation mechanism and yields strong predictive accuracy, especially for out-of-sample periods.

Conclusions and implications

This study demonstrates that logistic regression modelling can be successfully applied to the prediction of potential bankruptcy of industrial firms. Using a synthetic dataset representing monthly financial indicators of a building-materials manufacturer in Ukraine, both static and dynamic versions of the logistic regression model were estimated with L2 regularisation to ensure parameter stability and full inclusion of correlated predictors.

The static logistic model, based on current-period financial ratios, provided a baseline prediction accuracy of approximately 89 %, correctly identifying most solvent and insolvent states of the firm, but losing two bankruptcy-risky months. The dynamic model, incorporating one-period lagged financial ratios, achieved around 94 % accuracy, showing a consistent improvement across recall and F1-score metrics, while no one out of six bankruptcy-risky months was lost. This gain reflects the dynamic model's ability to capture temporal dependencies in firm financial health and to anticipate deterioration before formal bankruptcy occurs.

From a methodological standpoint, the results confirm that:

1. L2-regularised logistic regression remains a reliable and interpretable tool for financial distress modeling even with small or correlated datasets.

2. Introducing lagged predictors effectively transforms the static framework into a dynamic, autoregressive-like model that captures financial inertia – the persistence of past conditions affecting present solvency. In the dynamic model, current ratios dominate and lagged variables correct, whereas these corrections often appear with opposite signs.

3. Logistic regression's probabilistic interpretation makes it particularly well-suited for risk-based early-warning systems, where firms can be monitored by thresholding predicted bankruptcy probabilities.

In the Ukrainian building and construction materials industry, where firms often operate under volatile demand, credit constraints, and high capital intensity, predicting financial distress is vital. The

model developed here provides a quantitative framework for:

1. Early detection of bankruptcy risk several quarters in advance, enabling proactive interventions.

2. Scenario testing, such as evaluating the impact of rising debt or declining profitability.

3. Integrating predictive analytics into credit scoring systems used by banks, suppliers, and regulators.

The synthetic firm analysed in this paper mimics the structure and financial behaviour of a typical mid-sized Ukrainian manufacturer, but the model can easily be recalibrated using real company data, once available. Although the presented model provides valuable insight, it also has three important limitations. First, the model relies on a synthetic dataset rather than empirical data. Second, it assumes constant coefficients over time, while real-world relationships may evolve. Third, only one

lag was used in the dynamic model, but longer financial memory might improve forecasting accuracy. Future research may address these limitations by using panel data across multiple firms and estimating firm-specific random effects, by applying time-varying or adaptive regularisation to allow coefficients to change with macroeconomic conditions [20, 21], and by exploring nonlinear extensions such as kernel logistic regression or neural-network-based survival models for richer temporal dependencies.

The presented work confirms that dynamic logistic regression with regularisation offers a theoretically sound and computationally tractable tool for predicting bankruptcy risk in industrial firms. Its interpretability, modest data requirements, and stable performance make it particularly attractive for early-warning analytics in transitional economies like Ukraine, where financial data are often limited but timely risk identification is crucial.

References

- [1] P. du Jardin, “Bankruptcy prediction using terminal failure processes”, *European Journal of Operational Research*, 2015, Vol. 242, Iss. 1, pp. 286–303. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.09.059>
- [2] D.S. Nugroho and T. Dewayanto, “Application of statistics and artificial intelligence for corporate financial distress prediction models: a systematic literature review”, *Journal of Modelling in Management*, 2025, Vol. 20, Iss. 6, pp. 1999–2023. Available: <https://doi.org/10.1108/JM2-12-2024-0412>
- [3] F. Fasano et al., “The dilemma of accuracy in bankruptcy prediction: a new approach using explainable AI techniques to predict corporate crises”, *European Journal of Innovation Management*, 2025, Vol. 28, Iss. 11, pp. 1–22. Available: <https://doi.org/10.1108/EJIM-06-2024-0633>
- [4] E. Lyandres and A. Zhdanov, “Investment opportunities and bankruptcy prediction”, *Journal of Financial Markets*, 2013, Vol. 16, Iss. 3, pp. 439–476. Available: <https://doi.org/10.1016/j.finmar.2012.10.003>
- [5] E.I. Altman, “Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy”, *Journal of Finance*, 1968, Vol. 23, No. 4, pp. 589–609. Available: <https://doi.org/10.2307/2978933>
- [6] J.A. Ohlson, “Financial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy”, *Journal of Accounting Research*, 1980, Vol. 18, No. 1, pp. 109–131. Available: <https://doi.org/10.2307/2490395>
- [7] M. Hesse and T. Loy, “Unlocking bankruptcy clues: A novel sentence-based machine learning approach”, *International Journal of Accounting Information Systems*, 2025, Vol. 56, Art. no. 100751. Available: <https://doi.org/10.1016/j.accinf.2025.100751>
- [8] X. Chen et al., “Multi-class financial distress prediction based on hybrid feature selection and improved stacking ensemble model”, *Expert Systems with Applications*, 2025, Vol. 282, Art. no. 127832. Available: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2025.127832>
- [9] D.W. Hosmer Jr. et al., *Applied Logistic Regression*, 3rd Edition, Wiley, 2013. Available: <https://doi.org/10.1002/9781118548387>
- [10] D.G. Kleinbaum and M. Klein, *Logistic Regression. A Self-Learning Text*, Springer New York, NY, 2010. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1742-3>
- [11] A. Magrini, “Bankruptcy risk prediction: A new approach based on compositional analysis of financial statements”, *Big Data Research*, 2025, Vol. 41, Art. no. 100537. Available: <https://doi.org/10.1016/j.bdr.2025.100537>
- [12] T. Hastie et al., *The Elements of Statistical Learning*, Springer Series in Statistics, Springer, New York, NY, 2009. Available: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7>
- [13] C.M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer New York, NY, 2006. Available: <https://link.springer.com/book/9780387310732>
- [14] K.P. Murphy, *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, *The MIT Press*, 2012. Available: <https://mitpress.mit.edu/9780262018029/machine-learning/>
- [15] J.H. Friedman et al., “Regularization paths for generalized linear models via coordinate descent”, *Journal of Statistical Software*, 2010, Vol. 33, Iss. 1, pp. 1–22. Available: <https://doi.org/10.18637/jss.v033.i01>

- [16] J.K. Tay *et al.*, “Elastic net regularization paths for all generalized linear models”, *Journal of Statistical Software*, 2023, Vol. 106, Iss. 1, pp. 1–31. Available: <https://doi.org/10.18637/jss.v106.i01>
- [17] M. Kuhn and K. Johnson, *Applied Predictive Modeling*, Springer New York, NY, 2013. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6849-3>
- [18] G. James *et al.*, *An Introduction to Statistical Learning with Applications in Python*, Springer Texts in Statistics, Springer Cham. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-38747-0>
- [19] J.-P. Danthine *et al.*, “Chapter 22 – Financial Equilibrium with Differential Information”, In: J.-P. Danthine, J.B. Donaldson, and S. Danthine (Eds.), *Intermediate Financial Theory (Fourth Edition)*, Academic Press, 2025, pp. 641–657. Available: <https://doi.org/10.1016/B978-0-443-28902-6.00022-1>
- [20] S.V. Merinova and V.V. Romanuke, “Perspectives of blockchain technology in business and management: advantages and challenges”, *Systems and Technologies*, 2025, Vol. 69, No. 1, pp. 138–144. Available: <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-1-69.17>
- [21] A. Sutrisno and R.A. Hamka, “Development and stabilization in small open economies”, *Journal of Enterprising Communities: People and Places in the Global Economy*, 2025, Vol. 19, Iss. 3, pp. 700–701. Available: <https://doi.org/10.1108/JEC-06-2025-272>

В.В. Романюк

МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ ЛОГІСТИЧНОЇ РЕГРЕСІЇ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РИЗИКУ БАНКРУТСТВА У БУДІВЕЛЬНІЙ ГАЛУЗІ УКРАЇНИ

Проблематика. Прогнозування фінансової неспроможності та банкрутства набуває дедалі більшої актуальності в умовах післявоєнного економічного відновлення та реструктуризації українських промислових галузей. Підприємства сектору виробництва будівельних матеріалів працюють в умовах високої невизначеності, де раннє виявлення ризику неплатоспроможності є критично важливим для підтримання фінансової стабільності. Логістичні регресійні моделі, широко застосовувані в екологічній та ризик-аналітиці, можуть бути адаптовані для відображення нелінійного переходу від платоспроможності до банкрутства як ймовірного процесу.

Мета дослідження. Метою є розробити та оцінити статичні й динамічні логістичні регресійні моделі для прогнозування потенційного банкрутства репрезентативного українського виробника будівельних матеріалів. Динамічне розширення моделі спрямоване на врахування часової інерційності фінансових показників шляхом включення лагових предикторів.

Методика реалізації. Згенеровано синтетичний помісячний набір даних (5 років, 60 спостережень), що імітує реалістичні фінансові коефіцієнти, зокрема ліквідність, левередж, рентабельність, ефективність та коефіцієнт покриття відсотків (платоспроможність). Оцінювання моделей виконано в MATLAB методом логістичної регресії максимальної правдоподібності з L2-регуляризацією (ридж-штрафом) для збереження корельованих предикторів. До динамічної моделі включено однопіріодні лаги всіх фінансових коефіцієнтів і однопіріодний лаг реакції. Прогнозу якості оцінено за точністю, прецизійністю, повнотою, F1-мірою та матрицею сплутувань.

Результати дослідження. Статична логістична модель досягла середньої точності приблизно 89 %, але пропустила два ризикові щодо банкрутства місяці з шести. Динамічна модель підвищила точність до 94 %, не пропустивши жодного ризикового місяця, хоча й помилково класифікувала один неризиковий місяць як ризиковий. Знаки оцінених коефіцієнтів узгоджуються з економічною логікою: більший левередж підвищує ймовірність банкрутства, тоді як зростання ліквідності, рентабельності, ефективності та платоспроможності її знижує.

Висновки. Динамічна логістична регресія з L2-регуляризацією забезпечує інтерпретовану й обчислювально ефективну основу для раннього прогнозування банкрутства українських промислових підприємств. Включення лагових фінансових індикаторів підвищує стабільність і своєчасність прогнозів, що робить модель придатною для практичних систем раннього попередження.

Ключові слова: прогнозування банкрутства; логістична регресія; динамічне моделювання; фінансові коефіцієнти; L2-регуляризація; система раннього попередження; будівельний сектор України.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
25 листопада 2025 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опублікована
30 березня 2026 року

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

UDC 514.181

I.V. Orianyak¹, <https://orcid.org/0000-0003-4529-0235>,
D.P. Koltsov^{1*}, <https://orcid.org/0000-0002-0396-7255>,
D.Yu. Tavrov¹, <https://orcid.org/0000-0002-3689-2931>

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна, <https://ror.org/00syn5v21>

*Відповідальний автор: koltsovdd@gmail.com

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТОЧОК НА ЗОБРАЖЕННЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА

Проблематика. Пошук кутових точок на зображеннях має велике значення для ідентифікації образів і має багато сфер застосування в комп'ютерному зорі та розпізнаванні образів. Зазвичай для цього використовують геометричний аналіз чорно-білих контурів, до яких потім застосовують гаусівське згладжування для виявлення точок найбільшої кривизни. Потім до цих ділянок застосовують мінімізацію певних функціоналів для визначення величини кута між суміжними ділянками контуру. Недоліком такого підходу є складності у врахуванні артефактів і те, що за більшого згладжування зменшується масштаб (розмір) зображення.

Мета дослідження. Розробити метод визначення кутових точок на оцифрованому сірому зображенні за допомогою методу коротаційного балкового сплайна (КБС).

Методика реалізації. Застосування методу КБС з використанням запропонованих кутових даммі-точок, для яких немає умов неперервності по кутах, а замість неї постулюється нульова кривизна, що приводить до стрибка напрямку дотичної в цій точці.

Результати дослідження. Застосовано метод КБС, який згладжує контур чорно-білого зображення відповідно до довжини ділянки, а не до кількості точок на цій ділянці, зберігаючи загальний масштаб зображення. Запропоновані особливі кутові даммі-точки, які допускають втрату неперервності кута. За значеннями локальних екстремумів за графіком кривизни визначають кандидати в кутові точки. Для кожної точки визначають роботи як квадрат відстані між нею і її відповідником на контурі, помноженим на довжину ділянки, на яку припадає ця точка. Застосовано поняття інтегральної роботи як суми індивідуальних робіт у зоні найбільшої кривизни. Розроблено критерій існування кутової точки на основі аналізу відношення індивідуальних робіт, що отримані за відсутності та наявності кутової даммі-точки.

Висновки. Застосування адаптивного згладжування відповідно до відстані між точками на контурі, які є проєкціями (відповідниками) виміряних точок, дозволяє застосовувати метод до набору даних з різною густиною точок, що покращує якість отриманого контуру. Застосування кутових даммі-точок, які допускають втрату неперервності кута, дозволило більш точно відтворювати заданий контур, а саме різку зміну кута, а застосування відношення індивідуальних робіт, отриманих за відсутності та за наявності даммі-точки, є надійним критерієм визначення кутових точок. Відношення значень роботи показує покращення у 8–30 разів для кутових точок, тоді як для поворотних зон це значення погіршується або залишається майже таким самим.

Ключові слова: балковий коротаційний сплайн; геометричне моделювання; диференціальні рівняння; локальна інтегральна робота; кутові точки; ідентифікація кутів; непараметричне згладжування.

Вступ

Розглянемо метод визначення положення кутових точок і величини стрибка кута в них на зображеннях, отриманих фотографуванням чи скануванням. Використаємо насамперед прак-

тичні дані й методики, запропоновані в роботі [1], де проводилося згладжування і зіставлення кривих для автоматичного укладання безколірного пазла.

Виявлення кутів відіграє ключову роль у сфері комп'ютерного зору, слугуючи осново-

Пропозиція для цитування цієї статті: I.V. Orianyak, D.P. Koltsov, D.Yu. Tavrov, «Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна», *Наукові вісті КНУ*, № 1, с. 19–31, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

Offer a citation for this article: I.V. Orianyak, D.R. Koltsov, D.Y. Tavrov, “A method for detecting corner points in images using a corotational beam spline”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 19–31, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

положним елементом для безлічі завдань обробки зображень і розпізнавання образів [2, 3]. Кутові точки є стійкими і незмінними до таких трансформацій, як обертання і зміна масштабу, тому як стабільні використовують ознаки геометрії з чітко визначеними характеристиками, що робить їх надійними точками інтересу та зіставлення [4–6]. Вони є важливими локальними ознаками у багатьох задачах, таких як 3D-реконструкція будівель та їх геолокація [7, 8], зіставлення зображень і фрагментів пошкоджених манускриптів [9], відстеження рухомих об'єктів [10], для калібрування камери на основі кутів шахової дошки [11], візуально контрольована хірургія [12].

В останні роки алгоритми виявлення кутів отримали широке визнання і практичну значущість в інженерних галузях, включаючи автономну навігацію, робототехніку для одночасної локалізації та картографування SLAM [13], доповнену реальність і системи розпізнавання облич, в автомобілебудуванні, структурний аналіз у цивільному будівництві, особливо щодо тріщин [14], і вилучення ознак в медичній візуалізації [15]. Універсальність і практична корисність алгоритмів виявлення кутів роблять їх незамінними інструментами в сучасній інженерії.

Протягом останніх десятиліть було запропоновано різні аналітичні детектори кутів, які умовно можна поділити на три категорії [16]: детектори на основі моделей і шаблонів; методи на основі інтенсивності зображень, використовуючи зміну інтенсивності пікселів; методи геометричного аналізу контуру, екстрагованого із цифрового зображення.

Детектори на основі моделей виявляють кутові точки, порівнюючи ділянки зображення з попередньо визначеною моделлю кутів та оцінюючи їхню подібність [17]. У статті [18] розроблено алгоритми виявлення кутів на основі шаблонів, враховуючи оптимальні кути з довжиною щонайменше два пікселі на напрямках кутових плечей, що зменшує кількість хибнопозитивних кутів. Такі методи застосовують для швидкої обробки відеозображень.

Підходи на основі інтенсивності ґрунтуються на спостереженні, що між сусідніми пікселями вздовж краю або в однорідній області зображення існує невелика різниця в інтенсивності пікселів. Тим часом у куті спостерігається значна варіація інтенсивності в усіх напрямках [19]. У таких підходах кути можуть безпосередньо виявлятися шляхом генерування функції відгуку кута, яка оцінює значення пікселів зображення таким чи-

ном, що кути розпізнаються як точки з низькою самоподібністю на зображенні [20]. Для визначення самоподібності точок часто використовують суму квадратів різниць між відповідними ділянками зображення із двох зображень. Це основа для багатьох детекторів кутів [21]. Цю ідею надалі вдосконалили шляхом введення додаткового фільтра як на добуток функції знака (в кутівій точці) і гаусівського згладжування [22].

Останнім часом метод на основі контурів стає все більш поширеним завдяки простоті коду та обчислювальній ефективності [23]. Робота детекторів на основі геометричного аналізу контуру складаються із трьох основних кроків: виявлення країв, виділення контурів і класифікація кутів. Визначення країв, тобто бінарну карту країв, звичайно отримують за допомогою алгоритму Канні, який застосовують для сірого зображення [24].

Ключовою проблемою в геометричних методах є оцінювання дискретної кривизни кожної цифрової кривої, отриманої з вхідного зображення. Для цього було запропоновано різні міри визначення кривизни, наприклад k -косинус [25], накопичення відстані від хорди до точки [26, 27]. Подібні підходи припускають [23], що на цифровій кривій кожен два сусідні пікселі мають постійну відстань (тобто пікселі розподілені на кривій на рівній відстані). Утім, ця відстань може змінюватися в середньому від 1 до $\sqrt{2}$, що вимагає адаптивного згладжування, особливо при зіставленні двох контурів. Більшість з подібних методів є одномасштабними детекторами і добре працюють, якщо зображення має ознаки подібного розміру, але неефективні в іншому випадку. Як результат або дрібні, або грубі ознаки стають погано сегментованими, що неприйнятно, оскільки природні зображення зазвичай містять обидва типи ознак [28].

Для вирішення цієї проблеми було запропоновано поняття диференціальної кривизни на основі застосування різних рівнів згладжування [29, 30], які використовують техніку багатомасштабного подання (curvature scale space) форми плоских кривих [31]. Хоча він може виявляти ознаки з кількома різними розмірами, алгоритм є обчислювально ресурсомістким через те, що аналіз ознак відбувається у всьому масштабному просторі. Більше того, він виявляє хибні кути на колах [28].

Майже всі відомі методи отримання цифрових кривих оснований на гаусівському згладжуванні точок контуру, що попередньо подають як окремі функції координат $x(t)$, $y(t)$ від парамет-

ра t , який визначають за допомогою окремих спеціальних процедур екстракції контуру з дискретних меж і нумерації точок [32, 33]. Утім, гаусівські ядра стають досить неточними, коли є розмиті чи шумні зображення. Вони стають залежними від кількості та амплітуди шумних точок, включаючи артефакти. Саме тому в усіх підручниках зі статистичного згладжування описано недоліки гаусівських ядер і запропоновано альтернативні підходи, які використовують адаптивні ядра чи сплайни [34]. У деяких роботах з геометричного моделювання, особливо для побудови траєкторій по неточно визначеним точкам [35], запропоновано параметричне згладжування на основі кубічних сплайнів із доцентровою корекцією величини параметра t [36]. Іншим недоліком гаусівського чи параметричного згладжування є те, що масштаб згладженого контуру залежить від параметра згладжування — зі збільшенням згладжування масштаб рисунку прямує до точки.

Коротацийні балкові сплайни є новітньою технологією розв'язання задач інтерполяції, дизайну, апроксимації, і містять цілий ряд переваг, що робить їх універсальним інструментом вирішення інженерних задач у різних галузях [1, 37–40]. Коротацийні балкові сплайни є адаптивними. Вони ґрунтуються на моделі балки на пружній основі, де жорсткість пружини (величина «притягування» контуру до вимірної точки положення) залежить від довжини ділянки, якій відповідає ця точка [37, 39]. Саме тому локальне збільшення густини точок на певній ділянці (наявність артефакту) ніяк не буде відображено на згладженому контурі — у цьому випадку кожна точка автоматично отримує зменшену вагу, що не призведе до локального викривлення контуру. Збільшення рівня згладжування (зменшення коефіцієнта притягання до контуру) приводить до зменшення локальної кривизни, але точки, розміщені по різні сторони від контуру, створюють сили в різних напрямках. Це означає, що масштаб отриманого контуру не зменшується під час наступного згладжування. В КБС ділянки кривих між точками замірів описують клотоїдами, що дає лінійний зв'язок між приростом кривизни і довжини, що робить таку криву енергетично найвигіднішою для всіх можливих траєкторій [41]. Коротацийні балкові сплайни мають великий арсенал інструментів для врахування початкової кривизни ділянок чи початкових кутів між ділянками сплайна [39]; на відміну від усіх інших кубічних сплайнів вони мають можливість враховувати три (а не дві)

граничні умови, що дає можливість розв'язувати C^2 неперервні задачі інтерполяції [40].

Постановка задачі

Основна спрямованість роботи стосується методу визначення положення і величини стрибка кута в зображеннях, отриманих фотографуванням чи скануванням. У статті використано насамперед практичні дані й методики, запропоновані в роботі [1], де описано згладжування і зіставлення кривих для автоматичного укладання безколірного пазла. У цій статті ми введемо дві нові особливості, що збагачують техніку КБС. По-перше, введемо спеціальну кутову даммі-точку, що забезпечує можливість різкої зміни напрямку дотичної до контуру. По-друге, введемо поняття інтегральної роботи як локальну характеристику відповідності положенню заміряних точок до згладженого контуру. На основі цього запропонуємо критерій доцільності введення кутової точки як відношення роботи з наявною кутовою точкою до роботи без неї.

1. Теоретичні інструменти коротацийних балкових сплайнів для розв'язку поставленої задачі

1.1. Короткий огляд та особливості КБС

Для обробки первинних даних застосовуємо КБС, який неодноразово був описаний у попередніх публікаціях [1, 37, 38, 39, 40]. У цьому розділі коротко розглянемо основні моменти й особливості цього методу.

Як вхідні дані для методу КБС використовуємо неточний набір точок, на основі якого має бути описаний контур вимірюваної фігури. Ці точки будемо позначати як B_i , а розрахункові точки, що лежать на апроксимованому контурі — A_i (рис. 1).

Для побудови початкового контуру з'єднаємо послідовно точки A_i , і в результаті отримаємо напрямлені вектори \vec{l}_i , кожний з яких визначають як вектор $A_i A_{i+1}$. Для кожної ділянки визначають локальну систему координат (t_i, n_i) , пов'язану з точкою A_i як початком i -го відрізка, та відповідні базові вектори — дотичний вектор \vec{t}_i й нормальний вектор \vec{n}_i .

Також важливу роль у побудові згладженого контуру відіграє узгодження кутів між двома сусідніми прямими відрізками, тобто між напрямками \vec{t}_i та \vec{t}_{i+1} . Назвемо ці кути кутами розбіжно-

сті ψ_i , де $-\pi < \psi_i \leq \pi$ (рис. 1). Додатний напрямку кута збігається з рухом годинникової стрілки, його розраховують за формулами скалярного добутку векторів, які потрібні для визначення квадранта, в якому міститься кут ψ_i :

$$\cos(\psi_i) = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i+1}, \quad (1a)$$

$$\sin(\psi_i) = \vec{n}_i \cdot \vec{t}_{i+1}. \quad (1b)$$

Кожний відрізок розглядають як дискретну балку на пружних опорах [1], кожна точка t якої є локальною початковою координатою довжини, яку відраховують від точки початку ділянки. Її описують вектором стану $\vec{Y}(t)$, що характеризується чотирма параметрами:

$$\vec{Y}(t) = \{W(t); \theta(t); M(t); Q(t)\}^T, \quad (1в)$$

де $W(t)$ – переміщення; $\theta(t)$ – деформаційний кут повороту; $M(t)$ – згинальний момент, $Q(t)$ – поперечна сила.

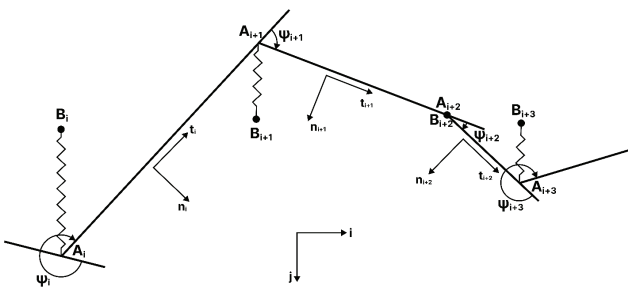


Рис. 1. Модель дискретних балок на пружних опорах

Для кожного відрізка існують алгебраїчні рівняння зв'язку, що описують залежність значення \vec{Y}_i в точці t від значення $\vec{Y}(0)$ у початковій точці відрізка, тобто

$$\vec{Y}(t) = [A(t); \vec{Y}(0)], \quad (1г)$$

де $[A(t)]$ – відома матриця [1]. Введемо поняття невідомих векторів стану на початку і в кінці кожної ділянки i , \vec{Y}_0^i та \vec{Y}_e^i , відповідно, де останній пов'язаний з першим, як слідує з (1г), таким чином:

$$\vec{Y}_e^i = [A(t=l_i)] \vec{Y}_0^i. \quad (1д)$$

Окрім рівнянь зв'язку (1д), у формуванні системи визначальних рівнянь беруть участь рівняння спряження, що дають зв'язок кінця попередньої ділянки з початком наступної. Ці рівняння мають такий вигляд:

$$W_0^{i+1} = W_e^i, \quad (2a)$$

$$\theta_e^{i+1} = \theta_e^i - \psi_i, \quad (2б)$$

$$M_0^{i+1} = M_e^i, \quad (2в)$$

$$Q_0^{i+1} = Q_e^i - \frac{L_i}{h^4} (W_e^i - W_i), \quad (2г)$$

де h – параметр згладжування, що має розмірність довжини; чим більший цей параметр, тим сильніше згладжується контур. Величина L_i – це довжина, на якій діє ця опора, тобто сума половинок відстані до правої опори й відстані до лівої опори [1, 37].

Окремої уваги заслуговує поняття P_i – відстань між опорою (точкою B_i) і найближчою точкою контуру A_i . Пошук P_i й пов'язана з ним перенумерація точок A_i , і, відповідно, B_i на кожній ітерації є важливою складовою методу. Цю процедуру запропоновано в роботі [1], і в цій статті також буде деталізовуватися і застосовуватися.

1.2. Концепція кутової даммі-точки

Для розв'язання задачі визначення кутової точки і мінімізації її впливу на гладкість контуру введемо особливу точку, а саме кутову даммі-точку. В попередніх роботах ми вводили поняття (звичайної) даммі-точки й форсованої даммі-точки [37, 40]. Даммі-точка – це точка, що не пов'язана з реальними точками замірів, її вводять для забезпечення малості розрахункових кутів θ , що приводить до гладкої зміни кривизни. Положення даммі-точок не впливає на вигляд розрахункового контуру, має значення лише їх достатня кількість.

Тут введемо особливу – кутову – даммі-точку, яка і слугуватиме для ідентифікації як розміщення точок перегину кутів, так і величини стрибка кута (дотичної) в ній. Математична відмінність кутової даммі-точки від інших точок полягає в рівняннях спряження і в наступному розміщенні розрахованих значень $W(t)$ в її околі:

$$M_e^i = 0. \quad (3)$$

Рівняння спряження відрізняються від усіх інших точок тим, що рівняння неперервності дотичних не враховуємо. Замість нього введемо рівняння рівності моменту (кривизни) нулю (3а) у кутовій точці. Пояснимо логіку цієї умови. Поворотів (змін напрямку) на всіх інших ділянках (що не містять кутових точок) наближено досягають за рахунок добутку кривизни на довжину ділянки. Якщо не обмежити моменти, то виникне невизначеність у способі зміни кута. Окрім того, у цій точці немає приросту сили, тобто сили в кінці попередньої ділянки і на початку наступної збігаються (див. рівняння (2г)).

Інша особливість реалізації кутової точки полягає у способі відкладання переміщень $W(t)$ розрахункових точок в околі кутової точки (відрізків, що містять її). Нагадаємо, що однією з особливостей нашого КБС є власне відкладення переміщень $W(t)$ розрахункових точок в околі кутової точки (відрізків, що містять її). Нагадаємо, що однією з особливостей нашого КБС є, власне, відкладання переміщень $W(t)$ по скоректованій нормалі, що забезпечує неперервність функції переміщення і дотичних. Тут задача набагато складніша. Розглянемо ділянку між точками A_i та A_{i+1} , між якими розміщено кутову точку K (рис. 2). Отримуємо дві ділянки замість однієї. Кут між $\vec{A}_i K$ та $K \vec{A}_{i+1}$ позначимо як ψ_k .

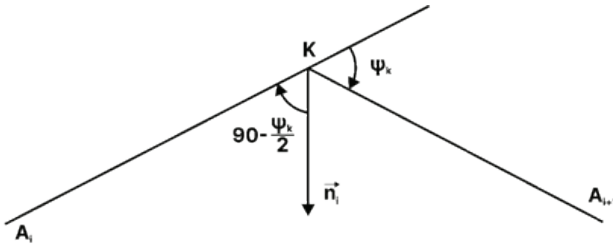


Рис 2. Напрямок нормалі в кутовій точці при нульових значеннях кутів деформування

Щоб обґрунтувати спосіб відкладення $W(t)$, що гарантує гладкість і нерозривність контуру в околі точки K , спочатку розглянемо випадок, коли розрахункові кути в кінці першої ділянки $[\vec{A}_i K]$ і на початку другої ділянки $[K \vec{A}_{i+1}]$ дорівнюють нулю. Тоді для того, щоб уточнені нормальні вектори (за якими відкладають W) збігалися в точці K , треба в цій точці початковий вектор до першої ділянки повернути на кут $\psi_k/2$, а початковий вектор до другої ділянки – на кут $-\psi_k/2$. Очевидно, що напрямок уточненої нормалі уздовж двох прилеглих ділянок не може бути розривним, тому його треба плавно продовжити в обидва кінці до точок A_i та A_{i+1} . Це відбувається за допомогою лінійної апроксимації кутових поправок.

Розрахункові кути деформації на обох ділянках зазвичай не є нульовими. Позначимо їх як $\theta_{i,k}(t)$ та $\theta_{k,i+1}(t)$ для першої і другої ділянок відповідно. Зокрема, в кінці першої ділянки і на початку другої, тобто в точці K , вони такі: $\theta_e^{i,k} = \theta_{i,k}(l_{i,k})$ та $\theta_0^{k,i+1} = \theta_{k,i+1}(0)$ відповідно. Тоді додатково будемо вважати, що в точці K уточнена нормаль має бути повернутою на кут $\Delta\omega_{i,k}(t)$, де

$$\Delta\omega_k(t) = (\theta_0^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})/2. \quad (4a)$$

Тоді повне значення уточнювального кута в точці K буде таким:

$$\omega_e^{i,k} = \frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2} \quad (4б)$$

як кінця відрізка $[\vec{A}_i K]$, та

$$\omega_0^{k,i+1} = -\frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2} \quad (4в)$$

як початку другої ділянки $[K \vec{A}_{i+1}]$.

Тепер залишилося навести вираз для додаткового кута повороту нормалі для кожної із двох ділянок, які б забезпечили прийнятну гладкість сплайна на двох ділянках. Пропонуємо такі вирази:

$$\Delta\omega_{i,k}(t) = \theta_0^{i,k} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \omega_e^{i,k} \frac{t}{l_{i,k}} \quad (5a)$$

для першої ділянки й

$$\Delta\omega_{k,i+1}(t) = \omega_0^{k,i+1} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \theta_e^{k,i+1} \frac{t}{l_{i,k}} \quad (5б)$$

для другої ділянки. Новий напрямок нормалі запишемо такими формулами:

$$n\vec{\theta}_{i,k}(t) = n_{i,k} \cos(\Delta\omega_{i,k}(t)) - t_{i,k} \sin(\Delta\omega_{i,k}(t)) \quad (6a)$$

для першої ділянки, а також:

$$n\vec{\theta}_{k,i+1}(t) = n_{k,i+1} \cos(\Delta\omega_{k,i+1}(t)) - t_{k,i+1} \sin(\Delta\omega_{k,i+1}(t)) \quad (6б)$$

для другої ділянки.

Далі, як і в роботі [1], розглянемо проблему пазлів з наголосом на кутові точки. Знову розглянемо згладжування контуру та отримання кривизни як найбільш характерного параметра ідентифікації.

2. Послідовність визначення кутових точок на пазлі

2.1. Метод побудови наближеного контуру та визначення кандидатів кутових точок

Ідентифікацію починаємо з побудови наближеного контуру. Є набір початкових точок вимірювання, їх кількість для кожного елемента пазла близька до 2300 [1]. Використаємо функцію `findContours` з бібліотеки `OpenCV` для виділення контуру із зображення. Ці точки є більш-менш упорядкованими, але все одно після отримання

послідовності (нумерації) точок контуру вони в певному околі є перемішаними, містять артефакти, тобто існує певна нечіткість щодо порядку їх розміщення. Тому спочатку вибираємо кожну 20-ту точку (точки B_i на рис. 3). На цій першій ітерації вважатимемо, що $A_i = B_i$, тобто початкові $P_i = 0$. Проведемо розрахунок й отримаємо нові положення точок A'_i , а далі застосуємо процедуру розрахунку проміжних точок для побудови повного контуру (рис. 3). Цей контур дає нам початкове наближення, з якого починається більш детальна процедура уточнення контуру.

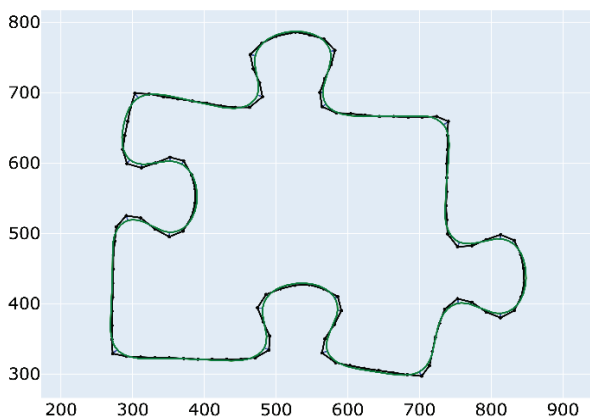


Рис. 3. Кожна 20-та точка вхідного контуру (чорні точки) і початкове наближення для згладженої фігури, утворене за допомогою кожної 20-ї точки вимірювань за $h = 20$

Важливим етапом є знаходження проєкцій усіх точок B_i на отриманий контур. Ці про-

екції є точками локальних мінімумів відстані до контуру. Їх шукають в локальному околі, прив'язаному до розрахункових положень точок A_i як розрахункових відповідників точок B_i . Після знаходження проєкції усіх точок B_i на контур (назвемо ці точки A''), ми (пере)нумеруємо усі точки A'' відповідно до послідовності розміщення їх на контурі (якщо рух відбувається за годинниковою стрілкою). Після цього ми перенумеруємо усі точки B відповідно до нумерації їх відповідників A . Це робимо для того, щоб уникнути петель у вхідних даних під час наступної ітерації. Отримуємо перенумерований набір B_i і їх відповідники A_i .

Проведемо ще декілька ітерацій за цього самого значення $h = 20$, але враховуючи уже всі перенумеровані точки B_i та A_i . Проведення додаткових ітерацій потрібне для стабілізації контуру; експериментальним шляхом було виявлено, що трьох додаткових ітерацій достатньо, щоб контур стабілізувався. Результати розрахунку всього контуру показано на рис. 4, а, і на ньому, на відміну від зображення на рис. 3, враховано усі задані точки B , а не лише кожну 20-ту точку.

Графік кривизни для всього контуру зображено на рис. 5. Очевидно, що за такого згладжування ми не можемо явним чином визначити кутові точки, адже величини екстремальної кривизни є близькими для всіх 20 особливих ділянок, але ми можемо стверджувати, що кутові точки є серед цих 20 особливих точок (рис. 5). Це пояснюється тим, що масштаб згладжування $h = 20$ є співмірним з радіусами заокруглень,

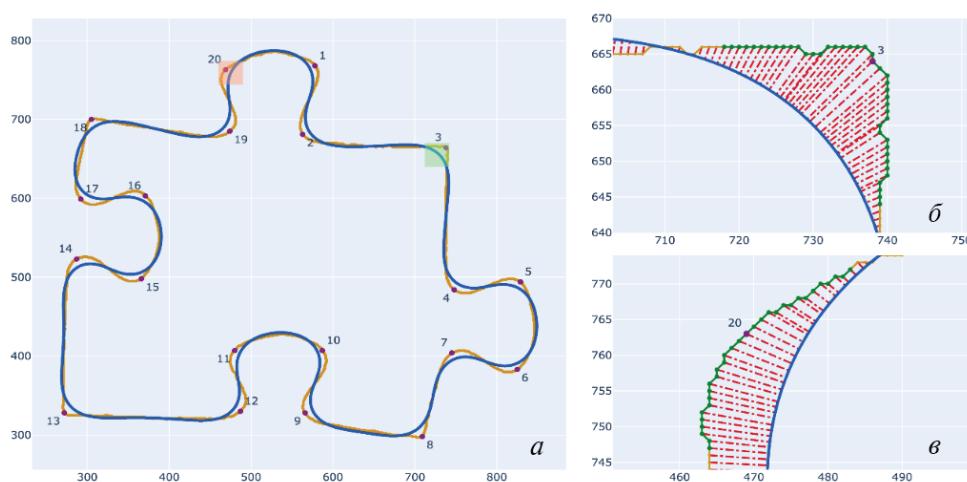


Рис. 4. Згладжений контур пазла за $h = 20$: а – повний контур; б – локальні точки B та їх відповідники A в околі особливої точки 3 на рис. 4, а; в – точки B та A для іншої ділянки в околі кутової точки 20

а кут кутової точки $\sim 90^\circ$ є близьким до кутів повороту на гладких ділянках.

Спробуємо знайти додаткові аргументи того, чи справді розглянута зона є кутовою (містить кут). На відміну від нашої роботи [1], де було проаналізовано енергію деформації як характеристику добротності (fairness) контуру, тут ми введемо поняття «роботи» як локальної міри відхилення точок згладженого контуру від вимірених точок. У механіці поняття «робота» – це добуток сили на переміщення в точці її прикладання. В усталеній геометрії (застосовують незмінне h для двох чи трьох ітерацій уточнення контуру) положення точок A уже не змінюються (розрахункові $W_i \rightarrow 0$), тому переміщення пружини – це Π_i . Тоді сила в опорі дорівнює $D_i \Pi_i$, а робота у точці R_i є такою:

$$R_i = D_i \Pi_i^2. \quad (7a)$$

Оскільки довжина ділянки згладжування (бендвідс) геометричних особливостей для конкретного h становить приблизно $\pm h3/4$, то доцільно обраховувати інтегральну роботу на такій ділянці в околі особливої точки N так:

$$R_{int}(\bar{N}, h) = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} D_i^2 = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} \frac{L_i}{h4_i}^2. \quad (76)$$

Результати розрахунку інтегральної роботи R_{int} наведено у табл. 1. Очевидно, що ці дані не можуть слугувати для визначення ймовірного знаходження кутових точок. Це тому, що реальні довжини зон заокруглень контуру зівставні з вибраною величиною бендвідса h .

Таблиця 1. Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00743	0,00949	0,01136	0,01016	0,00868
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00769	0,00956	0,00918	0,01272	0,00684
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00860	0,01108	0,00985	0,01310	0,00859
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00854	0,01185	0,00851	0,01176	0,00874

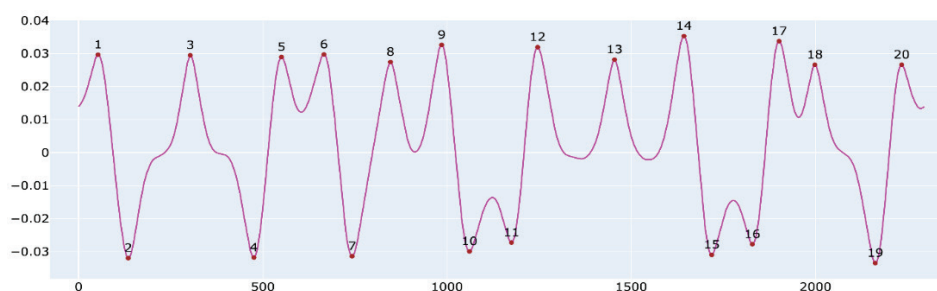


Рис. 5. Графік згладження кривизни контуру пазла за $h = 20$

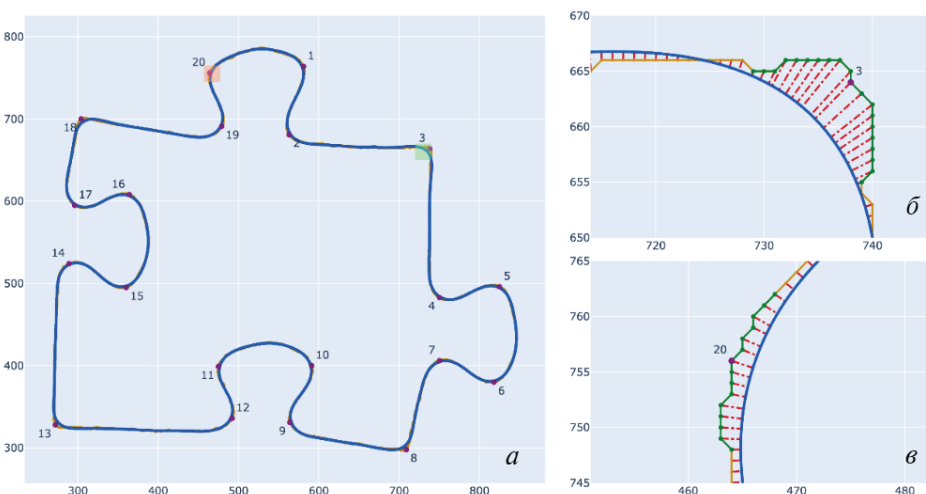
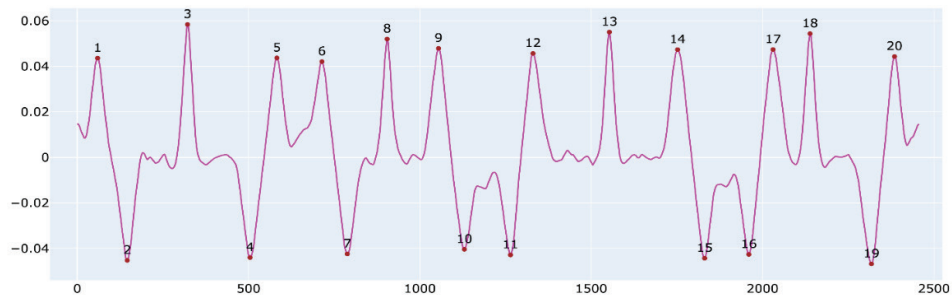


Рис. 6. Згладжений контур пазла за $h = 10$: а – повний контур; б – точки В й точки А в околі кутової точки 3; в – точки В та А в околі поворотної точки 20

Рис. 7. Розрахункова кривизна контуру за $h = 10$

Також розрахуємо контур за $h = 10$, що є нашим робочим значенням згладжування [1]. Таке значення h було обрано для побудови контуру, тому що достатньою мірою згладжується шум і залишається корисна інформація (рис. 6).

Графік кривизни зображено на рис. 7. За такого значення h за графіком кривизни все ще неможливо визначити кутові точки.

Результати розрахунку роботи за $h = 10$ наведено у табл. 2. Тут різниці в роботі є уже дуже помітними і демонструють доцільність застосування такого критерію порівняння для ідентифікації кутів.

Якщо порівняти значення роботи за $h = 20$ та $h = 10$ можна помітити, що значення роботи для точок 3, 8, 13, 18 значно (приблизно у 8–10 разів і більше) перевищують значення роботи в усіх інших (повортних) точках. Із цього ми можемо зробити припущення, що 3, 8, 13, 18 – це кутові точки. Втім, остаточне рішення дик-

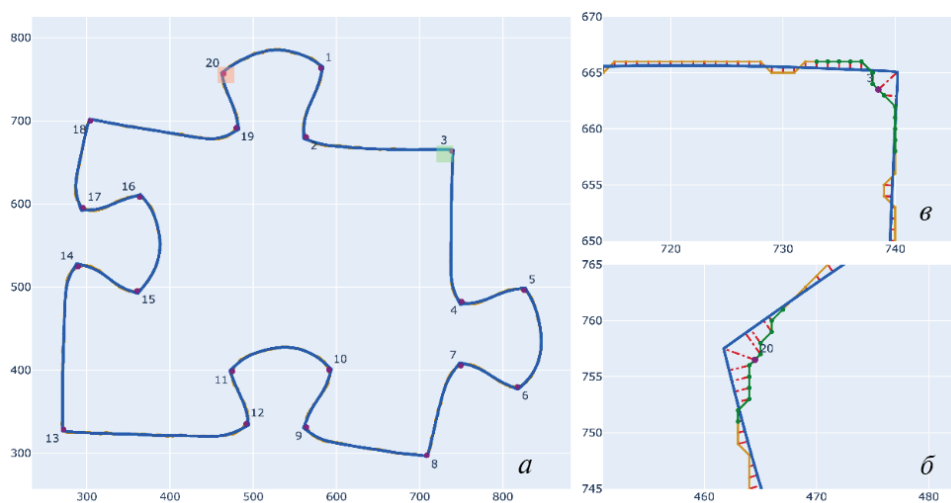
тується ефективністю застосування кутової даммі-точки.

Таблиця 2. Інтегральна робота в зонах точок інтересу за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00 284	0,00 260	0,02 016	0,00 154	0,00 288
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00 211	0,00 168	0,01 612	0,00 308	0,00 162
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00 289	0,00 239	0,01 658	0,00 146	0,00 253
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00 274	0,00 182	0,01 452	0,00 224	0,00 435

2.2. Метод визначення кутових точок

Після визначення 20 точок-кандидатів потрібно дослідити ефект від розміщення в пев-

Рис. 8. Згладжений контур пазла за $h = 10$ з додаванням кутових даммі-точок: а – повний контур; б – точки B та точки A в околі кутової точки 3; в – точки B та A в околі поворотної точки 20

ному місці кутової точки, що дозволяє поворот контуру на певний кут. Математику такого розміщення описано нами у п. 1.2. Тут ми розглянемо конкретні приклади.

Виберемо як характерний параметр згладжування h величину $h = 10$, яка з одного боку є достатньою для видалення всіх артефактів вимірювання, а з другого забезпечує збереження корисної інформації, як ми це продемонстрували для задачі зіставлення кривих [1]. У точці контуру з екстремальною локальною кривизною додамо кутову даммі-точку, що дасть алгоритму можливість самостійно визначити кут, який виникає в цій точці за значення $h = 10$.

Проведемо чотири ітерації після додавання куткових точок, що дозволить контуру стабілізуватися.

Проаналізувавши значення в табл. 3 ми можемо визначити точки, для яких значення роботи є меншим, ніж для інших, ці точки (3, 8, 13, 18) збігаються з виділеними як точки-кандидати в попередньому розділі статті.

Таблиця 3. Інтегральна робота в зонах точок інтересу за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00331	0,00449	0,00101	0,00566	0,00391
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00391	0,00497	0,00056	0,00434	0,00447
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00366	0,00486	0,00203	0,00693	0,00364
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00333	0,00600	0,00121	0,00512	0,00306

Тепер порівняємо значення роботи для точок з табл. 2 та 3. Для точок 3, 8, 13, 18 значення роботи покращилось щонайменше у 8 разів, а для всіх інших, окрім 20, погіршилось.

Для точки 20 значення покращилось в 1,4 разу, що є неспівмірним з іншими покращеннями. Таким чином, ми математично продемонстрували, що точки 3, 8, 13 та 18 є кутовими точками. Для наочної демонстрації знайдемо відношення цих характеристик роботи (тобто до (R_{mit}) і після (R_{with}) додавання кутової даммі-точки) й наведемо їх у табл. 4.

Перебудуємо сплайн і порахуємо графік кривизни для всього контуру (рис. 9), де відповідно до умови (3) значення кривизни дорівнює нулю. Зазначимо таке. У цій статті, на відміну від роботи [1], ми вважаємо весь контур неперервним з усіма кутковими точками. У роботі [1] кутові точки спочатку окремо виділялися за іншою процедурою, також виділялися чотири незалежні криві, для яких застосовували граничні умови. В околі куткових точок ці два підходи дають трохи відмінні значення кривизни, втім, різниця є дуже малою.

Таблиця 4. Відношення інтегральних робіт $\alpha = R_{mit}/R_{with}$ в особливих точках до і після додавання кутової даммі-точки за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
α	0,85829	0,57850	19,96437	0,27195	0,73571
N	6	7	8	9	10
α	0,53970	0,33808	28,78635	0,70887	0,36235
N	11	12	13	14	15
α	0,79065	0,49221	8,18476	0,21056	0,69459
N	16	17	18	19	20
α	0,82361	0,30340	11,99889	0,43766	1,42378

Дослідимо: ці отримані результати для відношень робіт α не є випадковими хорошими значеннями для $h = 10$, а справжні значення α характеризують реальні кутові точки в певному діапазоні значень h . На рис. 10 показано значення α для всіх 20 точок за трьох

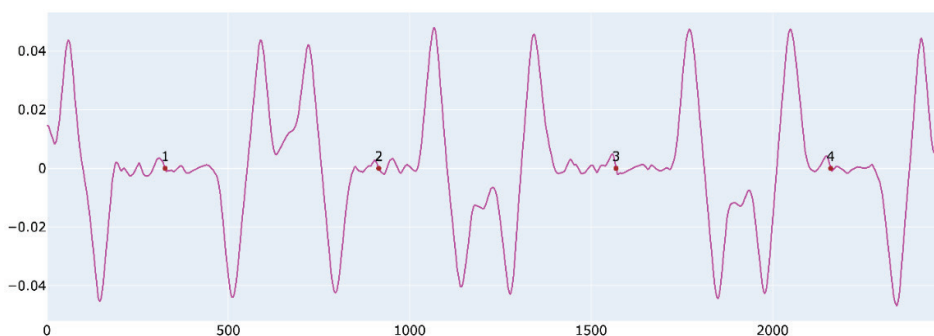


Рис. 9. Розрахункова кривизна контуру за $h = 10$ з кутовими точками

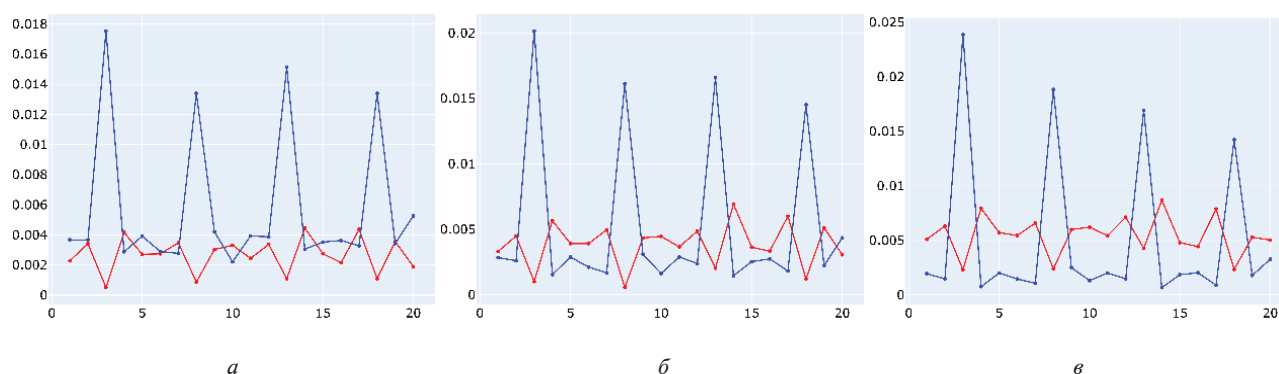


Рис. 10. Відношення α інтегральних робіт до i після вставляння кутової точки в особливих зонах під час роботи з кутовими точками (червона) та без (синя) за різних h : a – згладжування за $h = 8$; b – за $h = 10$; c – за $h = 12$

різних значень h , а саме 8, 10 та 12. Як бачимо, загальна тенденція така, що розміщення кутової даммі-точки значно покращує відношення в точках реальних кутів (від 10 до 30 разів), тоді як для поворотних ділянок це значення майже завжди погіршується (до 2-3 разів) або дуже незначно покращується (на 20 чи 30 %). Усе це свідчить про високу ефективність запропонованого критерію виділення реальної кутової точки.

Висновки

Ця робота стосується обробки чорно-білих зображень і суттєво доповнює арсенал можливостей коротаційних балкових сплайнів для розв'язання інтерполяційних і апроксимаційних задач геометричного моделювання кривих. В задачах апроксимації КБС мають дві беззаперечні переваги порівняно з іншими техніками згладжування, які ґрунтуються на параметричному поданні кривих: 1) збереження масштабу малюнка за різних параметрів (бендвідс) згладжування; 2) залежність розрахованого КБС контуру від середньої похибки вимірювання чи, власне, від амплітуди і довжини реальних особливостей контуру, а не від густини точок вимірювання; тобто в КБС автоматично реалізується адаптивне згладжування.

Основним досягненням роботи є розробка методу визначення кутових точок на зображеннях і введення в техніку КБС поняття кутової даммі-точки, яка передбачає розрив напрямку дотичної в цій точці. Для цієї точки застосовують особливі умови спряження, що передбачають нульове значення кривизни в ній, а також змінений напрямок нормалі, по якій відкладають розраховане переміщення. Метод передба-

чає три стадії реалізації:

1. На основі розуміння можливої похибки вимірювання і масштабу артефактів, а також масштабу корисної інформації (радіуси і довжини заокруглень) встановлюють оптимальний бендвідс, що в КБС є параметром згладжування h , і який має бути обов'язково більшим за похибку i , по можливості, меншим від корисної інформації. Запропоновано поняття локальної інтегральної роботи, яку вважають сумою робіт у кожній точці вимірювання, що лежить у межах довжини бендвідс від точки інтересу. Робота в кожній точці пропорційна силі в цій точці, помноженій на відстань до контуру, тобто пропорційна квадрату відстані до контуру і довжині ділянки, яку «представляє» ця точка. Значення роботи в околі реального кута звичайно є значно більшим, ніж інших в точках гладкого повороту.

2. Розроблено алгоритм знаходження кандидатів у кутові точки за допомогою графіка кривизни та уточнення можливого положення кутових точок за допомогою роботи. Введено поняття кутової даммі-точки та умов спряження в ній. Розроблено додаткову процедуру уточнення напрямку відкладання розрахункового переміщення на двох відрізках (між проєкціями на контур реальних точок вимірювання), яка забезпечує гладкість контуру по обидва боки від кутової точки. Це дає можливість знайти кут повороту і перерахувати контур. Окрім того, кутова даммі-точка значно зменшує значення інтегральної роботи і робить її меншою, ніж на ділянках гладкого повороту.

3. Заключною стадією роботи є метод ідентифікації кутової точки на основі аналізу декількох можливих місць її локації на ділянках великої кривизни. Введено поняття локальної роботи, що залежить від суми квадратів відста-

ней від вимірних точок до найближчих точок згладженого контуру, помножених на вагу кожної точки. Знайдено відношення роботи до і після введення кутової даммі-точки. Для реальних кутових точок це відношення є дуже великим (від 8 до 30 разів), а для ділянок швидкого пово-

роту (великої кривизни) це відношення, навпаки, погіршується або залишається приблизно рівним одиниці. Таким чином, відношення роботи є ефективним критерієм наявності реального кута на зображенні.

References

- [1] Д.Р. Кольцов, І.В. Ориняк, “Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротацийного балкового сплайна”, *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2025, № 2, С. 5–32. Режим доступу: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2025.2.01>
- [2] B. Magnier and K. Hayat, “Revisiting mehrotra and nichani’s corner detection method for improvement with truncated anisotropic gaussian filtering”, *Sensors*, 2023, No. 23 (20), pp. 8653. Available: <https://doi.org/10.3390/s23208653>
- [3] A. Andreopoulos and J.K. Tsotsos, “50 years of object recognition: Directions forward”, *Computer vision and image understanding*, 2013, No. 117 (8), pp. 827–891. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2013.04.005>
- [4] F. Mokhtarian and F. Mohanna, “Performance evaluation of corner detectors using consistency and accuracy measures”, *Computer Vision and Image Understanding*, 2006, No. 102 (1), pp. 81–94. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2005.11.001>
- [5] V. Rodehorst and A. Koschan, “Comparison and evaluation of feature point detectors”, *In 5th international symposium Turkish-German joint geodetic days*, Berlin, Germany, 29–31 March 2006.
- [6] J. Jing *et al.*, “ECFRNet: Effective corner feature representations network for image corner detection”, *Expert Systems with Applications*, 2023, No. 211, pp. 118673. Available: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118673>
- [7] W. Song *et al.*, “Building corner detection in aerial images with fully convolutional networks”, *Sensors*, 2019, No. 19 (8), pp. 1915. Available: <https://doi.org/10.3390/s19081915>
- [8] M. Bansal and K. Daniilidis, “Geometric urban geo-localization”, *In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, pp. 3978–3985. Available: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.508>
- [9] Y. Zheng *et al.*, “Reunion helper: an edge matcher for sibling fragment identification of the Dunhuang manuscript”, *Heritage Science*, 2024, No. 12 (1). Available: <https://doi.org/10.1186/s40494-024-01150-3>
- [10] H. Zhang *et al.*, “A novel tracking method based on improved FAST corner detection and pyramid LK optical flow”. *In 2020 Chinese control and decision conference (CCDC)*, 2020, August, pp. 1871–1876. Available: <https://doi.org/10.1109/CCDC49329.2020.9164332>
- [11] Y. Zhang, “A new algorithm for accurate and automatic chessboard corner detection”, *In 2017 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2017, May, pp. 1–4. Available: <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2017.8050637>
- [12] T. Kerstein *et al.*, “Accurate X-corner Fiducial Marker Localization in Image Guided Surgery”. *In Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods*, Angers, France, 6–8 March 2014, pp. 471–478. Available: <https://doi.org/10.5220/0004751904710478>
- [13] Y. Xia *et al.*, “A multi-sensor fusion framework with tight coupling for precise positioning and optimization”, *Signal Processing*, 2024, No. 217, pp. 109343. Available: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109343>
- [14] Y. Tang *et al.*, “Novel visual crack width measurement based on backbone double-scale features for improved detection automation”, *Engineering Structures*, 2023, No. 274, pp. 115158. Available: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115158>
- [15] A. Benam *et al.*, “A CBIR system for locating and retrieving pigment network in dermoscopy images using dermoscopy interest point detection”, *In 2017 IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging*, 2017, April, pp. 122–125. Available: <https://doi.org/10.1109/ISBI.2017.7950483>
- [16] R. Yazdi *et al.*, “Robust Corner Detection Using Local Extrema Differences”, *International Journal of Web Research*, 2024, No. 7 (1), pp. 69–84. Available: <https://doi.org/10.22133/ijwr.2024.458246.1217>
- [17] E. Rosten *et al.*, “Faster and better: A machine learning approach to corner detection”, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2010, No. 32 (1), pp. 105–119. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.275>
- [18] C. Gao *et al.*, “Robust template based corner detection algorithms for robotic vision”, *In 2015 IEEE International Conference on Technologies for Practical Robot Applications*, 2015, May, pp. 1–6. Available: <https://doi.org/10.1109/TePRA.2015.7219683>
- [19] H.P. Morevec, “Towards automatic visual obstacle avoidance”, *In Proceedings of the 5th international joint conference on Artificial intelligence*, 1977, August, Vol. 2, pp. 584–584.
- [20] J. Wang and W. Zhang, “A survey of corner detection methods”, *In 2018 2nd International Conference on Electrical Engineering and Automation, ICEEA 2018*, 2018, March, pp. 214–219. Atlantis Press. Available: <https://doi.org/10.2991/iceea-18.2018.47>

- [21] C. Harris and M. Stephens, "A combined corner and edge detector", *In Alvey vision conference*, 1988, August, Vol. 15, No. 50, pp. 10–5244. Available: <https://doi.org/10.5244/C.2.23>
- [22] M. Wang *et al.*, "Efficient corner detection based on corner enhancement filters", *Digital Signal Processing*, 2022, No. 122, pp. 103364. Available: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103364>
- [23] X. Sun and B. Zhong, "A rotation-invariant corner detector based on the median of subpixelized triangle", *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 2023, No. 35 (8), pp. 101645. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2023.101645>
- [24] J. Canny, "A Computational Approach to Edge Detection", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, No. 8 (6), pp. 679–698 Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851>
- [25] S. Zhang *et al.*, "Robust corner finding based on multi-scale k-cosine angle detection", *IEEE Access*, 2020, No. 8, pp. 66741–66748. Available: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2984566>
- [26] J.H. Han and T. Poston, "Chord-to-point distance accumulation and planar curvature: a new approach to discrete curvature", *Pattern Recognition Letters*, 2001, No. 22 (10), pp. 1133–1144. Available: [https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(01\)00063-0](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(01)00063-0)
- [27] M. Awrangjeb and G. Lu, "Robust image corner detection based on the chord-to-point distance accumulation technique", *IEEE transactions on multimedia*, 2008, No. 10 (6), pp. 1059–1072. Available: <https://doi.org/10.1109/TMM.2008.2001384>
- [28] X. Chen He and N.H. Yung, "Corner detector based on global and local curvature properties", *Optical engineering*, 2008, No. 47 (5), 057008-057008-12. Available: <https://doi.org/10.1117/1.2931681>
- [29] A. Rattarangsi and R.T. Chin, "Scale-Based Detection of Corners of Planar Curves", *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 1992, No. 14 (04), pp. 430–449. Available: <https://doi.org/10.1109/34.126805>
- [30] B. Zhong *et al.*, "Scale-space behavior of planar-curve corners", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, No. 31 (8), pp. 1517–1524. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.295>
- [31] F. Mokhtarian and A.K. Mackworth, "Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes", *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1986, No. 1, pp. 34–43. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767750>
- [32] F. Mokhtarian and A.K. Mackworth, "A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves", *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1992, No. 14 (8), pp. 789–805. Available: <https://doi.org/10.1109/34.149591>
- [33] S. Ohrhallinger and M. Wimmer, "Stretchdenoise: Parametric curve reconstruction with guarantees by separating connectivity from residual uncertainty of samples", 2018. arXiv preprint arXiv:1808.07778. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.07778>
- [34] R.L. Eubank, "Nonparametric regression and splines smoothing", *CRC press*, 1999. Available: <https://doi.org/10.1201/9781482273144>
- [35] E. Bertolazzi *et al.*, "Point data reconstruction and smoothing using cubic splines and clusterization", *Mathematics and Computers in Simulation*, 2020, No. 176, pp. 36–56. Available: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.04.002>
- [36] E.T. Lee, "Choosing nodes in parametric curve interpolation", *Computer-Aided Design*, 1989, No. 21 (6), pp. 363–370. Available: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(89\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0010-4485(89)90003-1)
- [37] I. Orynyak *et al.*, "Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points", *System Research and Information Technologies*, 2022, No. 4, pp. 119–140. Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10>
- [38] I. Orynyak *et al.*, "Fairness of 2D corotational beam spline as compared with Geometrically nonlinear elastic beam", *System Research and Information Technologies*, 2024, No. 3, pp. 119–140 Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2024.3.07>
- [39] I. Orynyak *et al.*, "Controllable Curvature Smoothing of the Pipeline Positions by 2D Corotational Beam Spline", *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 2025, No. 16 (3), pp. 04025047. Available: <https://doi.org/10.1061/JPSEA2.PSENG-1739>
- [40] I. Orynyak *et al.*, "Efficient construction of clothoidal splines using corotational beam splines", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2026, pp. 117318. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.117318>
- [41] J.H. Ahlberg *et al.*, "The theory of splines and their applications", New York: Academic Press, 1967.
- [42] R. Levien and C.H. Sequin, "Interpolating splines: Which is the fairest of them all?" *Computer-Aided Design and Applications*, 2009, No. 6 (1), pp. 91–102. Available: <https://doi.org/10.3722/cadaps.2009.91-102>

I.V. Orynyak, D.R. Koltsov, D.Y. Tavrov

A METHOD FOR DETECTING CORNER POINTS IN IMAGES USING A COROTATIONAL BEAM SPLINE

Background. The detection of corner points in images is of great importance for object identification and has numerous applications in computer vision and pattern recognition. Typically, this task is performed using geometric analysis of black-and-white contours, to which

Gaussian smoothing is subsequently applied in order to identify points of maximum curvature. Functional minimisation is then applied to these regions to determine the angle magnitude between adjacent contour segments. A drawback of this approach lies in the difficulty of accounting for artifacts, as well as in the fact that increased smoothing leads to a reduction in the effective scale (size) of the image.

Objective. The paper aims to develop a method for detecting corner points in a digitised grayscale image using the corotational beam spline (CBS) method.

Methods. Application of the CBS method using the proposed corner dummy points, for which the angular continuity condition is not satisfied; instead, zero curvature is postulated, resulting in a discontinuity (jump) in the tangent direction at that point.

Results. The CBS method is applied to smooth the contour of a black-and-white image according to the length of a contour segment rather than the number of points on that segment, thereby preserving the overall image scale. Special corner dummy points are proposed that allow for a loss of angular continuity. Candidates for corner points are identified based on the local extrema of the curvature graph. For each point, the work is defined as the square of the distance between the point and its corresponding location on the contour, multiplied by the length of the segment associated with that point. The concept of integral work is introduced as the sum of individual works within the region of maximum curvature. A criterion for the existence of a corner point is developed based on the analysis of the ratio of individual works obtained in the absence and in the presence of a corner dummy point.

Conclusions. The application of adaptive smoothing according to the distance between points on the contour, which are projections (correspondences) of the measured points, enables the method to be applied to datasets with varying point densities, thereby improving the quality of the reconstructed contour. The use of corner dummy points that allow for a loss of angular continuity makes it possible to more accurately reproduce the target contour, in particular, sharp angle changes. Furthermore, the use of the ratio of individual works obtained in the absence and in the presence of a dummy point serves as a reliable criterion for corner point detection. The ratio of work values demonstrates an improvement by a factor of 8–30 for corner points, whereas for curved regions, this value deteriorates or remains nearly unchanged.

Keywords: corotational beam spline; geometric modeling; differential equations; local integral work; corner points; corner identification; nonparametric smoothing.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
12 грудня 2025 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

UDC: 519.6:519.8:536.7

В.С. Волошин^{1*}, <https://orcid.org/0009-0005-6809-6779>

І.А. Ткаленко², <https://orcid.org/0000-0002-5799-6473>

¹ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»,
Дніпро, Україна, <https://ror.org/00e7n9517>

²Компанія AMCOM Engineering s., r., o., Prague, Czech Republic

*Corresponding autor: vsvlshn52@gmail.com

МЕТОД АНАЛІЗУ ПОЛІКОМПОНЕНТНИХ СКЛАДНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ БАГАТОВИМІРНИХ МАТРИЦЬ СУМІЖНОСТІ ТА ЕНТРОПІЙНИХ ВІДНОШЕНЬ МІЖ КОМПОНЕНТАМИ СИСТЕМИ

Проблематика. Відомі методи аналізу полікомпонентних складних систем не завжди ефективно враховують відносну несумісність властивостей системи з конфігураційним, термодинамічним та іншим змістом системи. Невирішеною залишається задача системного аналізу полікомпонентних динамічних складних систем з позиції їх енергетичного і термодинамічного вмісту.

Мета дослідження. Розробити метод аналізу полікомпонентних складних систем за їх функціональними, структурними, фізико-хімічними та іншими властивостями на основі термодинамічних та інформаційних характеристик такої системи.

Методика реалізації. Запропоновано метод аналізу складних динамічних, нелінійних та енерговмісних адаптивних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно індукованих під конкретну систему матриць суміжності.

Результати дослідження. Запропоновано метод аналізу складних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно структурованих під конкретну систему матриць суміжності, змістовна частина яких відповідає опису складної полікомпонентної системи завдяки показникам інтегральної ентропії. Першою суттєвою особливістю моделі, що розроблена на основі методу, є розділення інтегральної ентропії системи на окремі складові у вигляді конфігураційної, структурної, фізико-хімічної, інформаційної та інших видів ентропії відповідно до властивостей системи. Друга суттєва відмінність моделі пов'язана з її багатоплановою природою у межах матриці суміжності. Така модель, на відміну від наявних, дає можливість системно вивчати властивості та здатності систем відповідати наперед заданим дослідницьким вимогам. Придатність використання і перспективи методу доведені впровадженням результатів роботи в матеріалознавстві, екології, медицині.

Висновки. Розроблено якісно новий метод дослідження полікомпонентних складних систем за допомогою багатовимірної матриці суміжності, з урахуванням ентропійних відношень між вихідними компонентами, яка описує зв'язки між властивостями системи через її загальну нелінійну ентропію.

Ключові слова: складна система; динамічність; полікомпонентність; ентропія; ентропійна структурованість; матриця суміжності; мультишарова мережа взаємодій.

Вступ

Багатокомпонентні складні динамічні, адаптаційні й подібні системи належать до найбільш різноманітних сфер людської діяльності – від технологічних процесів, пов'язаних з переробкою

сировини за допомогою технічних систем, до соціальних та економічних відношень між групами людей і їх функціональністю [1]. Дослідження таких систем є однією з найскладніших математичних задач. Вони вирізняються особливими структурами, перебувають у багатовимірному інформаційному полі, потребують широкого спек-

Пропозиція для цитування цієї статті: В.С. Волошин, І.А. Ткаленко, «Метод аналізу полікомпонентних складних систем на основі багатовимірних матриць суміжності та ентропійних відношень між компонентами системи», *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 32–41, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

Offer a citation for this article: V.S. Voloshyn, I.A. Tkachenko, “A method for analyzing multicomponent complex systems based on multidimensional matrices of adjacency and entropy relations between system components”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 32–41, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

© Автор(и).

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

тру енергетичного впливу і мають непередбачувані результати, які важко прогнозувати відомими екстраполяційними та іншими формалізованими методами. Відомі методи аналізу таких систем [2, 3, 4, 5, 6] мають певні недоліки, які будуть розглянуті у цій роботі. Невирішеними залишаються задачі сталого практично-формалізованого дослідження розвитку складних систем за допомогою математично адаптованого і природно прозорого, за показниками, всебічного аналізу.

Постановка задачі

Методи аналізу складних систем за їх динамічними, нелінійними, енергетичними адаптивними класами, розглянутими в науковій літературі, потребують уточнення за допомогою узагальнених термодинамічно-інформаційних показників, відповідальних за енергію і динаміку систем. Отже, метою дослідження є створення альтернативного методу максимально суцільного аналізу певних класів полікомпонентних складних систем за їх функціональністю, структурованістю і природними властивостями на основі їх термодинамічних та інформаційних показників.

Методи дослідження

Запропоновано метод аналізу складних систем за допомогою багатовимірних ентропійно структурованих матриць суміжності як похідної моделі для опису їх полікомпонентності. Тут матриця суміжності стає багатовимірною залежно від кількості поєднань груп компонентів у системі, і кожний елемент матриці описує багатосторонній зв'язок.

Такий підхід розширює традиційну інтерпретацію ентропії, актуалізуючи її не лише як міру термодинамічного безладу, а також як кількісний індикатор багатозначності станів і нелінійності міжкомпонентних взаємодій у структуровано-складних системах, що можна відзначити як актуальне завдання для таких методів аналізу. Така постановка питання є особливо релевантною для моделювання систем, що характеризуються високою топологічною і фізико-хімічною зв'язністю, інформаційними відношеннями, де поведінка цілого визначається не парними, а багатовимірними і незіставними кореляціями між компонентами.

У науковому аналізі складних систем застосовують формалізовані підходи, притаманні термодинаміці, статистичній фізиці, теорії графів та інформаційній теорії, зокрема ентропійні

поняття [4, 6]. Утім, ключовий акцент у запропонованій методиці зміщений у бік архітектури взаємного розміщення елементів, характеру та динаміки їхніх термодинамічно опосередкованих зв'язків, а також на наслідкову організацію всієї полікомпонентної мережевої структури.

Основні постулати методології – це ідеї інформаційної ентропії [7, 8], принцип мінімаксної ентропії та зв'язок із класичною статистичною механікою [9], підхід до структурно залежних (наприклад, гранулярних, пористих, впорядкованих під конкретне завдання) систем [10], і формалізація мультишарових мереж, щоб показати різномірні типи взаємодії [11].

Структурно модель являє собою тензор суміжності з певними атрибутами (рис. 1), що належать до полікомпонентної складної системи. Позначимо множину базових компонентів як $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$. Визначимо тензор суміжності порядку k (для багатовимірної вихідної матриці суміжності) як

$$\mathcal{A}^{(k)} = \{\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}\} \quad (1)$$

де кожний елемент $\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ – булево-ваговий показник наявності комбінації у системі (чи її інтенсивності). Модель задумана такою, що здатна до розширення залежно від типу і властивостей системи.

Базовим обчислювальним ядром моделі є саме багатовимірна матриця суміжності розміру $P \times Q \times R \times T \dots$. Кількість вимірів матриці відповідає кількості функціональних або інших поєднань груп компонентів у системі, тоді як кожний матричний елемент є ентропійно структурованим функціоналом $\mathcal{S}_{(p,q,r,t,\dots)total}$, що враховує вклад множинних форм взаємодій $\mathcal{S}_{(p,q,r,t,\dots)i}$. Кожному ненульовому елементу матриці відповідає вектор атрибутів термодинамічно-інформаційного характеру

$$\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)} = (\mathcal{S}_{total}, \Delta\mathcal{S}, \{x_i\}, \sigma, \Xi, \dots), \quad (2)$$

де у базовому наборі \mathcal{S}_{total} – інтегральна (сумарна) ентропія системи, Дж/К або відн. од.; $\Delta\mathcal{S}$ – зміна ентропії під час переходу від окремих компонентів до загальної системи; $\{x_i\}$ – вектор масових показників компонентів у системі; F – відповідна вільна енергія (наприклад, енергія Гіббса або інша вільна енергія A , що належить до системи); σ – швидкість вироблення ентропії (entropy production rate), якщо система не перебуває у стані рівноваги; Ξ – компактність (compactivity) або інші параметри гранулярної статистики.

Для опису локальної моделі ентропії відносно елемента багатовимірної матриці суміжності (S_{total}) для довільної комбінації компонентів ($k = 2, 3, 4, \dots$) вводимо адитивний (суперпозиційний) параметр інтегральної ентропії елемента у вигляді екстенсивної форми:

$$S_{total} = \sum (x_i \cdot S_i^{comp}) + \Delta S_{mix} + S_{surf} + S_{conf} + S_{chem} + S_{proc} + \dots \quad (3)$$

Розглянемо кожну з адитивних складових інтегральної ентропії формули (3), яку інтерпретують особливим чином і яка може бути задана чисельно і послідовно.

1. **Термодинамічна (компонентна) складова** $\sum [x_i \cdot S_i^{comp}(T, p)]$ як звичайна масово-питома сума розрахункових питомих ентропій компонентів системи за зовнішніх вихідних умов, наприклад температура S_i^0 , тиск $S_i^0(T)$, табличні значення стандартних або функції для окремого компонента [12]. Це сума окремих ентропій чистих компонентів на одиницю маси, об'єму або на моль, помножена на частку компонента.

2. **Складова ентропії змішування (ідеальна й надлишкова)** розкладається як

$$\Delta S_{mix} = -R \sum (x_i \cdot \ln x_i) + S_{ex}, \quad (4)$$

де перший доданок – ідеальна (ментально-інформаційна) частина ентропії; R – опосередкована універсальна стала як масштабний коефіцієнт ентропії (множник формальної одиниці ентропії); S_{ex} – надлишкова ентропія (включає асиметрію системи, неспіврозмірність окремих компонентів, її окремих частин, а також несправжню ідеальність, якщо такі наявні в системі), яку можна модельно виразити через активності або через розширені міх-моделі (Regular solution, Margules тощо). Перший член у формулі (4) узгоджується з інформаційним визначенням ентропії для дискретних композицій [7]. Навіть якщо компоненти не реагують, а просто об'єднуються, ентропія збільшується. Це додає додаткову ентропійну частину S_{ex} у надмірну ентропію.

3. У полікомпонентних складних системах є багато інтерфейсів (поверхонь поділу, де змінюються властивості) між різними фазами та окремими компонентами. Термодинамічним показником тут є **поверхнева** або **інтерфейсна складова** S_{surf} у моделі, її можна виразити як

$$S_{surf} \approx A_{sp} \cdot s_{surf}(T, \theta, \omega), \quad (5)$$

де A_{sp} – умовна питома поверхня для розвинутої складної системи (наприклад, $m^2 \cdot kg^{-1}$),

$S_{surf} = -(\partial \gamma / \partial E)_{p, \mu}$ – поверхнева питома ентропія на одиницю розвинутої площі (якщо така потрібна у системі), залежна від поверхневих, зовнішніх явищ системи, її відношень із надсистемою. Її можна уявити як енергію, накопичену на поверхні системи у напрямку надсистеми, що може вказувати на взаємний обмін енергією та ентропією згідно з теорією нерівноважних систем Пригожина (γ – коефіцієнт поверхневого натягу; T – температура; μ – хімічний потенціал).

4. **Конфігураційна ентропія** S_{conf} – одна із надважливих складових у моделі, вона вказує на статистичний внесок в ентропію, що відображає щільність компонентної організованості (складових, частин, окремих груп компонентів), її структурність, впорядкованість, фізичну сутність (пористість, фракційність, ...) або аналогічні показники, притаманні конкретній системі. У виразі (3) йдеться про просторове розміщення, геометрію, яка показує, наскільки впорядковані компоненти в системі, її структурну однорідність та обсяг упаковки. Наприклад, кристал має низьку ентропію, аморфний стан речовини – ентропію вищу, рідина, газ – ще вищу. За рахунок S_{conf} модель показує, наскільки добре все конфігураційно впорядковано, скомпоновано або, навпаки, стратифіковано. Уніфікована формула конфігураційної ентропії має вигляд

$$S_{conf} = k^* \cdot \ln \Omega(\mathcal{E}, \{\xi_i\}), \quad (6)$$

де $\Omega(\mathcal{E}, \{\xi_i\})$ – кількість доступних макросумісних конфігурацій системи, що задовольняють глобальні макроскопічні обмеження $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m\}$, наприклад густина пакування, об'єм, енергія, імпульс, компактність, тиск, кількість частинок, структура графа, розподіл компонентів тощо (залежно від потреб системи); $\{\xi_i\}$ = {типи контактів, матриця суміжності, поля взаємодій, термодинамічні потенціали, закони симетрії}; k^* – універсальна стала ентропійної шкали, для термічних систем $k^* = k_B$, для аперіодичних гранулярних систем за Едвардсом $k^* = k_E$ (стала Едвардса [10] – аналог сталої Больцмана для нерівноважних систем), для інформаційних або дискретних систем $k^* = 1$ (ентропія у «натах») або $k^* = \log_2 e$ (бітова шкала).

Отже, Ω – це міра простору конфігурацій, яку визначають типом і структурою системи (гранули, частинки, домени, кластери, вузли графа тощо).

5. **Хімічна складова** S_{chem} відображає ентропійні зміни, пов'язані з деякими хімічними

перетвореннями, наприклад, під час хімічних реакцій окислювання – відновлювання, дисоціацій, розкладання, утворення нових сполук, корозії, збудженні системи, її нагрівання, спікання, за інших видів енергетичного впливу:

$$S_{chem} = \sum \xi_r \cdot \Delta S_r^0(T) + S_{rxn,neg}, \quad (7)$$

де ξ_r – чинник ступеня реалізації реакції r ; ΔS_r^0 – стандартна ентропійна зміна реакції; додатково можливі нестрогі кінетичні внески ($S_{rxn,neg}$) для нерівноважних переходів. У фізичній хімії, наприклад, це дозволяє врахувати деградацію органіки, окисдування або відновлення металів, утворення нових фаз тощо [12].

6. *Процесна складова* S_{proc} інтегральної ентропії – зазвичай це процесні та кінетичні ентропійні внески, пов'язані із нестационарними ефектами (у технічних системах – пресування, температурні градієнти), що логічно пов'язати зі швидкістю породження ентропії:

$$S_{proc} = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\sigma}(t) dt, \quad (8)$$

де $\dot{\sigma}(t)$ – локальна швидкість вироблення ентропії (отримують з лінійних відношень Л. Онсагера за малих відхилень від рівноваги або з рівняння Пригожина для нерівноважних термодинамічних систем). Для технологічного процесу цей член часто домінує під час термічних і механічних впливів на систему, зокрема спікання, пресування [12]. В цілому це ентропія динаміки процесів у системі.

Такі дані, як властивості великої кількості досліджених складних систем, систематизуємо у вигляді параметричного ряду в табл. 1.

Методологічно важливим є такий висновок: абсолютне значення сумарної ентропії $S_{(p,q,r,t,\dots)total}$ у загальній багатовимірній моделі, що описана виразами (1)–(8), не можна розглядати як одноосібний критерій упорядкованості системи. Інтерпретація стану системи має ґрунтуватися на аналізі спектру ентропійних внесків $S_{(p,q,r,t,\dots)i}$ та їх домінуючих трендів. Наприклад, зростання S_{chem} за одночасним зменшенням S_{conf} може відповідати процесам самоорганізації або формуванню впорядкованих фаз у системі, тому аналітич-

Таблиця 1. Ентропійні складові та їх структурно-термодинамічний зміст

Позначення	Складова	Зміст і фізичне походження	Основні змінні домінування	Можливий напрямок впливу на порядок
S_{comp}	Ентропія чистого компонента	Термодинамічна ентропія окремої речовини з урахуванням фазових переходів	Частка компоненти x_1, x_2, \dots ; температура; мольний/масовий базис	Низьке/стале значення → упорядкованість властивостей, але не структури
ΔS_{mix}	Ентропія змішування	Ідеальна та надлишкова складова від міжкомпонентної взаємодії	Кількість компонентів, параметри взаємодії, неідеальність	Зростання може означати як безлад, так і самоорганізовані кореляції
S_{surf}	Поверхнева (міжфазна) ентропія	Стани атомів, молекул на інтерфейсах фаз, межах поділу, порах, суспензіях тощо	Питома площа поверхні, пористість, енергія інтерфейсів	Зменшення під час руйнування меж, можлива деградація порядку
S_{conf}	Конфігураційна ентропія	Просторове розміщення структурних блоків, фазова однорідність/стратифікація	Тип структури (кристалічна/аморфна), густина пакування	Падіння під час хімічної самозбірки → зростання порядку
S_{chem}	Хімічна ентропія реакцій	Ентропійні ефекти реакцій: окиснення, корозія, розклад, утворення нових фаз	Хімічна активність, ступінь перетворень, дефекти реакцій	Зростання може супроводжувати зростання або падіння структурного порядку
S_{proc}	Процесна продукція ентропії	Нерівноважні градієнти: T, σ, v, I , необоротні процеси	Швидкість нагрівання, механічна деформація, електричні потоки	Різке зростання → тимчасова або стала втрата порядку

на частина моделі спрямована на дослідження мінімакських функцій залежностей кожної ентропійної складової $S_{(p,q,r,t,...)}$ ($i \equiv comp, conf, mix, surf, chem, proc, \dots$) від інтегральної ентропії $S_{(p,q,r,t,...)total}$, що належить заданому елементу багатовимірної матриці суміжності на кожному її вимірі:

$$\min \max \left(\{S_{(p,q),i}, p, q \subseteq \mathcal{I}\}; \{S_{(p,q,r),i}, p, q, r \subseteq \mathcal{I}\}; \{S_{(p,q,r,t),i}, p, q, r, t \subseteq \mathcal{I}\}; \dots \right), \quad (4)$$

$$\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^{P \times Q \times R \times T \times \dots} \quad (5)$$

Вимір $p, q, r, t, \dots \subseteq \mathcal{I}$ такої умови обирають, виходячи з логічного наповнення складної системи з полікомпонентною структурою і може мати максимальний ранг \mathcal{I} .

Якщо складна система має виміри глобальності, високої кількості компонентів, наприклад у кліматології, енергетиці чи геофізиці, методика може бути адаптована через додавання специфічних термодинамічних показників, зокрема S_{rad} – радіаційна ентропія для атмосферних і планетарних оболонок; S_{grav} – гравітаційні ентропійні зміни у системах стратифікації; S_{info} – шеннонівська ентропія для інформаційно складних або кіберфізичних систем та ін.

Схематичний вираз моделі (рис. 1) показує об'єкт і предмет дослідження у вигляді полікомпонентної шаруватої складної системи, вміст дослідження якої відображено у вигляді багатовимірної матриці суміжності, індукованої під адитивні показники інтегральної ентропії кожного елемента матриці. Така модель дозволяє аналітично визначати переваги складних систем залежно від їх компонентності, властивостей різного рівня і призначення.

Узагальнено саме характер зміни ентропії доцільно розглядати як індикатор стабільності та функціональної ефективності системи. Для цього визначимо локальну зміну ентропії елемента матриці відносно сумарного складу у вигляді

$$\Delta S_{cell} = S_{total} - \sum (x_i \cdot S_i^{comp}) \quad (11)$$

Величину (9) як похідну можна розбити на вже відомі внески:

$$\Delta S_{cell} = \Delta S_{mix} + \Delta S_{surf} + \Delta S_{conf} + \Delta S_{chem} + \Delta S_{proc} \quad (12)$$

Критерій «термодинамічної корисності» складної системи, наприклад схильності до утворення потрібних термооброблених фаз чи зниження втрат під час переробки, можна задати як функцію від ΔS_{cell} , від F (вільної енергії певного виду) та від σ . Наприклад, мінімум вільної енер-

гії за допустимого (менш порогового) σ і позитивних S_{conf} може свідчити про бажану фазову стабільність системи.

Важлива суттєва відмінність розглядуваної моделі, пов'язана з її запрограмованою багатозаровою природою, з кореляціями між типами взаємодій у межах матриці суміжності. Подамо різні види взаємодій у системі (фізичні, хімічні, поверхневі, інформаційні, структурні тощо) як шари мультишарової мережі. Кожній матриці (тензору) задаємо свій індекс шару:

$$\ell \in \{phys, chem, surf, info, \dots\} \quad (13)$$

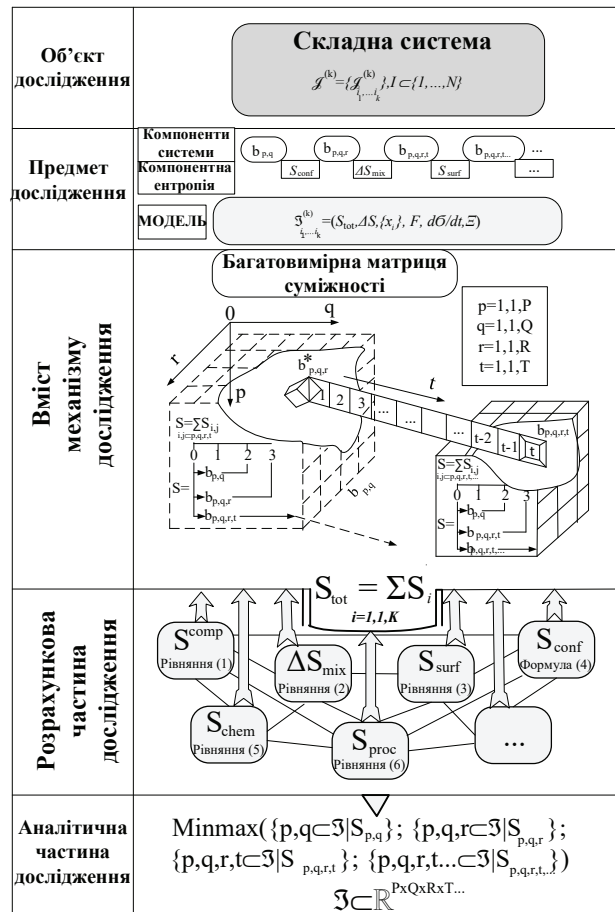


Рис. 1. Матрична модель полікомпонентної складної системи на основі ентропійно структурованої багатовимірної матриці суміжності

Формально мережеві зв'язки одного шару подамо як $\ell: \mathcal{A}^\ell$, а cross-шарові зв'язки (взаємозв'язок між впливом одного типу взаємодії на інший) задаємо тензором міжшарових зв'язків між двома індексами $\mathcal{C}^{(\ell, \ell')}$.

Мультишарова формалізація дозволяє виявляти, наприклад, наскільки поверхневі влас-

тивості (шар *surf*) впливають на хімічний розвиток фаз (шар *chem*), через cross-коваріації атрибутів вузлів матриці. Така формалізація сумісна із класичними оглядами мультишарових мереж [11].

Актуальним для запропонованої моделі є використання в ній інформаційно-термодинамічної метрики та ідентифікація зв'язків. Для кількісного оцінювання взаємного впливу компонентів і шарів слід використовувати інформаційні міри, зокрема:

– *Shannon*-ентропію для розподілів масових груп компонентів системи або для ймовірносно-го розподілу конфігурацій:

$$H(X) = - \sum p(x) \cdot \log p(x);$$

– взаємну інформацію шарів для оцінки кореляції між двома видами взаємодій або між двома шарами компонентів матриці [8]:

$$I(X; Y) = \sum [p(x,y) \cdot \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}];$$

– принцип мінімаксної ентропії (*MinMaxEnt*) – для побудови найменш упереджених ймовірнісних моделей щодо невідомих розподілів за заданими обмеженнями (середніми значеннями, енергіями, масами). Це дозволяє інверсно оцінювати обмеженості параметрів моделі порівняно з експериментальними даними [12].

Наведемо аргументацію щодо певної універсальності моделі, що описана виразами (1)–(8), яку можна довести комбінацією формальної (аксіоматичної) постановки, демонстрації зведення до класичних моделей і міждисциплінарних емпіричних тестів. Це, насамперед, модульність шарів – відокремлення типів взаємодій у шарах дає можливість аплікувати модель до різних фізичних систем (металургія, біо- та екологічні системи, матеріалознавство тощо), змінюючи лише інтерпретацію шарів і функцій $S_{(p,q,r,t,\dots)_i}$, що узгоджується із сучасними концепціями мультишарових мереж [11].

Інформаційно-ентропійна основа універсальності моделі спирається на формалізм *Shannon/Jaynes*, який забезпечує єдину схему для поєднання статистичних (мікроскопічних) і макроскопічних відомостей; принцип *MinMaxEntr* дозволяє будувати найбільш нейтральні моделі за заданих обмежень – універсальний інструмент для інверсійних задач. Поєднання термодинамічних і кінетичних внесків здійснюють за рахунок комбінації рівноважних (S_{chem} за рівноваги, S_i^{comp} , ΔS_{mix}) і нерівноважних (S_{proc}) складових ентропій, що робить їх придатними для великої кількості реальних систем і процесів [12].

Ми не маємо підстав враховувати цю методику абсолютно універсальною, але принаймні для широкого спектру інженерних і технічних систем вона має універсальність.

Аналіз отриманих результатів

Найбільш переконливим аргументом на користь запропонованого методу аналізу складних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно-структурованих під конкретну систему, матриць суміжності як похідної моделі для опису полікомпонентних складних систем є його практична реалізація на прикладах створення оптимальних сумішей з металургійних відходів для отримання вторинного продукту – металовмісних брикетів потрібної якості [13], а також функціональний аналіз нового матеріалу – геополімеру для застосування як сучасної речовини полікомпонентного складу для більш ніж 12 видів використання [14].

У подібних роботах методика використання ентропійно-структурованих багатовимірних матриць суміжності дозволила суттєво розширити номенклатуру кінцевих продуктів у технологіях рециклінгу металургійних відходів за рахунок більш ретельного використання властивостей окремих компонентів з таких відходів на користь нової товарної продукції.

У роботі [13] дослідженню підлягають складні системи у вигляді сумішей з металургійних відходів з матричними формулами складу $b_{2,5,1,9} = b_2 + b_5 + b_1 + b_9$ (конвертерний шлам + електросталеплавильний пил + доменний шлам + електросталеплавильна окалина) та $b_{2,3,1,10} = b_2 + b_3 + b_1 + b_{10}$ (конвертерний шлам + доменний пил + доменний шлам + конвертерна окалина). Система, що складається із 12 вихідних компонентів (b_i , $i = 1, 1, 12$) кожний з яких являє собою промисловий відхід, завдяки чотиривимірній матриці суміжності надає можливості виділити з майже 20 тисяч варіантів сумішей ті з них, які в області елементів матриці мають оптимальні для конкретної системи складові сумарної ентропії, близькі до свого мінімаксного значення, і за рахунок цього показують на дві позиції, які визначають суміші зі вказаними вище формулами. Зокрема, чотиривимірна матриця суміжності порівняно із дво- і тривимірними ентропійно-вмісними матричними системами підтверджує можливість створення як стандартно відомого брикета (*benchmark*), за формулою $b_{2,5,3,12} =$

$= b_2 + b_5 + b_3 + b_{12}$ (конвертерний шлам + електросталеплавильний пил + доменний пил + прокатна окалина) з невисокою механічною міцністю на стиск ($\ll 200$ кг на брикет), термостійкістю (до 800°C) і хімічним складом (Fe 50–60 %, C 10–15 %), що описано в роботі [15]. Вона ж надає альтернативні комбінації за формулами $b_{2,5,1,9}$ та $b_{2,3,1,10}$, які раніше не використовували у промисловості, але здатні забезпечити кращі системні властивості, ніж у брикетів, які вважають «стандартними».

Посилаючись на розрахункові дані показано, що суміш $b_{2,5,1,9}$ має значення $S_{chem}^{2,5,9,1} = 0,031 \cdot S_{chem}^{benchmark}$, $S_{proc}^{2,5,9,1} = 0,391 \cdot S_{proc}^{benchmark}$ та $S_{conf}^{2,5,9,1} = 0,145 \cdot S_{conf}^{benchmark}$ за $S_{tot}^{2,5,9,1} \approx S_{tot}^{benchmark}$. Отже, при зовнішній ентропійній рівнозначності нова суміш $b_{2,5,1,9}$ за рахунок менших значень термодинамічної та конфігураційної рівноваги, а також хімічної впорядкованості, проявляє кращі властивості та схильність до хімічної взаємодії, і тому стає найбільш ефективною для використання в агломераційному виробництві.

Запропонована суміш за формулою $b_{2,3,1,10}$, якщо порівняти із *benchmark*, характеризується складовими значеннями ентропії $S_{chem}^{2,3,1,10} = 0,416 \times S_{chem}^{benchmark}$ та $S_{conf}^{2,3,1,10} = 0,254 \cdot S_{conf}^{benchmark}$. Попри те, що для неї $S_{tot}^{2,3,1,10} \approx 1,633 \cdot S_{tot}^{benchmark}$, нова суміш за рахунок більшої щільності та схильності до хімічних взаємодій має особливі властивості як продукт брикетування, для технологій плавлення і відновлювання заліза. Це робить їх цілком ефективними як альтернативу для застосування в доменній печі чи як самовідновлювані вторинні сировинні матеріали в електросталеплавильному виробництві [13].

Багатофункціональність геополімерних матеріалів з відходів металургійного виробництва обумовлена їх унікальними властивостями, що дозволяє їм знаходити застосування в багатьох технологічних процесах. Використання ентропійно-вмісних багатовимірних матриць суміжності дозволило виявити нові формули для цієї речовини, які стали спроможними проявити себе в нових для геополімерів областях: 3D-друку, біомедичних дослідженнях на кісткових тканинах [14].

Як підсумок досліджень [14] порівняння розрахованих результатів, отриманих за допомогою запропонованого методу, з експериментальними і практичними даними, опублікованими, наприклад у [16], дає чітко позитивні висновки про його ефективність.

Доречним тут буде зіставлення запропонованої методики з відомими і найбільш використовуваними методами дослідження та аналізу складних систем, що надає нам література. Зокрема, мова може йти про широкий спектр суміжних методів: спектральна кластеризація графів [2], мультишарова матрична статистична модель [3], випадкова матрична теорія шуму [4], використання марковських випадкових полів [5], розклад багатовимірних тензорів [6]. Їх результати можна використати як *бенчмарки* відносно запропонованої методики (табл. 2).

З викладеного можна зробити висновок про те, що запропонований метод перебуває на рівні наявних за універсальністю, обчислювальною складністю за математичним та ентропійно-інформаційним забезпеченням і, щонайменше, не гірше за них, а за прикладним сенсом і чутливістю до реальних структурних змін дещо перевершує розглянуті методи.

Висновки

1. Запропоновано якісно новий метод до вивчення полікомпонентних складних систем за допомогою багатовимірної ентропійно індукованої матриці суміжності, в якій взаємозв'язки вихідних компонентів описують через структуру незалежних складових інтегральної ентропії кожного елемента матриці. Такий розклад дозволяє системно поєднувати в аналітичному дослідженні властивості компонентів, міх-процеси, інформаційні, структурні, конфігураційні, хімічні, динамічні та інші чинники через складові повної ентропії кожного елемента матриці суміжності. Показано, що зміна балансу ентропійних внесків може суттєво впливати на інтерпретацію впорядкованості системи навіть за передбачуваної зміни її інтегральної ентропії.

2. Мультишарова архітектура моделі дозволяє гнучко відокремлювати різні види міжкомпонентних кореляцій всередині системи, визначати взаємозв'язок відповідних домінуючих ентропійних трендів і побудову критеріїв термодинамічно-інформаційної доцільності функціонування системи. Використання принципу мінімаксної ентропії та інформаційних заходів дають змогу інверсного визначення неявних розподілів і незбіжних параметрів у таких взаємодіях.

3. Результати використання запропонованого методу і створеної на його основі моделі ентропійно індукованої багатовимірної матриці суміжності з механізмами структурованості параметрів ентропії для дослідження склад-

Таблиця 2. Порівняльні результати зіставлення різних методів оцінки полікомпонентних складних систем*

Критерій оцінювання	Ентропійно-топологічний метод	Спектральна кластеризація графів	Мультишарова матрична модель	Випадкова матрична теорія шуму	Марковські випадкові поля	Розклад багатовимірних тензорів
Математична основа	Ентропійні багатовимірні матриці суміжності	Власний спектр матриці суміжності	Багатошарові матриці, тензор міжзв'язності	Статистика власних значень випадкових матриць	Граф залежностей + енергетичні потенціали	Латентні фактори багатомодальних даних
Інформаційно-ентропійна інтерпретація	Ентропія компонентів і зв'язків висока	Слабка	Структурна ентропія шарів	Ентропія спектра, шум	Термодинамічна ентропія станів	Ентропія тензора, багатовимірний баланс
Масштабна інваріантність (агрегація вузлів/компонентів)	Висока	Частково висока	Висока	Висока	Частково висока	Висока
Чутливість до реальних структурних змін	Висока (залежить від розмірності тензора)	Середня (залежить від спектру матриці)	Висока	Низька	Середня	Висока
Обчислювальна складність	Середня	Середня	Висока	Середня	Висока	Висока
Фізичний та прикладний сенс параметрів	Багатовимірність матриць з одночасністю міжшарових взаємодій	Лапласіан кодує інтенсивність взаємодій між компонентами	Окремі матриці відображають різні типи взаємодій	Розмірність матриці задає рівень статистичних флуктуацій	Потенціали вузлів описують імовірнісні взаємодії між елементами	Ранг розкладу параметрів визначає кількість прихованих факторів
Універсальність моделі	Дуже висока	Середня	Висока	Висока	Висока	Дуже висока

*За даними джерел [2, 3, 4, 5, 6].

них систем отримали прикладне підтвердження і практичну значущість в технологіях рециклінгу багатоконпонентних металургійних сумішей, у проектуванні та оптимізації нових складних матеріалів на прикладі геополімерів, а також під час зіставлення з відомими прикладними методами-аналогами.

4. Розроблений метод дозволяє перейти від емпіричного аналізу властивостей полікомпонентних систем до науково обґрунтованого їх проектування, створення складних систем із за-

даними властивостями. Це забезпечує значне зниження обчислювальної складності зі збереженням високої масштабності та інваріантності аналізу, що робить метод універсальним інструментом для прикладних задач екології, металургії та кібернетики.

5. Метод можна класифікувати як уніфікований для класів динамічних, нелінійних та адаптивних, енерговмісних, складних систем; сфери їх застосування в інженерних системах доведено, вони можуть мати подальший розвиток.

References

- [1] M. Mitchell, "Complexity: A Guided Tour", New York/Oxford, Oxford University Press, 2009, 368 p. Available: <https://doi.org/10.1093/oso/9780195124415.001.0001>
- [2] M. Newman, "Networks: An Introduction", New York/Oxford, Oxford University Press, 2010, pp. 371–412. Available: <https://global.oup.com/academic/product/networks-9780198805090>
- [3] M. Kivelä *et al.*, "Multilayer Networks", *Journal of Complex Networks*, 2014, pp. 203–248. Available: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016>
- [4] L. Laloux *et al.*, "Random Matrix Theory and Financial Correlations", *Random Matrix Theory*, Hamburg, 2013, pp. 1–32. Available: <https://doi.org/10.1142/S0219024900000255>
- [5] R. Kindermann and J.L. Snell, "Markov Random Fields and Their Applications", *American Mathematical Society*, Providence, 1980, pp. 39–82. Available: <https://books.google.com/books?id=Px9QAQAIAAJ>
- [6] A. Cichocki, *et al.*, "Tensor Decompositions for Signal Processing Applications", *IEEE Signal Processing Magazine*, 2015, pp. 145–163. Available: <https://arxiv.org/abs/1403.4462>
- [7] C.E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, 1948, Vol. 27, pp. 379–423¹, 623–656². Available: <https://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf>
- [8] T.M. Cover and J.A. Thomas, "Elements of Information Theory", John Wiley & Sons (2nd ed.), 2006, 461 p. Available: <https://search.worldcat.org/de/title/Elements-of-information-theory/oclc/70862892>
- [9] E.T. Jaynes, "Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics", *Kluwer Academic Publishers/Springer*, Dordrecht, Netherlands, 1989, Vol. 158, 458 p. Available: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-017-1577-3>
- [10] S.F. Edwards and R.B.S. Oakeshott, "Theory of Powders", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1989, Vol. 157, pp. 1080–1090. Available: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(89\)90035-6](https://doi.org/10.1016/0378-4371(89)90035-6)
- [11] M. Kivelä *et al.*, "Multilayer Networks", *Journal of Complex Networks*, 2014, pp. 258–274. Available: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016>
- [12] E.T. Jaynes, "Probability Theory: The Logic of Science", *Cambridge University Press*, Cambridge, United Kingdom, 2003, 727 p. Available: <https://www.cambridge.org/core/books/probability-theory/0A76DBF47F7C3D3657174B0A322BE86F>
- [13] V.S. Voloshyn and I.V. Tkalenko, "Metodyka otsinky vzaemodii metalurhiinykh vidkhodiv pry yikh retsyklinhu", *Methodology for Assessing the Interaction of Metallurgical Wastes during Their Recycling*, Vcheni zapysky Tavriiskoho universytetu im. V.I. Vernadskoho, 2025, Chap. 1, Vol. 36 (75), No. 4, pp. 191–199. Available: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.4.1/24>
- [14] V.S. Voloshyn, "Vykorystannia metalurhiinykh vidkhodiv dlia vyrobnytstva heopolimeriv", *Use of metallurgical waste for the production of geopolymers, Ekolohichna bezpeka: problemy i shliakhy vyrishennia*. Zb. nauk. statei UkrNDIEP, Kharkiv, 2025, pp. 109–115. Available: http://www.niiep.kharkov.ua/sites/default/files/sbornik_konf_2025.pdf
- [15] O. Vitikka *et al.*, "Effect of Biocarbon Addition on Metallurgical Properties of Mill Scale-Based Auger Pressing Briquettes", *ISIJ International*. The Iron and Steel Institute of Japan, 2024, Vol. 64, No 6, pp. 964–977. Available: <https://doi.org/10.2355/isijinternational.ISIJINT-2024-0266>
- [16] Shuo Li *et al.*, "One-Part Geopolymer in Stabilizing High-Water-Content Soft Clay: Towards an Eco-Friendly and Cost-Effective Solution", *Buildings*, Chap. 5, Vol. 3, 2025, pp. 477–501. Available: <https://doi.org/10.3390/buildings15040289>

V.S. Voloshyn, I.A. Tkalenko

A METHOD FOR ANALYZING MULTICOMPONENT COMPLEX SYSTEMS BASED ON MULTIDIMENSIONAL MATRICES OF ADJACENCY AND ENTROPY RELATIONS BETWEEN SYSTEM COMPONENTS

Background. Current approaches to the analysis of multicomponent complex systems do not consistently consider the relative incompatibility of system properties with the configurational, thermodynamic, and other aspects of the system. The challenge of analysing multicomponent dynamic complex systems in terms of their energy and thermodynamic content continues to be unresolved.

Objective. The paper aims to develop a method for the analysis of multicomponent complex systems through their functional, structural, physicochemical, and additional properties, utilising the thermodynamic and informational characteristics inherent to such systems.

Methods. A technique is introduced for the analysis of intricate dynamic, nonlinear, and energy-containing adaptive systems, utilising multidimensional, entropy-induced adjacency matrices tailored for a particular system.

Results. A novel approach for the analysis of complex systems is introduced, utilising multidimensional, entropy-structured specifically tailored adjacency matrices, substantive part of which aligns with the characterisation of a complex multicomponent system through integral entropy indicators. A primary distinguishing characteristic of the model, which is founded on this method, is the decomposition of the system's integral entropy into distinct components, including configurational, structural, physicochemical, informational, and various other entropy types, reflecting the system's inherent properties. Another notable distinction of the model pertains to its multilayered structure within the adjacency matrix. This model, in contrast to existing alternatives, facilitates a comprehensive examination of the

properties and capabilities of systems to fulfil specified research objectives. The effectiveness and potential of this method are validated through its application in fields such as materials science, ecology, and medicine.

Conclusion. A novel approach has been established for the examination of multicomponent complex systems through the utilisation of a multidimensional adjacency matrix. This method considers the entropic relationships among the initial components, effectively illustrating the interconnections between the system's properties via its overall nonlinear entropy.

Keywords: complex system; multicomponent nature; entropy; adjacency matrix; multilayer structure; entropy structuring.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
11 грудня 2025 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року

АВТОМАТИЗАЦІЯ, КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА РОБОТОТЕХНІКА

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350095>

УДК 004.896:681.51:625.8

Я.В. Стешенко¹, <https://orcid.org/0009-0003-5367-1529>,

А.Г. Протасов^{*}, <https://orcid.org/0000-0002-2965-3334>

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна, <https://ror.org/00syn5v21>

^{*}Відповідальний автор: a.g.protasov@gmail.com

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА АДАПТИВНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОЦЕСОМ УКЛАДАННЯ АСФАЛЬТОБЕТОНУ НА ОСНОВІ НЕЙРОМЕРЕЖЕВИХ МОДЕЛЕЙ

Проблематика. Якість і довговічність асфальтобетонного покриття безпосередньо залежить від дотримання технологічних параметрів під час його укладання. Традиційні автоматизовані системи управління технологічними процесами часто ґрунтуються на жорстких алгоритмах, які неспроможні повноцінно врахувати складний нелінійний вплив вологості повітря, швидкості охолодження матеріалу та динамічної жорсткості основи. Застосування в цих системах замкнених контурів керування на основі зворотного зв'язку дозволяє мінімізувати вплив людського фактора й забезпечити стабільність параметрів укладання незалежно від зовнішніх збурень. Утім, ефективність таких систем суттєво обмежена без інтеграції прогностичних моделей, здатних виявляти потенційно дефектні зони ще до моменту остаточного охолодження суміші.

Мета. Метою цієї роботи є розробка та аналіз ефективності інтелектуальної системи адаптивного керування (ІСАК) процесом укладання асфальтобетону, яка дозволить зменшити вплив зовнішніх факторів на якість покриття.

Методика реалізації. Для реалізації запропонованої системи використано методи об'єктно-орієнтованого програмування (мова Python) і бібліотеки машинного навчання (XGBoost, TensorFlow). Методика ґрунтується на комп'ютерному моделюванні 1000 технологічних циклів. Верифікацію результатів здійснювали шляхом порівняння прогностичних значень щільності з еталонними фізико-математичними моделями ущільнення.

Результати дослідження. Впровадження запропонованої інтелектуальної системи дозволило збільшити щільність покриття в чотири рази порівняно зі стандартними системами. Скорочення часу реакції на температурні збурення з 18,5 с до 5,2 с підтверджує здатність системи діяти проактивно і знизити ймовірність появи прихованих пошкоджень до рівня 1,8 %. Значення коефіцієнта стабільності процесу на рівні 0,97 підтверджує надійність моделей та їх готовність до практичного впровадження.

Висновки. Запропонована інтелектуальна система адаптивного керування дозволяє вирішити проблему затримки реакції традиційних автоматизованих комплексів на стохастичні зміни зовнішніх чинників під час укладання асфальтобетону. Вона зменшує негативний вплив температурної нестабільності та коливань вологості, що зазвичай призводять до виникнення прихованих дефектів і неоднорідності структури покриття. Завдяки інтеграції предиктивних нейромережових моделей у замкнений контур регулювання вдалося забезпечити проактивне управління процесом, де коригування параметрів відбувається на основі прогнозу стану матеріалу, а не лише за фактом відхилення від норми.

Ключові слова: автоматизовані системи; адаптивне керування; штучний інтелект; нейронні мережі; асфальтобетон; замкнена система; прогнозування якості.

Вступ

Глобальна цифровізація будівельної галузі зумовлює перехід від традиційних методів контролю якості до концепції інтелектуально-

го будівництва, де ключову роль відіграє здатність системи адаптуватися до мінливих умов середовища в реальному часі. Експлуатаційна довговічність асфальтобетонного покриття безпосередньо залежить від дотримання термічної

Пропозиція для цитування цієї статті: Я.В. Стешенко, А.Г. Протасов, «Інтелектуальна система адаптивного керування технологічним процесом укладання асфальтобетону на основі нейромережових моделей», *Наукові вісті КПИ*, № 1, с. 42–49, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350095>

Offer a citation for this article: Ya.V. Steshenko, A.G. Protasov, “Intelligent system for adaptive control of the technological process of laying asphalt concrete based on neural network models”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 42–49, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350095>

стабільності та досягнення нормативної щільності під час технологічного процесу укладання. Будь-яке порушення температурного профілю суміші або некоректний вибір режиму роботи ущільнювальної техніки неминуче призводять до виникнення прихованих дефектів, таких як мікротріщини, недостатня адгезія між шарами й передчасне лушення поверхні. Традиційні автоматизовані системи часто ґрунтуються на жорстких алгоритмах управління, які неспроможні повноцінно врахувати складний нелінійний вплив вологості повітря, швидкості охолодження матеріалу й динамічної жорсткості основи [1, 2].

Впровадження замкнених контурів керування на основі зворотного зв'язку дозволяє мінімізувати вплив людського фактора і забезпечити стабільність параметрів укладання незалежно від зовнішніх збурень. Утім, ефективність таких систем суттєво обмежена без інтеграції прогностичних моделей, здатних виявляти потенційно дефектні зони ще до моменту остаточного охолодження суміші. Сучасні досягнення в галузі глибокого навчання та аналізу великих масивів сенсорних даних створюють передумови для формування інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень, які працюють в єдиному інформаційному полі з виконавчою технікою [3]. Це дозволяє перейти від пасивного спостереження за параметрами до активного коригування інтенсивності нагріву та зусилля притискання вальців на основі високоточних нейромережевих прогнозів [5].

Особливого значення набуває синтез математичних моделей теплового балансу з предиктивними алгоритмами машинного навчання, що забезпечує точність прогнозування щільності матеріалу на рівні понад 95 % [6]. Використання інтегрованих сенсорних систем для збирання даних про температуру в бункері, вологість і вібраційні характеристики котка дозволяє формувати динамічні карти ущільнення в режимі реального часу. Такий підхід дає змогу оперативно змінювати швидкість руху техніки й параметри віброущільнення, запобігаючи перегріву або недоущільненню матеріалу [4]. Поєднання фізико-математичного опису процесу з методами інтелектуального аналізу даних формує новий стандарт надійності в дорожньому будівництві, де кожна технологічна операція супроводжується миттєвою оцінкою її впливу на кінцеву якість готової продукції [5, 6].

Аналіз попередніх робіт і публікацій

У роботі Yu, Shen та Lu [1] автори досліджують проблему оперативного моніторингу умов ущільнення асфальтобетонних покриттів на основі сенсорних вимірювань. Метою дослідження є побудова моделей, що пов'язують температурні й механічні параметри процесу з фактичним станом ущільнення. Для цього використано польові експерименти із залученням сенсорів температури та навантаження, а також регресійні моделі машинного навчання. Отримані результати підтвердили можливість високоточного прогнозування стану ущільнення. Водночас запропонований підхід орієнтований переважно на оцінювання параметрів і не передбачає формування керуючих впливів у реальному часі.

У статті Xue, Cao, Liu, Ren та Wu [2] вирішується задача нейромережевої оцінки якості ущільнення гарячих асфальтобетонних сумішей. Автори провели серію експериментів із реєстрацією температури суміші, швидкості руху котка та параметрів вібрації. Для обробки даних застосовано багатoshарову штучну нейронну мережу. Результати показали високу точність оцінювання коефіцієнта ущільнення, що підтверджує ефективність нейромережевого підходу для нелінійних технологічних процесів. Водночас модель використовують виключно як інструмент оцінки, вона не інтегрована в систему адаптивного керування.

Majidifard, Adu-Gyamfi та Buttlar [3] зосереджують увагу на задачі оцінювання стану асфальтобетонних покриттів на експлуатаційній стадії. Автори запропонували новий індекс стану покриття, побудований на основі глибоких нейронних мереж, що аналізують великі масиви даних діагностичних обстежень. Отримані результати демонструють підвищену чутливість до ранніх стадій деградації покриття. Обмеженням дослідження є відсутність аналізу технологічного етапу укладання та ущільнення асфальтобетону.

У роботі Karballaezadeh та співавторів [4] розглянуто застосування гібридних моделей машинного навчання для інтелектуальної дорожньої інспекції. Дослідження спрямоване на прогнозування технічного стану дорожніх покриттів у межах систем «розумної» транспортної інфраструктури. Автори поєднали різні алгоритми машинного навчання для підвищення точності прогнозів. Водночас у роботі відсутній зв'язок між прогнозуванням стану покриття і керуван-

ням параметрами технологічного процесу під час будівництва.

У роботі Leukel, Scheurer та Sugumaran [7] проведено систематичний огляд сучасних методів машинного навчання, які застосовують для прогнозування фізико-механічних властивостей у дорожньому будівництві. Автори вирішують проблему фрагментарності наукових досліджень, аналізуючи понад тридцять публікацій, присвячених прогнозуванню щільності, міцності, модуля пружності та довговічності асфальтобетонних матеріалів. Дослідження виконано шляхом порівняльного аналізу різних класів моделей, зокрема штучних нейронних мереж, ансамблевих алгоритмів і методів опорних векторів. За результатами огляду встановлено, що нейромережеві моделі демонструють найвищу точність у задачах з нелінійними залежностями між параметрами. Водночас автори відзначають відсутність робіт, у яких прогнозні моделі безпосередньо інтегровані в адаптивні системи керування технологічним процесом укладання, що обмежує практичну реалізацію отриманих результатів.

У статті Al-Ammari, Dong, Nasser та Al-Maswari [8] розглянуто задачу прогнозування оптимального вмісту бітуму в асфальтобетонних сумішах на етапі Marshall-проектуювання з використанням методів машинного навчання. Автори провели серію експериментальних досліджень, сформулювали навчальні вибірки з параметрів гранулометричного складу та фізичних властивостей матеріалів і застосували кілька ML-алгоритмів для порівняльного аналізу. Отримані результати показали, що інтелектуальні моделі забезпечують вищу точність прогнозування порівняно з класичними емпіричними методами. Разом з тим дослідження обмежується етапом проектування складу суміші й не враховує впливу реальних технологічних умов укладання та ущільнення на кінцеву якість покриття.

У статті [5] запропоновано автоматизовану систему керування технологічним процесом укладання асфальтобетонного покриття. Автори вирішують задачу стабілізації температурних і технологічних режимів шляхом впровадження замкнутого контуру керування з використанням сенсорних даних. Проведений аналіз показав ефективність автоматизації з точки зору зменшення впливу людського фактора. Водночас система ґрунтується переважно на детермінованих алго-

ритмах і не містить прогнозного модуля, здатного адаптувати керування до нелінійних змін зовнішніх умов.

У роботі [6] розглянуто застосування методів штучного інтелекту (ШІ) для реалізації неруйнівного контролю і прогнозування якості матеріалів. Автори дослідили можливості підвищення ефективності використання нейромережевих моделей для прогнозування показників якості на основі отриманих зображень об'єкта. Результати підтвердили перспективність інтелектуального аналізу даних для виявлення потенційних дефектів. Разом з тим запропоновані моделі функціонують як окремий аналітичний інструмент і не інтегровані безпосередньо в контур керування технологічними процесами.

З урахуванням результатів робіт [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8], а також власних досліджень [5], можна зробити висновок, що сучасні наукові підходи охоплюють окремі аспекти контролю, прогнозування або автоматизації технологічного процесу укладання асфальтобетону. Утім, бракує комплексних рішень, в яких нейромережеве прогнозування якості безпосередньо використовують для формування адаптивних керуючих впливів у реальному часі. Саме необхідність об'єднання детермінованих систем керування [5] з інтелектуальними прогнозними моделями [6] зумовлює актуальність розроблення інтегрованої ІСАК технологічним процесом укладання асфальтобетону.

Матеріали та результати дослідження

Основним практичним результатом роботи є розробка інтегрованої інтелектуальної платформи, що об'єднує апаратну частину замкнутого керування з нейромережевим модулем прогнозування. Архітектуру розробленої системи зображено на рис. 1. Вона включає блок вимірювання пер-

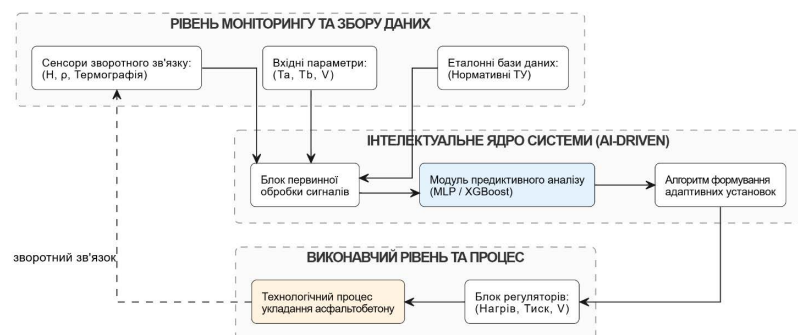


Рис. 1. Структурна схема інтелектуальної системи адаптивного керування процесом укладання асфальтобетонного покриття

винних характеристик, модуль збору оперативних даних і підсистему прийняття рішень, яка формує випереджальні команди для блока регуляторів.

Для кількісної оцінки ефективності запропонованої ІСАК було проведено комп'ютерне імітаційне моделювання 1000 технологічних циклів, що дозволило об'єднати механізми замкненого регулювання і предиктивні можливості нейронної мережі. Узагальнені показники роботи стандартних автоматизованих систем керування (АСК) та розробленої ІСАК за різними сценаріями наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Порівняльні показники ефективності інтелектуальної системи адаптивного керування

Показник ефективності	Ручне керування	Стандартна АСК (без ШІ)	Інтелектуальна /ІСАК/ (із ШІ)
Середня похибка досягнення цільової щільності, %	8,5	4,2	1,1
Ймовірність виникнення прихованих дефектів, %	12,4	6,8	1,8
Час реакції системи на зовнішні збурення, с	45,0	18,5	5,2
Коефіцієнт стабільності технологічного процесу RI	0,62	0,81	0,97
Економія енергоресурсів на регулювання нагріву, %	—	5,0	14,5

Аналіз даних табл. 1 свідчить, що впровадження інтелектуального модуля в контур керування забезпечує радикальне покращення всіх технологічних показників. Точність досягнення цільової щільності зросла майже в чотири рази порівняно зі стандартними системами, які ґрунтуються на класичних алгоритмах без методів машинного навчання. Скорочення часу реакції на температурні збурення з 18,5 до 5,2 с підтверджує здатність системи діяти проактивно. Така швидкість відгуку дозволяє нівелювати ризики дефектів на етапі предиктивного аналізу, що відображається у зниженні ймовірності появи прихованих пошкоджень до рівня 1,8 %. Значення коефіцієнта стабільності процесу на рівні 0,97 підтверджує надійність моделей та їх готовність до практичного впровадження. Окрім технологічної якості, система забезпечила зниження витрат

енергії на підтримку теплового балансу суміші на 14,5% за рахунок виключення надлишкового нагріву матеріалу.

Важливим критерієм перевірки працездатності запропонованої системи є оцінка здатності системи підтримувати задані якісні показники в умовах неперервного технологічного циклу. Оскільки кінцева міцність покриття безпосередньо залежить від однорідності розподілу щільності, було проведено імітаційне моделювання процесу ущільнення на дистанції укладання 100 м. Завданням цього етапу досліджень було

зиставлення роботи стандартної автоматизованої системи керування, що ґрунтується на пропорційно-інтегрально-диференціальних регуляторах (ПІД-регуляторах), із запропонованою інтелектуальною моделлю, яка використовує випереджальні прогнози нейронної мережі для корекції зусилля вальців. На рис. 2 подано результати порівняльного аналізу динаміки зміни щільності відносно нормативного значення.

Процес формування щільності асфальтобетонного шару описують нелінійною функцією ущільнення, яка враховує енергію коткування і в'язкість суміші через її температурний стан.

Математична модель ущільнення, використана для моделювання, ґрунтується на експоненціальній моделі ущільнення Delgadillo та Bahia [9]. Модель була адаптована шляхом введення стохастичної складової випадкових

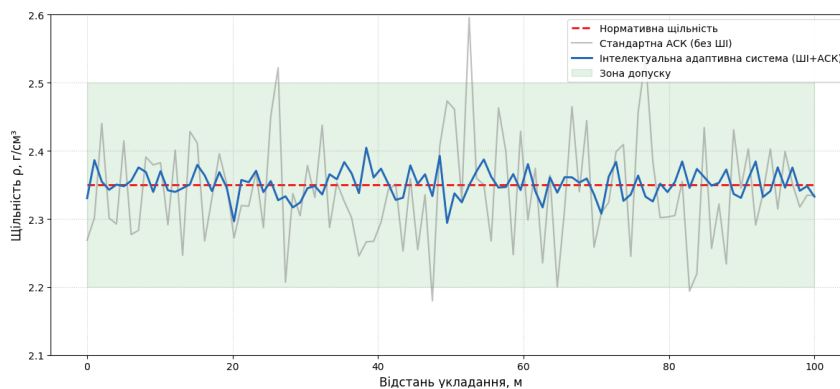


Рис. 2. Порівняльний аналіз стабільності щільності асфальтобетонного покриття

завад ε для розрахунку поточної щільності ρ і має вигляд

$$\rho(L) = \rho_{\max} (1 - e^{-\alpha \cdot P(L)}) \cdot e^{-\beta(T_{\text{opt}} - T_p(L))^2} + \varepsilon.$$

де ρ_{\max} – максимальна теоретична щільність матеріалу; $P(L)$ – тиск ущільнення на відстані L ; $T_p(L)$ – фактична температура суміші; α та β – емпіричні коефіцієнти, що характеризують властивості конкретного типу суміші; $\varepsilon(L)$ – випадкова величина, що моделює неоднорідність матеріалу й зовнішні завади.

Для стандартної АСК тиск P є константою або змінюється із запізненням, що при флуктуаціях температури T_p призводить до значних відхилень щільності від нормативу, як показано сірою лінією. В інтелектуальній системі реалізовано алгоритм адаптивного вибору тиску [9]:

$$P_{\text{opt}}(L) = f_{AI}(T_p, H, V) = \arg \min_p \left| \rho_{\text{target}} - \rho(P, T_p) \right|.$$

Завдяки предиктивному розрахунку оптимального тиску P_{opt} через нейромережеву модель f_{AI} система нівелює температурні коливання, що забезпечує стабільність синьої лінії на графіку в межах зони допуску.

Математична модель ущільнення, використана для побудови рис. 2, ґрунтується на класичній експоненціальній моделі компакції асфальтобетонних сумішей. Основну формулу залежності щільності від енергії каткування та температурного стану виведено на основі фундаментальної праці Delgadillo R. та Bahia H.U. [9], де детально досліджено вплив тиску та в'язкості бітумного в'язучого на підсумкову густину. Авторами було модифіковано цю модель шляхом додавання стохастичної складової завад, що дозволило імітувати реальні умови будівельного майданчика у програмному середовищі.

Аналіз отриманих графічних залежностей дозволяє стверджувати, що впровадження інтелектуального компонента в контур управління суттєво підвищує стабільність технологічного процесу. Стандартна система автоматизації демонструє значні амплітудні коливання щільності навколо цільового показника $2,35 \text{ г/см}^3$, що зумовлено запізненням реакції регуляторів на зміну температури суміші. У деяких точках відхилення виходять за межі оптимальної зони допуску, що створює ризик появи зон не-

доущільнення або переущільнення матеріалу.

Натомість інтелектуальна адаптивна система забезпечує утримання показника щільності в межах вузького діапазону з мінімальним середньоквадратичним відхиленням. Використання предиктивного аналізу дозволяє системі заздалегідь коригувати тиск ущільнення у разі виявлення тенденцій до охолодження суміші або зміни її в'язкості. Це забезпечує високу рівномірність структури покриття по всій довжині ділянки, що є критично важливим для запобігання передчасному руйнуванню дорожнього полотна під впливом транспортних навантажень. Отримані дані підтверджують, що синергія замкнених систем керування та алгоритмів глибокого навчання дозволяє досягти нового рівня точності в дорожньому будівництві.

Для підтвердження адаптивних властивостей розробленої системи було проведено дослідження її стійкості до різких змін умов навколишнього середовища. У дорожньому будівництві такі ситуації виникають при раптових поривах вітру або зміні вологості повітря, що спричиняє інтенсивне охолодження асфальтобетонної суміші. На рис. 3 подано результати моделювання перехідних процесів у контурі терморегулювання в разі виникнення зовнішнього збурення на двадцятій секунді технологічного циклу. Порівняння проводили між класичним ПІД-контролером, який реагує на фактичне відхилення температури, і запропонованою системою інтелектуального предиктивного контролю, що ґрунтується на нейромережевому прогнозі стану матеріалу.

Динаміка зміни температури асфальтобетонної суміші в часі t у разі виникнення зовнішніх збурень описують диференціальним рівнянням нестационарного теплового балансу, що ґрунтується на законі збереження енергії та законі

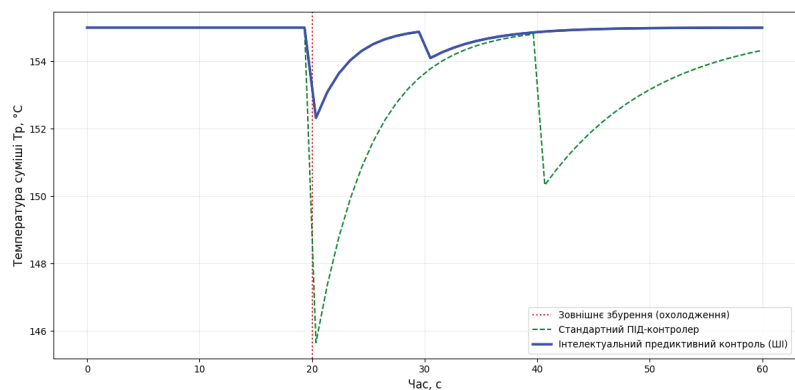


Рис. 3. Перехідні процеси в системі терморегулювання за зовнішніх збурень

конвективного теплообміну Ньютона–Ріхмана. Адаптацію цього рівняння для динамічної моделі асфальтоукладальника детально описали автори у праці [5]:

$$C \cdot m \cdot f_{rac} \frac{dT_p}{dt} = Q_{heater}(u) - Q_{loss}(T_p, T_a, V_{wind}),$$

де C – питома теплоємність; m – маса суміші; $Q_{heater}(u)$ – тепловий потік від нагрівача, що залежить від керуючого сигналу u , а Q_{loss} – втрати тепла в навколишнє середовище, визначені законом конвективного теплообміну Ньютона–Ріхмана: де h – коефіцієнт тепловіддачі, який різко зростає під час збурення (охолодження).

Стандартний ПІД-контролер формує сигнал $u_{PID}(t)$ за класичним законом:

$$u_{PID}(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt},$$

де $e(t) = T_{target} - T_p(t)$. Через інерційність системи і час запізнення нагрівача виникає глибока просадка температури (пунктирна лінія). Інтелектуальний предиктивний контроль додає до закону керування упереджувальну складову u_{predic} :

$$u_{AI}(t) = u_{PID}(t) + K_{AI} \cdot \rho(t + \Delta t),$$

де $\rho(t + \Delta t)$ – прогнозована нейромережею щільність (або температура) на наступний крок часу. Модуль ШІ ідентифікує тренд падіння температури ще до того, як похибка $e(t)$ стане критичною, і подає форсований імпульс на нагрівач. Це дозволяє обмежити падіння температури і значно швидше повернути систему до цільового значення T_{target} , що візуалізовано синьою лінією на рис. 3. Таким чином, наукова новизна підходу полягає у перетворенні реактивної системи на предиктивну через математичну інтеграцію прогнозів ШІ в динамічну модель керування.

Рівняння теплового балансу, що лежить в основі рис. 3, ґрунтується на законі збереження енергії та законі конвективного теплообміну Ньютона–Ріхмана. Ці вирази є базовими для технічної термодинаміки і теорії тепломасообміну. Адаптацію цих рівнянь для динамічного об'єкта керування (асфальтоукладальника) і виведення коефіцієнтів теплових втрат через нагрівання суміші було вперше подано і детально розписано у першій статті авторів [5]. Там же було обґрунтовано вибір структури ПІД-регулятора на основі класичної теорії автоматичного керування за Огата.

Графічні залежності демонструють принцип різниці як регулювання під час використання різних підходів. У разі виникнення

збурення стандартний автоматичний контролер демонструє значну інерційність, що призводить до падіння температури суміші нижче критичної позначки 150 °С. Процес повернення системи до цільового значення 155 °С триває понад 20 с, що в реальних умовах може спричинити укладання ділянки з недостатніми адгезійними властивостями.

На відміну від класичного підходу, інтелектуальна система, використовуючи предиктивні можливості нейронної мережі, ідентифікує загрозу охолодження майже миттєво. Завдяки превентивному збільшенню потужності нагрівальних елементів вдається мінімізувати амплітуду температурної просадки до критично малих значень. Час стабілізації показника скорочується у три рази, що забезпечує безперервність підтримки оптимального теплового балансу. Це підтверджує, що інтеграція ШІ в контур управління дозволяє системі діяти проактивно, нівелюючи вплив несприятливих факторів ще до моменту їх критичного впливу на якість дорожнього покриття. Такий характер регулювання гарантує структурну цілісність шару й високу точність дотримання технологічних регламентів у динамічних умовах будівельного майданчика.

Синтез замкнених контурів керування з предиктивними моделями ШІ дозволив створити систему, здатну діяти проактивно і нівелювати вплив зовнішніх збурень ще до їх критичного впливу на якість покриття. Результати моделювання підтвердили, що використання нейромережевих прогнозів забезпечує стабільність показника щільності на рівні 98 %, що значно перевищує можливості стандартних алгоритмів автоматизації. Скорочення часу реакції на температурні коливання у три рази і зниження ймовірності виникнення прихованих дефектів до мінімальних значень доводять високу надійність запропонованого підходу. Впровадження такої інтелектуальної платформи гарантує відповідність дорожнього полотна нормативним вимогам і забезпечує суттєвий економічний ефект за рахунок оптимізації енерговитрат і підвищення довговічності транспортних споруд.

Висновки

1. Розроблена інтелектуальна система адаптивного керування дозволяє розв'язати проблему затримки реакції традиційних автоматизованих комплексів на стохастичні зміни зовнішніх чинників під час укладання асфальтобетону. За-

пропонована у цій роботі система, що ґрунтується на інтеграції ШІ-предиктора у замкнений цикл, зменшує негативний вплив температурної нестабільності та коливань вологості, що зазвичай призводять до виникнення прихованих дефектів і неоднорідності структури покриття. Завдяки інтеграції предиктивних нейромережових моделей у замкнений контур регулювання вдається забезпечити проактивне управління процесом, де коригування параметрів відбувається на основі прогнозу стану матеріалу, а не лише за фактом відхилення від норми.

2. У процесі дослідження отримано результати, що підтверджують високу ефективність розроблених алгоритмів предиктивного керування. Точність прогнозування потенційно дефектних зон досягла 96 %, а коефіцієнт стабільності показника щільності вздовж усієї дистанції укладання склав 0,97. Втілення цієї системи дозволило у три рази скоротити час реакції на температурні збурення і знизити ймовірність появи зон недоуцільнення до критично низь-

кого рівня 1,8 %. Окрім підвищення достовірності та якості контролю, реалізація адаптивних алгоритмів нагріву забезпечила економію енергоресурсів на 14 %, що свідчить про високу технологічну та економічну доцільність розробки.

3. Попри отримані позитивні показники існують певні обмеження, які потребують подальшого вивчення. Верифікацію і валідацію системи ІСАК було проведено переважно на ділянках з рівною геометрією та в обмеженому температурному діапазоні, що не повною мірою відображає складність робіт на об'єктах зі складним рельєфом, поворотами або ухилами. Також залишається актуальним питання стабільності бездротової передачі даних від сенсорів в умовах активних завад на будівельному майданчику. Для вирішення цих проблем майбутні дослідження будуть спрямовані на адаптацію алгоритмів ШІ до роботи у складних топографічних умовах і розширення набору вхідних параметрів за рахунок інтеграції даних георадарного сканування.

References

- [1] S. Yu *et al.*, “Data sensing and compaction condition modeling for asphalt pavements. Automation in Construction”, 2023, Vol. 154. pp. 105021. Available: <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2023.105021>
- [2] Z. Xue *et al.*, “Artificial Neural Network-Based Method for Real-Time Estimation of Compaction Quality of Hot Asphalt Mixes”, *Applied Sciences*, 2021, Vol. 11, No. 15, pp. 7136. Available: <https://doi.org/10.3390/app11157136>
- [3] H. Majidifard *et al.*, “Deep machine learning approach to develop a new asphalt pavement condition index”, *Construction and Building Materials*, 2020, Vol. 247, pp. 118513. Available: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118513>
- [4] N. Karballaezadeh *et al.*, “Intelligent road inspection with advanced machine learning; hybrid prediction models for smart mobility and transportation maintenance systems”, *Energies*, 2020, Vol. 13, No. 7, pp. 1718. Available: <https://doi.org/10.3390/en13071718>
- [5] Y.V. Steshenko and A.G. Protasov, “Automated control system for the technological process of asphalt concrete coating laying”, *Tekhnichna Diahnostyka ta Neruinivnyi Kontrol (Technical Diagnostics and Non-Destructive Testing)*, 2025, No. 2, pp. 30–35. Available: <https://doi.org/10.37434/tdnk2025.02.05>
- [6] D. Storozhyk *et al.*, “Enhancing neural network efficiency in automated image analysis for thermal nondestructive testing”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Sofia, 2024, Vol. 54, pp. 242–252. Available: <https://doi.org/10.55787/jtams.24.54.2.242>
- [7] J. Leukel *et al.*, “Machine learning models for predicting physical properties in asphalt road construction”, *Construction and Building Materials*, 2024, Vol. 440, pp. 137397. Available: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.137397>
- [8] M. Al-Ammari *et al.*, “Innovative machine learning approaches for predicting asphalt content during Marshall design”, *Materials*, 2025, Vol. 18, No. 7, pp. 1474. Available: <https://doi.org/10.3390/ma18071474>
- [9] R. Delgadillo and H.U. Bahia, “Effects of temperature and pressure on hot mixed asphalt compaction: Field and laboratory study”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2008, No. 20 (6), pp. 440–448. Available: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0899-1561\(2008\)20:6\(440\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0899-1561(2008)20:6(440))

Y.V. Steshenko, A.G. Protasov

INTELLIGENT SYSTEM FOR ADAPTIVE CONTROL OF THE TECHNOLOGICAL PROCESS OF LAYING ASPHALT CONCRETE BASED ON NEURAL NETWORK MODELS

Background. The quality and durability of asphalt concrete pavement directly depend on compliance with technological parameters during its laying process. Any violation of such parameters inevitably leads to the appearance of hidden defects. Traditional automated technological process control systems are often based on rigid algorithms that are unable to fully take into account the complex nonlinear

effects of air humidity, material cooling rate and dynamic base stiffness. The implementation of closed-loop control loops based on feedback ensures the stability of the laying parameters regardless of external disturbances. However, the effectiveness of such systems is significantly limited without the integration of predictive models that can detect potentially defective areas even before the final cooling of the mixture.

Objective. The purpose of the study is to develop and analyse the effectiveness of an intelligent adaptive control system (IACS) for the asphalt concrete paving process, which integrates a predictive neural network model into a closed-loop control loop.

Methods. To implement the system, object-oriented programming methods (Python language) and machine learning libraries (XGBoost, TensorFlow) were used. The methodology is based on comparative computer modelling of 1000 technological cycles. The results were verified by comparing the predicted density values with reference physical and mathematical models of compaction.

Results. The implementation of the proposed system allowed for an increase in the coating density by 4 times compared to standard systems. The reduction of the reaction time to temperature disturbances from 18.5s to 5.2s confirms the ability of the system to act proactively and reduce the probability of hidden damage to the level of 1.8 %. The value of the process stability coefficient at 0.97, validates the dependability of the models and indicates their preparedness for practical application.

Conclusions. The proposed intelligent adaptive control system allows solving the problem of delayed response of traditional automated complexes to stochastic changes in external factors during asphalt concrete laying. The proposed approach eliminates the negative impact of temperature instability and humidity fluctuations, which usually lead to the appearance of hidden defects and heterogeneity of the coating structure. Thanks to the integration of predictive neural network models into a closed control loop, it was possible to provide proactive process control, where parameter adjustment occurs based on the forecast of the material state, and not only on the fact of deviation from the norm.

Keywords: automated systems; adaptive control; artificial intelligence; neural networks; asphalt concrete; closed system; quality prediction.

Рекомендована Радою
факультету робототехніки та приладобудування
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
13 січня 2026 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.353417>

УДК 535.317.9

І.Г. Чиж^{1*}, <https://orcid.org/0009-0000-3738-4835>

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна, <https://for.org/00syn5v21>

*Відповідальний автор: i.g.chizh@gmail.com

ВАРІОЛІНЗИ ЯК НЕРУХОМІ ЕЛЕМЕНТИ ZOOM-ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Проблематика. Запропоновано модернізацію та структурне удосконалення zoom-оптичних систем шляхом застосування в них нерухомих електрично чи механічно керованих варіолінз.

Мета дослідження. Провести огляд і проаналізувати досягнення у сфері розробок та удосконалень адаптивних варіолінз із зовнішньо керованою оптичною силою, призначених для використання в зум-оптичних системах як нерухомих компонентів. З'ясувати причини, що можуть призводити до нестабільності положення кардинальних точок оптичної системи варіолінз.

Методика реалізації. Проаналізовано фізичні основи дії сучасних зовнішньо керованих варіолінз з розглядом умов, що забезпечують зміну оптичної сили варіолінз. Використано загальні положення теорії оптичних систем для оцінювання впливу зміни геометричної форми і положення поверхні поділу робочих оптичних середовищ варіолінз на значення їх оптичної сили. Проаналізовано і систематизовано дані, представлені на сайтах виробників та у відкритих інформаційних джерелах і публікаціях розробників варіолінз, що стосуються властивостей конструкції їх реальних моделей.

Результати дослідження. Аналітичний огляд процесів, що обумовлюють зміну оптичної сили мембранних та електрозмочуваних варіолінз, показав, що варіації значень їх оптичної сили забезпечуються як змінами радіуса кривизни поверхні, що розділяє робочі оптичні середовища, так і зміною положення вказаної поверхні уздовж оптичної осі. Наслідком цього є зсув уздовж оптичної осі варіолінзи кардинальних (головних і вузлових) точок варіолінз і відповідний зсув їх точок фокусів.

Висновки. У розглянутих мембранних та електрозмочуваних варіолінзах зміна геометричних форм простору, який заповнюють робочі оптичні середовища, впливає не тільки на оптичну силу, але і на положення кардинальних точок варіолінз. Тому в zoom-оптичних системах варіолінзи не можна вважати нерухомими оптичними компонентами, хоча положення їх корпусів у конструкції систем фактично є фіксованими. Фактор зсуву кардинальних точок варіолінз потребує детального подальшого дослідження і визначення функціональної залежності між вказаним зсувом і значеннями оптичної сили варіолінзи. Практичне використання результатів цих досліджень дозволить вдосконалити алгоритм параметричного синтезу zoom-оптичних систем із вбудованими в них варіолінзами, а також дозволить мати теоретичне підґрунтя для більш точного програмування рівня керуючих електричних сигналів, які подаються від мікроконтролерів на варіолінзи. Це сприятиме запобіганню під час функціонування zoom-оптичних систем шкідливих осьових зсувів сформованих ними зображень (дефокусування зображень) і порушення абераційної корекції системи.

Ключові слова: мембранні варіолінзи; електрозмочувані варіолінзи; кардинальні точки варіолінз; зсуви кардинальних точок варіолінз.

Вступ

Поперечне, кутове і поздовжнє збільшення зображень, сформованих оптичними системами, є їх важливими функціональними параметрами. У випадку систем візуальних оптичних приладів до вказаних параметрів ще додають видиме збільшення. Усі вони характеризують співвідношення між лінійними чи між кутовими розміра-

ми предметів та їх зображеннями, що сформовані оптичними системами.

Вказані параметри відносять до типу параксіальних, а тому їх визначають на основі гаусівської оптики та головних формалізованих положень теорії ідеальної оптичної системи – рівнянь Ньютона і Гауса, з яких випливає, що значення вищевказаних параметрів залежать від фокусної відстані оптичної системи і дистанції до площини об'єктів.

Пропозиція для цитування цієї статті: І.Г. Чиж, «Варіолінзи як нерухомі елементи zoom-оптичних систем», *Наукові вісті КПИ*, № 1, с. 50–59, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.353417>

Offer a citation for this article: I.G. Chyzh, “Vario-lines as fixed elements of zoom optical systems”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 50–59, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.353417>

© Автор(и).

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

У переважній більшості оптичних систем їх фокусна відстань є величиною незмінною. Утім, існує потреба в оптичних системах, в яких за фіксованої відстані до об'єктів спостережень фокусна відстань повинна дискретно, або безперервно змінюватися в потрібному діапазоні значень, чим досягають відповідної зміни масштабу зображень. Відповідно, при цьому змінюються і розміри поля зору таких систем. В сучасній термінології такі оптичні системи називають zoom-системами.

Якщо zoom-система побудована з використанням оптичних елементів чи компонентів з незмінними конструктивними параметрами, бо їх виготовляють із твердих оптично однорідних матеріалів, то для досягнення zoom-ефекту потрібна зміна їх взаємного розміщення вздовж оптичної осі. У цих випадках використовують механізми і приводи, які дозволяють пересувати ці елементи відповідно до встановлених для них функціональних залежностей. Цим забезпечують потрібну зміну фокусної відстані і збільшення сформованих оптичних зображень. Зрозуміло, що механізми і приводи зазвичай суттєво ускладнюють конструкцію оптичної системи, збільшують її габарити і собівартість, іноді не дозволяють мати потрібну швидкодію.

Природно, що вищевказані недоліки таких zoom-систем мотивували до пошуків і винаходів адаптивних оптичних елементів, які були б здатні майже миттєво змінювати свою фокусну відстань (чи оптичну силу як величину, зворотну фокусній відстані), при цьому залишаючись у системі нерухомими.

Використання адаптивних оптичних елементів, безумовно, сприяє суттєвому спрощенню конструкції системи, зменшенню її габаритів і збільшенню швидкодії адаптації, чому суттєво сприяє електронне керування варіокомпонентами, та їх комп'ютерне інтегрування.

Останнім часом спостерігається помітне зростання застосування адаптивних оптичних елементів, особливо в таких пристроях, як камери мобільних телефонів, вебкамери, міні-проектори, технічний зір, окуляри, 3D-дисплеї та інше. Найширшого використання і найбільшого розвитку серед них отримали варіолінзи [1, 2, 3, 4]. Ознайомлення широкого кола спеціалістів зі світовими досягненнями у сфері розробки нової елементної бази zoom-оптичних систем, до якої входять електрично керовані варіолінзи, а також аналіз стабільності положення їх кардинальних оптичних елементів зі зміною оптичної сили є метою цієї роботи.

Постановка задачі

Завданням цієї роботи є здійснення огляду досягнень у сфері розробок та удосконалень адаптивних варіолінз із зовнішньо керованою оптичною силою, призначених для використання в zoom-оптичних системах як нерухомих компонентів, з виявленням причин, що можуть призводити до нестабільності кардинальних елементів оптичної системи варіолінз.

Огляд адаптивних варіолінз

Пошук принципів дії лінз, здатних під зовнішнім електричним керуванням змінювати свою оптичну силу, залишаючись при цьому просторово нерухомими, привів до появи декількох типів варіолінз, в яких для їх функціонування використовують різні фізичні ефекти. До таких лінз відносять [1]:

- мембранні варіолінзи;
- варіолінзи на основі ефекту електрозмочування;
- діелектрофоретичні варіолінзи;
- рідкокристалічні варіолінзи.

Принцип дії, який є загальним до всіх цих лінз, полягає у зовнішньо керованій зміні конструктивних параметрів їх оптичних середовищ. До них належать радіус поверхні, що розділяє робочі оптичні середовища лінзи, та його осьове положення, показники заломлення оптичних середовищ.

Зміна значень цих параметрів не тільки викликає зміну оптичної сили, а також може приводити до руху їх кардинальних точок. Це явище обумовлене фізичними ефектами, покладеними в основу їх функціонування, тому під час аналізу положення кардинальних точок варіолінз треба враховувати їх конструктивні властивості і способи керування оптичними силами варіолінз.

Оскільки діелектрофоретичні та рідкокристалічні варіолінзи ще перебувають на стадії наукових досліджень, й до того ж вони за потенційними можливостями більш придатні для використання як мікролінзових растрових систем, то основну увагу в цій роботі присвячено огляду й аналізу мембранних та електрозмочуваних варіолінз.

Мембранні варіолінзи

З точки зору складності технічної реалізації порівняно простішими є мембранні варіолінзи,

через що їх розвиток почався раніше з-поміж усіх інших типів варіолінз. Головним, ключовим елементом мембранних варіолінз є еластична плівка, здатна до розтягування під зовнішнім тиском. У лінзі мембрана розділяє два прозорих оптично однорідних середовища (рис. 1).

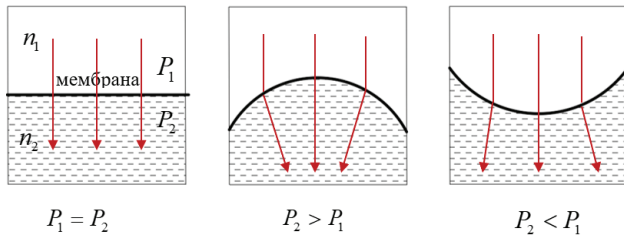


Рис. 1. Принцип дії мембранної варіолінзи: n_1, n_2 – показники заломлення оптичних середовищ над мембраною і під нею; P_1, P_2 – тиск над і під мембраною відповідно

Такими оптичними середовищами можуть бути повітря й вода або дві рідини з різними показниками заломлення, але з якомога більш близькими значеннями питомої ваги. Останнє сприяє суттєвому зменшенню впливу на форму еластичної мембрани гравітаційної сили при різних положеннях лінзи відносно горизонтальної площини.

Еластична мембрана повинна мати такі властивості:

1. Високу і рівномірну по її поверхні здатність пропускати крізь себе електромагнітні хвилі потрібного спектрального діапазону. Поверхня мембрани має бути дуже гладкою як у розслабленому, так і в розтягнутому стані.

2. Поверхня мембрани повинна розтягуватися і випинатися значною мірою без будь-яких локальних спотворень форми та пошкоджень. Після зняття сили розтяжка мембрана повинна добре відновлювати початкову форму.

3. Мембрана не повинна хімічно взаємодіяти з робочою рідиною.

4. Матеріал мембрани повинен мати високу температуру плавлення, зберігати механічні властивості в широкому діапазоні температур, не набухати в умовах підвищеної вологості, не руйнуватися під впливом ультрафіолетового випромінювання, мати достатній термін служби.

Найкращим матеріалом для створення мембрани, що відповідає зазначеним вище вимогам, є полідиметилсилоксан (PDMS) [1].

Форма еластичної мембрани – пласка, опукла чи увігнута – залежить від різниці значень тиску P_1 і P_2 . Радіус кривизни вигнутої мембрани R знаходять за формулою [1]

$$R = \frac{2T}{P_2 - P_1}, \quad (1)$$

де T – пружна константа матеріалу мембрани.

Форму поверхні мембрани описують твірною функцією [1]

$$Z(x) = \frac{P_2 - P_1}{4T}(a^2 - x^2), \quad (2)$$

яка свідчить про те, що форма поверхні є параболоїдною, тобто асферичною (рис. 2).

З виразів (1) та (2) незалежно від асферичності фокусну відстань мембранної варіолінзи як параксильний параметр знаходять за формулою

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \frac{2n_2 T}{(n_2 - n_1)(P_2 - P_1)}, \quad (3)$$

при цьому оптична сила лінзи в діоптріях

$$\Phi [\text{дптр}] = \frac{500(n_2 - n_1)(P_2 - P_1)}{n_2 T}. \quad (4)$$

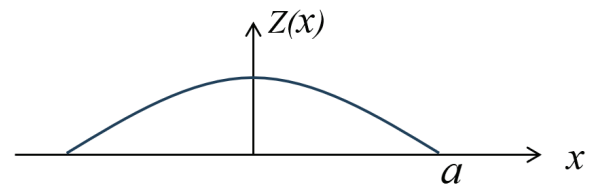


Рис. 2. Графік твірної функції поверхні мембрани ($2a$ – діаметр мембрани)

З формул (3), (4) видно, що для збільшення діапазону зміни оптичної сили лінзи потрібно збільшувати різницю між показниками заломлення робочих середовищ, діапазон різниці значень тиску, що діють на мембрану з обох її сторін, і мати менші значення пружної константи матеріалу мембрани.

Щоб забезпечити потрібні значення $(P_2 - P_1)$, використовують актуатори (механічні та електричні приводи) різних конструкцій. Перший патент щодо мембранної лінзи зі змінною фокусною відстанню був виданий ще у 1968 р. [5]. Відтоді для деформації форми поверхні лінзи було запропоновано різні конструкції актуаторів, такі як шприц [6, 7, 8, 9], серводвигун [10, 11], п'єзоелектричний [12, 13, 14], штучний м'яз [15] і звуковий котушковий привід (VCA) [16, 17]. Усі ці конструкції можна умовно поділити на дві групи за такою ознакою – поєднаними чи розділеними є камери лінзи і резервуар, де міститься рідина, яку під тиском подає актуатор у камеру лінзи. На рис. 3 показано схему пред-

ставника першої групи мембранних варіолінз, в якому актуатор працює як шприцевий насос.

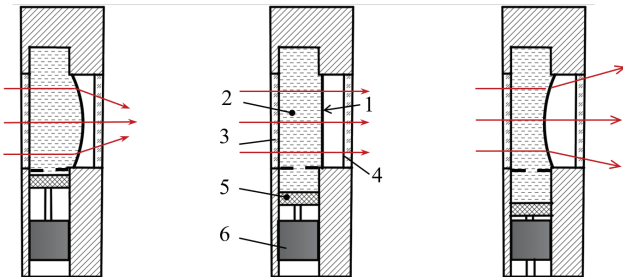


Рис. 3. Мембранна двокамерна варіолінза: 1 – мембрана; 2 – рідина; 3, 4 – вхідне і вихідне скляні вікна; 5 – поршень; 6 – сервопривід

Камера лінзи (верхня частина схеми) і камера резервуара (нижня частина схеми), де міститься надлишок рідини, розділені діафрагмою з невеликим отвором або спеціальним трубопроводом. У камері резервуара міститься поршень, який пересувається за допомогою сервоприводу, втягуючи чи виштовхуючи рідину, що потрапляє в камеру лінзи, змінюючи тим самим форму мембрани. Сервопривід має електроніку керування, яка через зсув поршня програмовано встановлює й утримує потрібну оптичну силу варіолінзи. Як привод поршня може бути також використаний програмно керований лінійний кроковий мікродвигун.

На рис. 4 зображено спрощену схему другого типу мембранної варіолінзи, в якій камера лінзи і резервуар поєднані. Вплив на форму еластичної мембрани 1 здійснює актуатор 6 у вигляді пластин або диску, зсув, або вигін яких переміщує рідину в камеру лінзи через отвори 5 у скляній пластині 4. Пластини 2 й 4 слугують вікнами варіолінзи.

Актуатором слугує двошарова п'єзоелектрична пластина, яка вигинається при подачі напруги окремо до її шарів, різної за величи-

ною і полярністю. При цьому через зменшення об'єму простору між мембраною 6 і скляною пластиною 4 форма еластичної мембрани стає опуклою, і лінза отримує оптичну силу із знаком плюс (рис. 4, б). Навпаки, збільшення об'єму вказаного простору витягує рідину з камери лінзи, чим викликає увігнутість форми еластичної мембрани, лінза отримує оптичну силу із знаком мінус (рис. 4, в).

В описах до останніх моделей мембранних варіолінз згадується актуатор Bobbin with voice coil, що діє за принципом звукової котушки [16, 17]. Він не потребує високої напруги, як у п'єзоактуаторах. Це мініатюрний, з малим споживанням електроенергії лінійний двигун, який до цього був рекомендований для використання в оптичних системах мобільних телефонів і вебкамер для переміщень і фіксації положення зом-мікрооб'єктивів у процесі їх автоматичного фокусування. Такий актуатор за допомогою комп'ютерно керованого драйвера за струму в котушці до 250 мА здатний пересувати, а потім фіксувати мембрану 6 у потрібному положенні, забезпечуючи тим самим варіолінзі потрібне значення оптичної сили.

На рис. 5 [18] показано відомі на цей час комерційні моделі мембранних варіолінз. Перші три мають безпосереднє електричне керування. Їх швидкодія становить декілька мілісекунд. Модель ML-20-37 має механічне керування з використанням зовнішнього зубчастого колеса. Його кутове обертання в діапазоні від нуля до 20° дозволяє змінювати оптичну силу в діапазоні ± 18 дптр з похибкою відтворення $\pm 0,1$ дптр. Для налаштування оптичної сили цієї варіолінзи потрібний обертальний кроковий двигун із зубчастим на валу колесом, котре складає кінематичну пару із зубчастим колесом варіолінзи, тому ця варіолінза також має автоматичне електричне керування від драйвера крокового двигуна.

З-поміж відомих на цей час типів електрично керованих варіолінз безперечно перева-

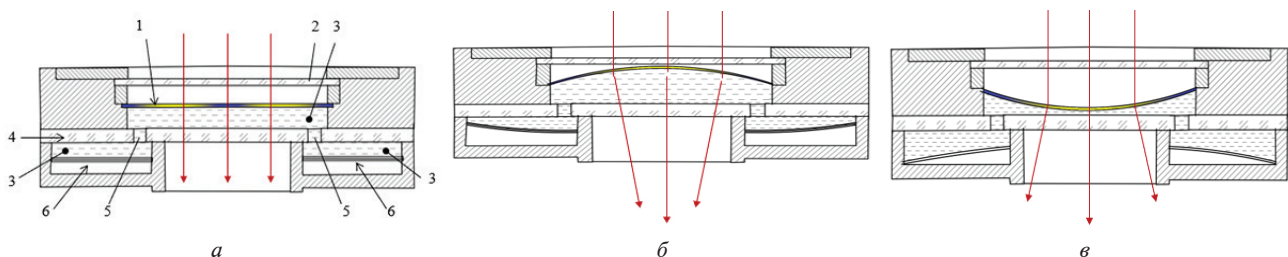


Рис. 4. Мембранна однокамерна варіолінза: 1 – мембрана; 2 – вхідне скляне вікно; 3 – рідина варіолінзи; 4 – скло з отворами; 5 – отвори в деталі 4; 6 – металева мембрана



Рис. 5. Моделі мембранних варіолінз швейцарської компанії Optotune

гу мають мембранні – у випадках, коли у варіолінзи треба мати якомога більший діаметр апертури.

Варіолінзи, що працюють на ефекті електрозмочування

На відміну від лінз з еластичною мембраною варіолінзи, що працюють на використанні ефекту електрозмочування, є більш привабливими завдяки прямому електричному (не механічному) впливу на форму оптичної поверхні, яка забезпечує потрібну оптичну силу.

Коли невелика кількість рідини (крапля) потрапляє на тверду поверхню іншого матеріалу, то вона отримує форму, яка залежить від співвідношення між когезійною та адгезійною силами. Когезійною називають силу між молекулами однієї і тієї самої речовини. Силу притягання між молекулами різних речовин називають адгезійною силою. На рис. 6 показано векторну діаграму сил натягу, що діють на каплю рідини, у місцях її контакту з поверхнею іншого твердого матеріалу [1].

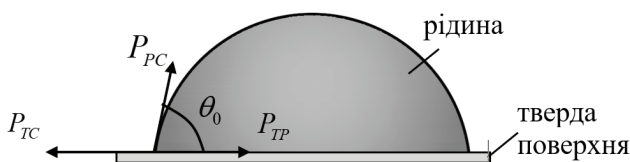


Рис. 6. Векторна діаграма сил натягу: P_{TP} – сила натягу на межі твердої речовини й рідини; P_{TC} – сила натягу на межі твердої речовини і середовища навколо краплі рідини; P_{PC} – сила натягу на поверхні краплі рідини, що контактує із середовищем навколо краплі рідини; θ_0 – кут контакту

Взаємодію вказаних сил описують рівнянням [19]

$$P_{TC} = P_{TP} + P_{PC} \cdot \cos \theta_0, \quad (5)$$

з якого кут контакту θ_0 є результатом поверхневого напруження (вільної енергії поверхні) між рідиною і твердим тілом, оточеним паровою рідиною або іншою речовиною:

$$\cos \theta_0 = \frac{P_{TC} - P_{TP}}{P_{PC}}. \quad (6)$$

На рис. 7 показано можливі форми краплі рідини, обумовлені співвідношеннями між силами натягу P_{TP} , P_{TC} , P_{PC} . Так, згідно з (5) за $P_{TP} = 0$ $\theta_0 = 0^\circ$. Це означає, що крапля фактично розтікається по поверхні. Коли $P_{TC} = P_{TP}$, то $\theta_0 = 90^\circ$, і крапля набуває форми півсфери. За $P_{TC} = 0$ та $P_{TP} = P_{TC}$ крапля може набувати навіть сферичної форми, $\theta_0 = 180^\circ$, не розтікаючись по поверхні.

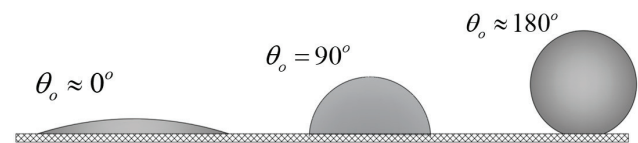


Рис. 7. Можливі форми краплі рідини на твердій поверхні

Якщо рідина і середовище, що оточує краплю рідини, мають різні показники заломлення, то ця крапля отримує властивості лінзи. Оптична сила такої лінзи залежить від форми її поверхні, яка визначається кутом контакту θ_0 , тому штучне регулювання кута θ_0 зовнішніми засобами дозволяє створювати лінзу із змінною оптичною силою, тобто варіолінзу.

З формул (5), (6) видно, що на значення кута θ_0 можна впливати, змінюючи хоча б одну

із сил натягу P_{TP} , P_{TC} , P_{PC} . Перший крок у цьому напрямку зробив фізик М. Ліппман, який ще у 1875 р. опублікував роботу «Зв'язок між електричними і капілярними явищами», де було показано, що на силу натягу P_{TP} можна впливати і тим самим змінювати форму краплі. Як контактуючу рідину було обрано електролітний розчин води і рідку ртуть, розміщені в капілярі. Із двох сторін ртуті містився електролітичний розчин. При прикладанні до електроліту із двох сторін краплі електричної напруги крапля ртуті починала рухатись у капілярі, тому що форма краплі ртуті у капілярі зліва і справа ставала різною. Це викликало різну силу натягу P_{TP} на лівій і правій сторонах краплі, яка і призводила до руху краплі ртуті у капілярі. Відкриття цього електрокапілярного явища спричинило появу таких винаходів – чутливого електрометра, оптичного перемикача, обертового рідкого мікромотора і мікронасоса.

Водночас виявилось, що під час використання у цих пристроях як однієї з рідин води з розчином у ній електролітом, пропускання через неї електричного струму спричиняє електролітичний розклад цієї води. Щоб запобігти цьому, було запропоновано використовувати тонку діелектричну плівку – ізолятор для відокремлення електролітної рідини від металевого електрода [20, 21, 22].

На рис. 8 показано схему, якою пояснюється вплив напруги V на форму краплі. Чим більша напруга, тим меншим стає значення кута θ_0 . Крапля сильніше розтікається по поверхні ізолятора, тому цей ефект отримав назву електрозмочування.

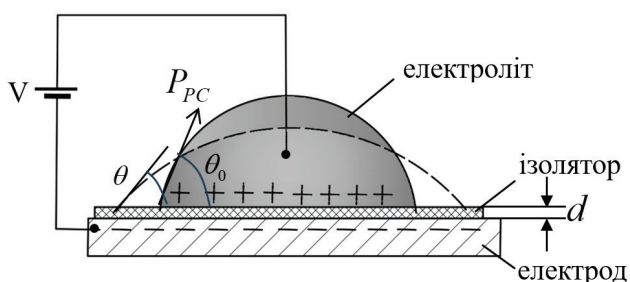


Рис. 8. Вплив прикладеної напруги V на форму краплі (штрихова лінія)

Під час подавання напруги між рідким електролітом та електродом позитивні заряди накопичуються на верхній поверхні ізолятора, а негативні – на його нижній поверхні. Накопичені заряди змінюють поверхневий на-

тяг краплі, через що змінюється кут контакту θ , крапля розтікається по ізолятору (штрихова лінія на рис. 8) і тому змінює свою форму та оптичну силу.

Кут контакту згідно з посиланнями [23, 24, 25]:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2d P_{PC}} V^2, \quad (7)$$

де θ_0 – кут контакту за $V = 0$;

ε_0 – діелектрична проникність вільного простору ($\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{J} \cdot \text{m}$);

ε – діелектрична константа ізолятора;

d – товщина діелектричного ізолятора.

З рівняння (7) випливає, що кут контакту θ пропорційний V^2 . Товщина діелектричного шару d і діелектрична проникність використаного матеріалу визначають ту робочу напругу V , за якої форма краплі забезпечує їй потрібну оптичну силу. Рівняння (7) є теоретичною основою явища електрозмочування на діелектриках.

Крапля рідини, показана на рис. 8, попри всі зміни її форми все ж може мати тільки позитивну оптичну силу, якщо показник заломлення рідини є більшим, ніж показник заломлення середовища оточуючого простору. Утім, практичні потреби вимагають від варіолінзи забезпечувати більш широкий діапазон зміни оптичної сили від позитивних до негативних значень. У цьому діапазоні треба мати і нульове значення оптичної сили. Потреба у таких варіолінзах привела до винаходу конструкції, яку показано на рис. 9. У цій конструкції вже використовують дві рідини, які:

- не мають змішуватися;
- повинні мати різні показники заломлення;
- їхня питома вага має бути наближеною одна до одної;
- одна рідина має бути електропровідною, а інша – ізолюючою;
- обидві рідини мають бути прозорими для світла;
- обидві рідини не повинні вступати в хімічну реакцію під впливом світла, тепла або будь-яких інших факторів.

Як електропровідну рідину використано електролітний розчин – електропровідну воду. У ролі діелектричної рідини застосовано оптичну олію.

Лінзова комірка на рис. 9 складається з циліндричної камери, в якій міститься незмішувана діелектрична олія та електропровідна вода. Ця вода по внутрішній зоні циліндра перебуває у прямому контакті з нижнім електродом, який

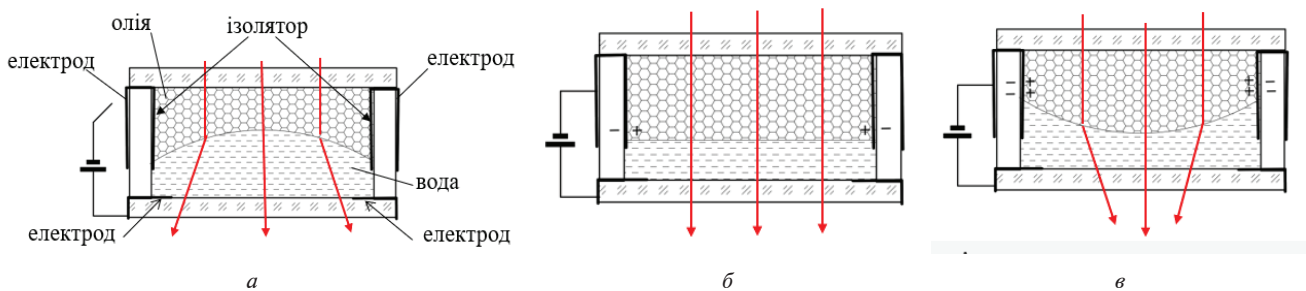


Рис. 9. Комірка варіолінзи із двома рідинами, що здатна забезпечувати негативне (а), нульове (б) і позитивне (в) значення оптичної сили

нагадує шайбу. Верхній електрод своєю поверхнею всередині циліндра в зоні, яка контактує з олією та водою, покритий діелектричною плівкою – ізолятором. Висота цього циліндричного електрода з ізолятором має бути такою, щоб за всіх напруг, які подаються на обидва електроди, межа розділення олії та води завжди була у зоні дії цього електрода (рис. 9). Між верхнім циліндричним і нижнім електродами зазор має бути достатнім. У верхнього електрода внутрішня і зовнішня бічні частини на поверхні циліндра перебувають в електричному контакті. Для отримання великого кута контакту поверхня ізолятора всередині циліндра покрита тонким гідрофобним матеріалом.

Якщо до електродів напругу не прикладають, то поверхня води через більшу силу поверхневого натягу має опуклу форму (рис. 9, а). Оскільки показник заломлення олії більший ніж показник заломлення провідної води, то лінза поводить себе як розсіювальна, тобто має негативну оптичну силу, тому промені, паралельні на вході лінзи, будуть розходитися на виході з лінзи.

Коли на електроди подають напругу, на внутрішній і зовнішній поверхнях ізолятора накопичуються протилежні заряди. При цьому через збільшення поверхневого натягу на гідрофобній поверхні вода більше змочує цю поверхню. Через це форма краплі змінюється. Зростання напруги дозволяє межу поділу двох рідин зробити плоскою (рис. 9, б). При цьому лінза отримує нульове значення оптичної сили – безкінечне значення фокусної відстані, а тому промені проходять крізь неї не заломлюючись.

Якщо напругу збільшувати й далі, вода ще більше змочує гідрофобну поверхню, тому межа, що розділяє олію та воду, набуває увігнутої форми, а лінза отримує позитивне значення оптичної сили і промені збігаються (рис. 9, в).

Нижче, на рис. 10, показано зовнішній вигляд і діапазони значень оптичної сили електрозмочуваних лінз, які виготовляє компанія Corning® Varioptic® [26]. Також наведено діаметри апертур цих лінз, які свідчать про те, що вони поступаються за цим важливим параметром мембранним варіолінзам компанії Optotune.

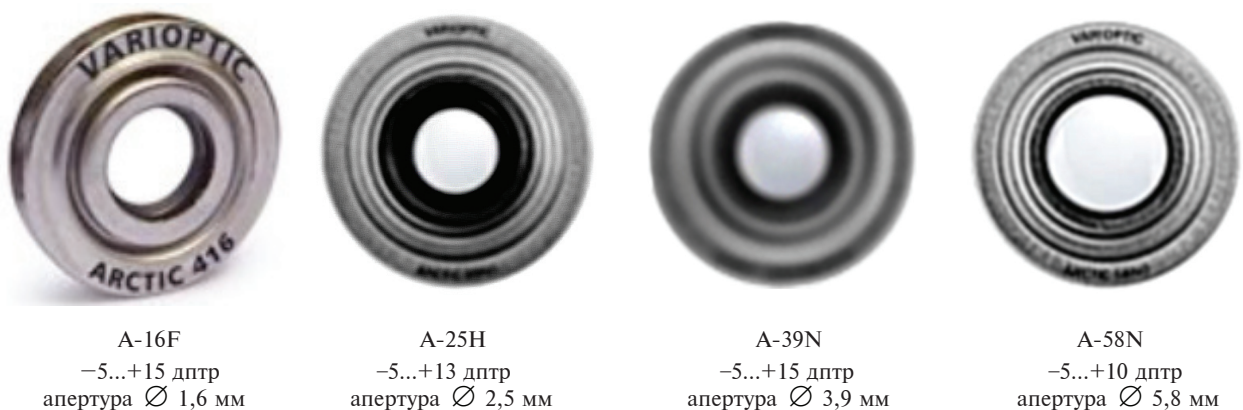


Рис. 10. Моделі електрозмочуваних лінз

Моделі електрозмочуваних лінз компанії Corning® Varioptic® [26] зображено на рис. 10.

На рис. 11 показано конструкцію комерційних моделей електрозмочуваних лінз.

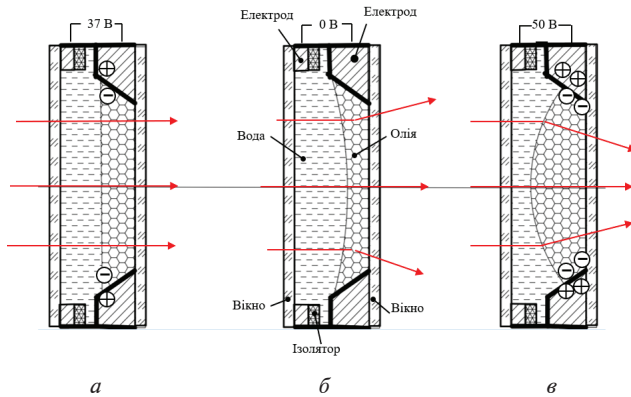


Рис. 11. Конструкція електрозмочуваних лінз компанії Corning® Varioptic®: *а* – напруги на електродах немає, лінза має найбільше негативне значення оптичної сили; *б* – напруга 37 В, яка забезпечує варіолінзі нульове значення оптичної сили; *в* – напруга 50 В, що забезпечує варіолінзі найбільше позитивне значення оптичної сили

Типовий графік залежності оптичної сили електрозмочуваних лінз подано на рис. 12 (дані взято з відкритої рекламної інформації компанії Corning® Varioptic® [27]). Пунктирні-

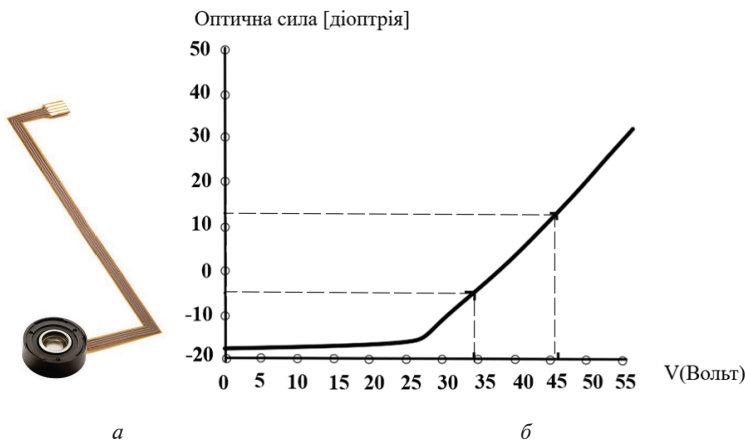


Рис. 12. Модель електрозмочуваної лінзи компанії Corning® Varioptic®: *а* – варіолінза A-39N0 в оправі з кабелем підключення до драйвера; *б* – типовий графік залежності оптичної сили електрозмочуваної лінзи від значення напруги на її електродах [27]

ми лініями виділено ділянку графіка, де він є фактично лінійним. Саме на цей лінійний діапазон зміни оптичної сили вказано на рис. 10. Як видно із графіка, фактичний діапазон зміни оптичної сили цих варіолінз лежить у межах від -15 до $+30$ діоптрій. Утім, використання всього діапазону зміни оптичної сили потребує врахувати деяку нелінійність, яка спостерігається за межами діапазону лінійності.

Висновки

1. Огляд електрозмочуваних і мембранних варіолінз, фактичного робочого діапазону зміни їх оптичної сили і реальних діаметрів їх апертур показав, що вони не можуть мати великої світлосили чи відносного отвору, а для отримання інших меж діапазону їх оптичної сили потрібно у парі з варіолінзами використовувати адаптивні лінзи з фіксованими значеннями оптичної сили.

2. Зміна оптичної сили розглянутих варіолінз неодмінно супроводжується осьовим зсувом поверхні розділу робочих середовищ через зміну різниці тиску по обидві сторони мембрани у мембранних лінзах, або через зміну умов змочування у електрозмочуваних варіолінзах.

3. Оскільки положення кардинальних точок варіолінз залежить від положення розділу робочих середовищ, то варіолінзи обох розглянутих типів при параметричному синтезі зом-оптичних систем, в яких передбачено їх використання, все ж потрібно розглядати як рухомі оптичні компоненти, хоча їх корпуси в конструкції зом-оптичних систем є нерухомими.

4. Кількісна оцінка зсувів кардинальних точок у варіолінзах, пов'язаних зі зміною їх оптичних сил, та отримання функціональної залежності цих зсувів від значень оптичної сили, має бути завданням попереднього дослідження моделей варіолінз, які плануються до інтегрування в оптичну зом-систему. Це потрібно не тільки для усунення можливих похибок фокусування зображень, а також для коректного програмування мікроконтролерів, що формують електричні керуючі сигнали до варіолінз.

References

- [1] Hongwen Ren and Shin-Tson Wu, "Introduction to Adaptive Lenses", A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2012, 274 p. Available: <https://doi.org/10.1002/9781118270080>
- [2] Yutao Huang *et al.*, "42 mm large aperture variable-focus lens based on the liquid-membrane-liquid structure", *Optics Express*, 2024, Vol. 32, pp. 44706–44720. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.539941>
- [3] Shibiao Li *et al.*, "Adaptive Varifocal Lenses Based on Dielectric Elastomer Actuator", *Photonics*, 2025, No. 12 (3), pp. 227. Available: <https://doi.org/10.3390/photonics12030227>
- [4] Lei Li *et al.*, "Adaptive liquid iris based on electrowetting", *Optics Letters*, 2013, Vol. 38, pp. 2336–2338. Available: <https://doi.org/10.1364/OL.38.002336>
- [5] B.M. Wright, "Improvements in or relating to variable focus lenses", English patent 1,209,234 (1968). Available: <https://patents.google.com/patent/US3598479A/en>
- [6] N. Sugiura and S. Morita "Variable-focus liquid-filled optics lens", *Appl. Opt.*, Vol. 32, pp. 4181–4186 (1993). Available: <https://doi.org/10.1364/AO.32.004181>
- [7] D.-Y. Zhang *et al.*, "Fluidic adaptive lens with high focal length tenability", *Appl. Phys.*, Vol. 82 pp. 3171–3172 (2003). Available: <https://doi.org/10.1063/1.1573337>
- [8] D.-Y. Zhang *et al.*, "Fluid adaptive lens of transformable lens type", *Appl. Phys.*, 2004, Vol. 84, pp. 4194–4196. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1756679>
- [9] L. Pang *et al.*, "Set of two orthogonal adaptive cylindrical lenses in a monolith elastomer device", *Opt. Express*, 2005, Vol. 13, pp. 9003–9013. Available: <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.009003>
- [10] S. Calixto *et al.*, "Pressure measurements through image analysis", *Opt. Express*, 2009, Vol. 17, pp. 17996–18002. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.17.017996>
- [11] H. Ren *et al.*, "Tunable-focus liquid lens controlled using a servo motor", *Opt. Express*, 2006, Vol. 14, pp. 8031–8036. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.14.008031>
- [12] H. Oku *et al.*, "Variable-focus lens with 1-kHz bandwidth", *Opt. Express*, 2004, Vol. 12, pp. 2138–2149. Available: <https://doi.org/10.1364/OPEX.12.002138>
- [13] H. Ren and S.T. Wu, "Variable-focus liquid lens", *Opt. Express*, 2007, Vol. 15, pp. 5931–5936. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.15.005931>
- [14] F. Schneider *et al.*, "Optimization of an adaptive PDMS-membrane lens with an integrated actuator", *Sensors and Actuators A: Physical*, 2009, No. 154, pp. 316–321. Available: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2008.07.006>
- [15] S. Xu *et al.*, "Adaptive liquid lens actuated by photo-polymer", *Opt. Express*, 2009, Vol. 17, pp. 17590–17595. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.17.017590>
- [16] C.S. Liu and P.D. Lin, "Miniaturized auto-focusing VCM actuator with zero holding Current", *Opt. Express*, 2009, Vol. 17, pp. 9754–9763. Available: <https://doi.org/10.1364/OE.17.009754>
- [17] C.S. Liu *et al.*, "Design and characterization of miniature auto-focusing VCM actuator for cell phone camera applications", *IEEE Trans. Magnetics*, 2009, No. 45, pp. 155–159. Available: <https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.2006564>
- [18] Tunable lenses – Optotune. Available: <https://www.optotune.com/tunable-lenses>
- [19] T. Young, "An essay on the cohesion of fluids", *Philos. Trans. R. Soc.*, London, 1805, No. 95, pp. 65–87.
- [20] B. Berge, "Electrocapillarité et mouillage de films isolants par leau", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1993, No. 317, pp. 157–163.
- [21] M. Vallet *et al.*, "Electrowetting of water and aqueous solutions on poly (ethylene terephthalate) insulating films", *Polymer*, 1996, No. 37, pp. 2465–2470. Available: [https://doi.org/10.1016/0032-3861\(96\)85360-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(96)85360-2)
- [22] J. Lee *et al.*, "Electrowetting and electrowetting on dielectric for microscale liquid handling", *Sensors Actuators A*, 2002, No. 95, pp. 259–268. Available: [https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(01\)00734-8](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(01)00734-8)
- [23] L.Y. Yeo and H.C. Chang, "Static and spontaneous electrowetting", *Modern Phys. Lett. B*, 2005, No. 19, pp. 549–569. Available: <https://doi.org/10.1142/S0217984905008542>
- [24] C. Quilliet and B. Berge, "Electrowetting: A recent outbreak, Current Opinion in Colloid", *Interface Sci*, 2001, No. 6, pp. 34–39. Available: [https://doi.org/10.1016/S1359-0294\(00\)00085-6](https://doi.org/10.1016/S1359-0294(00)00085-6)
- [25] B. Berge and J. Peseux, "Variable focal lens controlled by an external voltage: An application of electrowetting", *Eur. Phys. J. E.*, 2000, No. 3, pp. 159–163.
- [26] Corning® Varioptic® Lenses Market-leading adjustable lens solutions for industrial applications. Available: https://www.corning.com/media/worldwide/Innovation/documents/FINAL%20for%20Print_CorningVariopticLenses_productbrochure_Oct.18.18.pdf
- [27] Catalog "Edmund Optics" Corning® Varioptic® Variable Focus Liquid Lenses. Available: <https://www.edmundoptics.com/f/corning-varioptric-variable-focus-liquid-lenses/15042/?srsltid=AfmBOoqovbVCvEoajBZwHECPSpjOmraoyjgZC3fkJ3-TXY-UQum7xLV->

I.G. Chyzh

VARIO LENSES AS FIXED ELEMENTS OF ZOOM OPTICAL SYSTEMS

Background. The modernisation and structural improvement of zoom optical systems by utilising fixed vario lenses that are either electrically or mechanically controlled.

Objective. An evaluation of the accomplishments in the advancement and enhancement of adaptive vario lenses featuring externally regulated optical power, intended for integration into zoom optical systems as permanent elements. An analysis of the factors that could result in the instability of the cardinal points within the optical system of vario lenses.

Methods. An examination of the physical principles governing contemporary externally controlled vario lenses, with a focus on the conditions that facilitate alterations in their optical power. Application of the fundamental tenets of optical system theory to evaluate how variations in the geometric configuration and placement of the interface between the operational optical media of vario lenses influence their optical power. A thorough analysis and organization of information available on manufacturers' websites, as well as in public information sources and publications from varifocal lens developers, regarding the design characteristics of their existing models.

Results. A comprehensive analysis of the mechanisms responsible for alterations in the optical power of membrane and electrically wetted vario lenses revealed that fluctuations in their optical power result from modifications in the radius of curvature of the surface separating the working optical media, as well as by changes in the position of this surface along the optical axis. This leads to a shift along the optical axis of the vario lens of the cardinal (principal and nodal) points of the vario lens and a corresponding shift of their focal points.

Conclusions. In the examined membrane and electrowetting vario lenses, alterations in the geometric shapes of the space occupied by the working optical media affects not only the optical power, but also the position of the cardinal points of the vario lenses. Therefore, in zoom-optical systems, vario lenses cannot be regarded as fixed optical components despite the fact that their physical locations within the system design are actually fixed. The shift factor of the cardinal points of the vario lenses requires comprehensive further investigation and determination of the functional dependence between the specified shift and the values of the optical power of the vario lens. The practical application of the findings from these investigations will allow improving the algorithm of parametric synthesis of zoom-optical systems with vario lenses built into them, and will also provide a theoretical foundation for more accurate programming of the level of control electrical signals supplied from microcontrollers to the vario lenses. This will aid in averting detrimental axial shifts of the images formed by them (image defocusing) and disruption of the aberration correction of the system during the operation of zoom optical systems.

Keywords: membrane vario lenses; electrowetting vario lenses; cardinal points of vario lenses; shifts of cardinal points of vario lenses.

Рекомендована Радою
факультету робототехніки та приладобудування
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
11 грудня 2025 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року

КОМП'ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350992>

UDC 614.2+574/578+004.38

D.L. Hruzin^{*}, <https://orcid.org/0009-0004-8534-2559>
O.A. Lytvynov¹, <https://orcid.org/0000-0001-7660-1353>

¹Oles Honchar Dnipro National University,
Dnipro, Ukraine, <https://ror.org/00qk1f078>

*Corresponding author: hruzin_d@365.dnu.edu.ua

ENGINEERING OF SOFTWARE SYSTEMS BASED ON SNAPSHOT-CENTRIC CQRS WITH EVENT SOURCING ARCHITECTURE

Background. Command Query Responsibility Segregation (CQRS) with Event Sourcing (ES) is a widely adopted solution for designing scalable and high-performance information systems. However, classical CQRS with ES implementations are often associated with increased complexity in development and maintenance.

Objective. The goal of this study is to optimise the development and maintenance of software systems built on CQRS with ES by introducing an alternative variation of the architecture.

Methods. The classical architectural variation was analysed, and the components that increase the complexity of system development and maintenance were identified. Based on this analysis, an alternative architectural variation (mCQRS) is proposed, that uses a lower-complexity component set. The solution is based on a relational database in which aggregate state snapshots are treated as the source of truth, thereby reducing implementation and maintenance complexity and facilitating potential migration to other architectural variations.

Results. Representative test projects were developed for both the classical and the proposed CQRS with ES variations. Cyclomatic complexity values for a typical command execution workflow (120 for Classical CQRS and 82 for mCQRS) indicate a 31.67 % decrease in complexity. Performance measurements show that server response time for queries is identical for both variations (44 ms), whereas the end-to-end time to reach system consistency for commands is 268 ms for Classical CQRS and 347 ms for mCQRS, corresponding to a 22.76 % decrease in performance. Despite this degradation, write-operation throughput remains high in the context of established industry practices.

Conclusions. The proposed approach improves the efficiency of development and maintenance and reduces the required level of developer expertise; it is suitable for systems in which write-operation performance is not critical.

Keywords: Software Architecture; optimisation models; CQRS; Event Sourcing comparative analysis.

Introduction

The complexity of software systems (SS) is continuously increasing, while the demands for project timelines and implementation quality are becoming stricter. To handle the situation, software developers are forced to seek new approaches, architectural patterns, and technologies. Renowned books [1, 2, 3] suggest a lot of patterns and solutions, focused on how to manage the complexity of modern business-oriented software systems, making them more flexible, scalable and maintainable.

One of the effective approaches used to build SS with high-performance requirements, like E-Commerce, Banking, or Financial Systems is an event-

driven architecture (EDA) [4], which states that the system can be seen as a simulator of the real business domain in which the interaction between the components is driven by events. Thus, the event raised by a certain component causes the reaction of other components and even integrated third-party systems. This approach is also used for service-oriented systems, i.e. the systems built as a composition of autonomous, heterogeneous components-services [5]. The event-driven action may include the invocation of a service, the triggering of a business process, and/or further information publication/syndication.

Command and Query Responsibility Segregation in combination with ES architecture (hereafter

Пропозиція для цитування цієї статті: Д.Л. Грузін, О.А. Литвинов, «Інженерія програмних систем на основі архітектури CQRS з ЕС, що ґрунтується на знімку стану системи», *Наукові вісті КНУ*, № 1, с. 60–74, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350992>

Offer a citation for this article: D.L. Hruzin, O.A. Lytvynov, “Engineering of software systems based on snapshot-centric CQRS with event sourcing architecture”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 60–74, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350992>

referred to as the canonical CQRS approach) [6], which was proposed in [7, 8] can be seen as a variation of a more general EDA paradigm [9] with a concentration on increasing the speed of processing the requests divided into two categories: write and read operations.

The discussion on the use cases where CQRS with ES architecture is the most applicable is represented in [10]. The authors discuss that this sort of architecture solution is a good choice for systems that are based on events on a business level, e.g. trip systems, financial systems, etc.

The advantages of the CQRS with ES architecture compared to DDD [11, 12] include improved performance for read and write requests, as well as better flexibility and scalability due to asynchronous event processing and reduced risk of conflicts when making changes. This is because commands that modify data and queries that read data operate independently of each other. Another significant advantage is the instant storage of all events, enabling the system's state to be restored to any point in time from its creation to the present.

This study analyses the conventional CQRS with ES architecture, highlighting its limitations and reviewing existing mitigation strategies. An alternative architectural approach is introduced to address these limitations. A comparative evaluation of the classical and proposed approaches is conducted, focusing on performance and implementation complexity. While a thorough architectural comparison would necessitate a broader set of evaluation metrics, such an extensive analysis is considered beyond the scope of this work.

The object of study is the development and maintenance process of software systems based on CQRS with ES.

The subject of study is methods and architectural mechanisms for reducing development and maintenance complexity in CQRS with ES-based systems.

The purpose of the work is to optimise the development and maintenance of CQRS with ES-based software systems by introducing an alternative variation of CQRS with ES architecture.

Problem Statement

As highlighted in the earlier research [13], the primary challenges associated with CQRS with ES can be categorised into three distinct groups: technical development issues, development and maintenance complexity, changing the architectural solution modifications of SS during the later stages of development.

Technical development issues include event replay performance problems during aggregate assembly and projection rebuilds, the complexity of handling event versioning, managing General Data Protection Regulation (GDPR) compliance [14], given the immutability of events, and the lack of a guarantee that events will be delivered in the order they were published.

The development and maintenance complexity leads to additional difficulties. The complexity challenge is discussed in [15], noting that while the CQRS pattern itself is relatively simple, its combination with other approaches like DDD and ES, drastically increases complexity. As demonstrated in practice [16], when transitioning to a CQRS with ES architecture, the amount of code does not necessarily increase, but the number of layers and modules does. Each of these layers requires updates whenever a new feature is added or updated.

For example, when there is a business requirement to quickly implement a new test feature for demonstration purposes or to provide temporary functionality with minimal resource expenditure, this architecture necessitates the creation and testing of all layers, from command handlers to query handlers. The greater complexity of the system means that development and maintenance take more time and require a higher level of skill from the development team, leading to longer timelines and increased costs, which significantly reduces its attractiveness to investors.

The operation of changing the architectural solution of an SS at later stages of development is another challenging aspect. E.g. the migration of the SS from DDD to CQRS with ES architecture is far from trivial task [16]. The primary difficulty in changing the architecture of a live SS lies not in rewriting system components or redistributing layers, but in data migration. DDD architecture typically relies on a relational database [17], which is absent in CQRS with ES architecture. As a result, implementing an architectural transition strategy like Chicken Little [18] is difficult due to the need to maintain two sources of truth (the relational database and the event store) during the architectural shift, which can be a prolonged process. Other migration strategies face challenges in performing complex data migrations, including transformations and event log derivations [19]. Additionally, it is often necessary to maintain some synchronisation processes between the legacy database and the event store for a period of time after the release of the SS with the updated architecture to allow for fallback options.

Thus, this paper focuses on proposing an architectural approach that:

- Optimises the resolution of technical development issues associated with CQRS with ES architecture.
- Offers improved flexibility for migrating from one architectural solution to another, depending on project dynamics, compared to migrations between DDD and canonical CQRS architectures.

Review of the literature

In this section, we will describe technical development issues associated with CQRS with ES architecture and their known solutions, providing the minimum necessary contextual information required to understand the problem and solution.

As outlined in [13], write requests can be classified into two categories: creation-oriented and update-oriented commands. For update-oriented commands, a cache miss may occur during the aggregate retrieval stage, when the Repository attempts

to load the aggregate from the Cache but does not find it (Fig. 1). In this case, the Repository loads from the Event Store all events associated with the corresponding aggregate identifier, creates a new aggregate instance, and applies the events sequentially to reconstruct the aggregate state. This reconstruction procedure is referred to as event replay (i.e., replaying events).

The time of acquiring an aggregate by replaying events is proportional to the number of events and depends on its lifetime and the frequency of changes applied to the aggregate. In some cases, the replaying process per aggregate can take seconds, which affects the overall system performance. Thus, in the case of a large number of events and a large number of aggregates **replaying events, the process starts to cause performance issues.**

To address this issue, it is suggested to use an additional data store that retains snapshots of an aggregate's state at predefined intervals, either time-based (e.g., every 6 hours) or event-count-based (e.g., after every N events, such as 100 or 1,000)

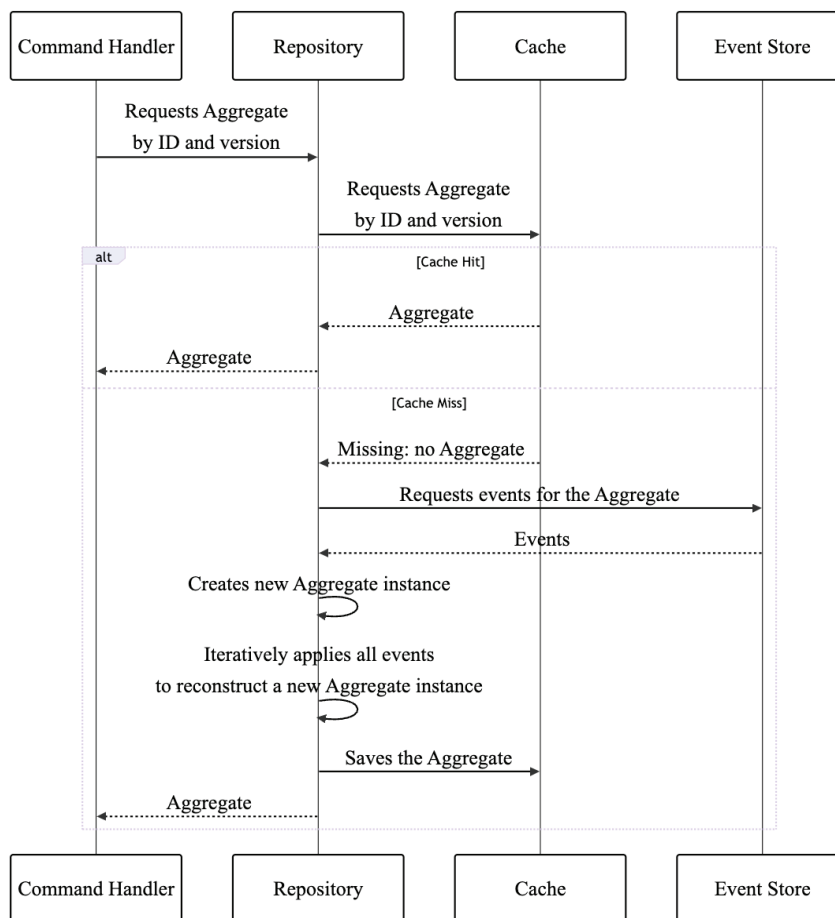


Fig. 1. Aggregate retrieval workflow in classical CQRS

[20]. A snapshot of an aggregate is a database record that contains the identifier and version of the stored aggregate, as well as the aggregate's state, often in a serialised form [21].

Another aspect of this problem is the rebuilding of projections. Rebuilding a projection is an operation where all projection data is deleted, and then all events are replayed one by one, starting from the very first event. As a result of this operation, the projection updates its data and aligns with the Source of Truth of the current version.

Similarly to the problem of aggregate assembling, the **rebuilding of projections can take a significant amount of time**: hours or even days in some cases. To solve this issue, developers use the snapshots of projections [22].

This approach solves the performance problem but adds complexity to the system. The Read Model in complex software systems is typically quite sophisticated. In accordance with DBB company [23] experience some of the projections may be subscribed to 90 percent of events. Applying the snapshot solution to some Read Model each event it is subscribed to should be modified to support both replay and snapshot driven modes of its reconstruction. This causes an increase in development effort during both development and maintenance phases.

Also, study [13] discusses several characteristics of the classical CQRS with ES approach, such as the need to handle event type versioning [24] and the immutability of events [25]. These characteristics complicate system modification, particularly the procedure for removing or anonymising all user data from the system in response to a request under the GDPR [14].

Another issue discussed in [13] is related to the event delivery subsystem based on an event bus, which does not guarantee that events will be delivered in the same sequence as they were originally published (Fig. 2) [26]. To avoid the corruption of data the projection stores the version of the aggregate state according to which it was updated [24,

27]. When the handler attempts to update the projection with version $(n - 1)$ to version $(n + 1)$ the version mismatch error is raised. The version mismatch error is typically resolved with a retry operation. The handler waits for a certain amount of time τ and then attempts to update the projection again. If, during the time τ , the projection was updated to version n according to another event, the next retry will be successful. There are cases when, after a certain number of attempts, the projection still cannot be updated. This issue can be resolved in several ways:

- The handler can request all events up to the current one from the Event Store, recreate the projection using the event replay algorithm, apply the changes related to the current event, and then update the projection.
- Log the version mismatch error for further investigation and action by a developer.

Since these situations are relatively rare, the first option is complex to implement and resource-intensive to execute, in practice, the second option is usually preferred.

Beyond technical development issues that already complicate system maintenance, CQRS with ES adds risky complexity to the system [7]. In practice, this complexity is typically mitigated through organisational and process-oriented practices, including focused team upskilling, higher-quality project documentation, expanded automated test coverage, and stricter code review and delivery pipelines. In addition, it is advised to apply CQRS with ES selectively (only to those subsystems where the expected benefits outweigh the added operational and conceptual overhead) rather than adopting it as a system-wide default. For example, in a microservices-based system [28], CQRS with ES can be limited to services that clearly benefit from event-driven separation and auditable state evolution, while other services may rely on alternative architectural approaches that better match their functional requirements and complexity constraints.

A separate study was conducted on the issue of changing the architecture solution of SS at later stages of development [16]. Other works on this topic describe that migrating an SS to another architecture is not a simple task. There are various strategies for system replacement, such as Cold Turkey and Chicken Little [18]. Cold Turkey involves rewriting a legacy system from scratch, while the Chicken Little approach assumes small incremental steps

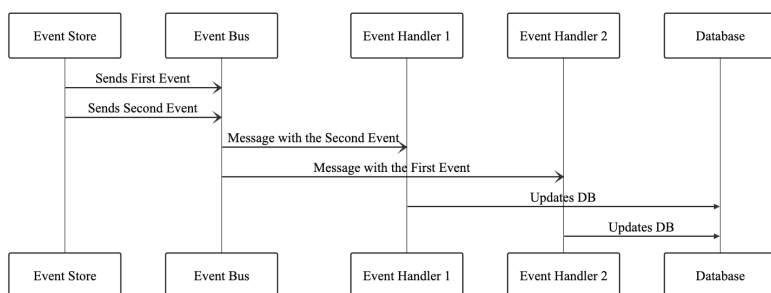


Fig. 2. Asynchronous events order

until the desired long-term objective is reached. Another approach is Butterfly [29], which focuses on the migration of legacy data in mission-critical environments. The data migration process is one of the most important and complex steps in system migration. One method to address this challenge migrating SS based on DDD to CQRS with ES is the derivation of event logs [30], which involves analysing the system and implementing an event logging module. These events are subsequently used to synchronise data between the old and new systems.

In addition to system replacement strategies, Salvatierra G. [31] considers a number of direct migration approaches, such as Screen Scraping, Sneed, Canfora, COB2WEB, and many others. However, all of these solutions are applied at a more abstract level, providing strategies for system migration, which are instrumental in successfully carrying out the migration but do not simplify the transition process itself.

The proposed methods for addressing technical development issues are applied in practice and effectively solve existing problems. However, the use of such solutions often increases the complexity of IS. The methods aimed at reducing system complexity are generally focused not on simplifying the CQRS with ES architecture itself, but on stabilising and simplifying other architectural decisions, system components, and the development process. Given this situation, the most appropriate solution for reducing complexity is to propose an alternative version of the CQRS with ES approach.

Materials and methods

To address the task of reducing the complexity of development and maintenance of the SS based on the CQRS with ES architecture, the following strategy is proposed:

1. Conduct an in-depth analysis of existing approaches consolidated into a single architectural solution (classical CQRS architectural variation).
2. Propose and describe a set of alternative solutions, grouped into a variation of the CQRS with ES architecture (mCQRS).
3. Apply both approaches in practice, measure the characteristics of typical test systems, and compare the methods based on their features and obtained metrics.

In the previous study [13], a technology for selecting an optimal CQRS with ES architectural variation for a specific project was proposed. In that study, Classical CQRS and mCQRS were considered as candidate variations. The Classical CQRS

variation was already analysed, whereas the mCQRS variation was only briefly outlined in terms of its key characteristics.

This paper provides a detailed description of the mCQRS variation. It also expands the description of Classical CQRS presented in [13] to support a transparent comparison and to enable consistent analogies between Classical CQRS and mCQRS.

Classical CQRS architectural variation

The component view of the SS built using the CQRS with ES approach is presented in Fig. 3. The analysis is based on the documentation in [8] and the example repository [32]. The SS is organised into three primary subsystems. The Write Model processes commands. The Read Model handles query requests. The Notification Subsystem provides an event-based communication layer between the Write Model and the Read Model.

The core workflow of the approach is summarised in Fig. 4. When a client submits a command, it is processed by the Write Model. Command handling produces a set of events. These events are published to the Notification Subsystem, which routes them to subscribers, including the Read Model event handlers. When a client issues a data retrieval request (query), the Read Model returns a Data Transfer Object (DTO) from a denormalised data store.

The Write Model subsystem is responsible for command execution. It first verifies that the requested command is supported by the system and that the initiating user has sufficient permissions. The command payload is then validated before further processing.

In case of successful validation, the command is routed to the Command Bus, which can be thought of as the gateway to the Command Processing Unit. The Command Bus is connected to a set of command handlers. A command handler is a component responsible for managing task execution. Typical actions of the command handler include the following.

The command handler requests an aggregate by its identifier and version from the repository. If the required version of the aggregate is available in the repository cache, it is immediately returned. If not, a new aggregate instance is created and populated with data from the latest snapshot, if one exists, or with default values otherwise.

After obtaining the aggregate, the command handler calls an appropriate method of the aggregate to change its state. If an error occurs, an acknowledgement response with error details is sent to the client, and the workflow gets terminated. If the ag-

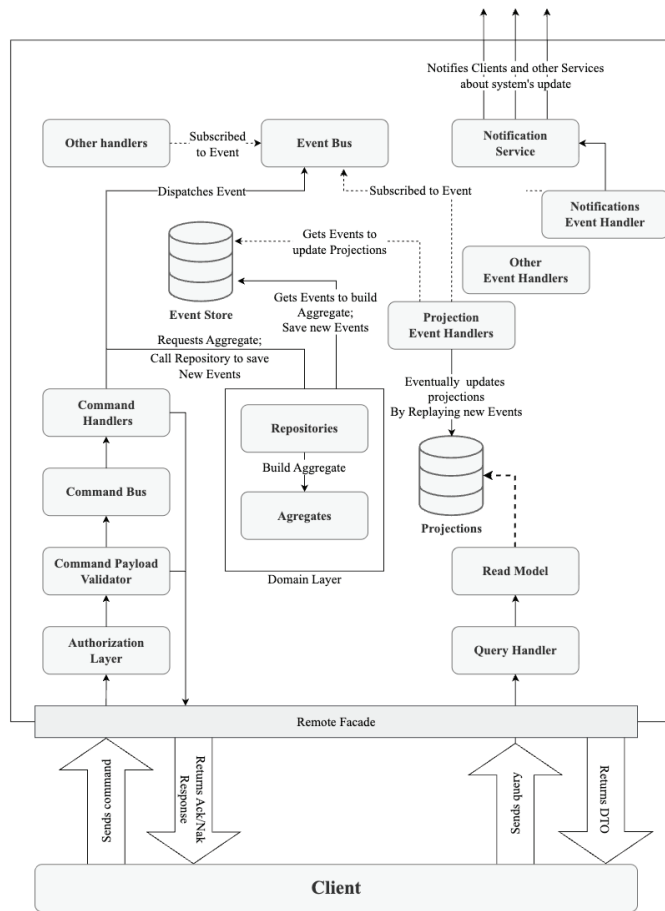


Fig. 3. Component diagram of Classical CQRS-based system

gregate is successfully updated, the method returns a set of events.

The command handler then calls the repository again, which updates the cache with the new version of the aggregate, saves the aggregate snapshot (if a predefined condition is met, e.g. every 100 events), and stores the set of events in the Event Store. After this, the events are posted to the Event Bus, i.e., passed to the Notification Subsystem.

The detailed view of the Command Processing Unit workflow is shown in Fig. 5.

The Notification Subsystem delivers events produced by Write Model command handlers to other internal components and, where required, to external environments (e.g., third-party services). Similar to the command-processing part, it includes a gateway referred to as the Event Bus and a set of event handlers. These handlers process events emitted as outcomes of command handling.

Communication between Event Bus and event handlers commonly follows the publisher-subscriber pattern [33], where handlers subscribe to specific types of events. But it should also be considered that the use of the publisher-subscriber pattern is not only one way of how the Notification System could be realised. For example, instead of an active server variant based on notifying the subscribed clients about certain events, a variant of the passive

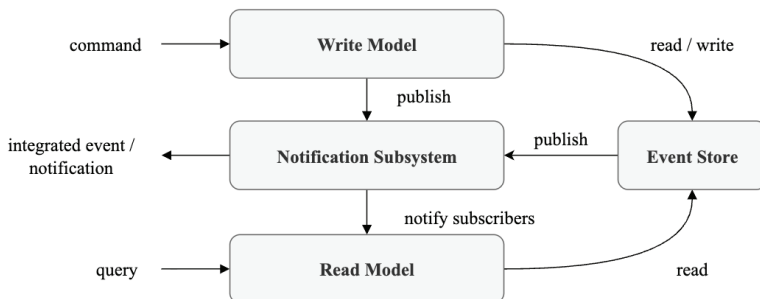


Fig. 4. Three basic subsystems and their interaction

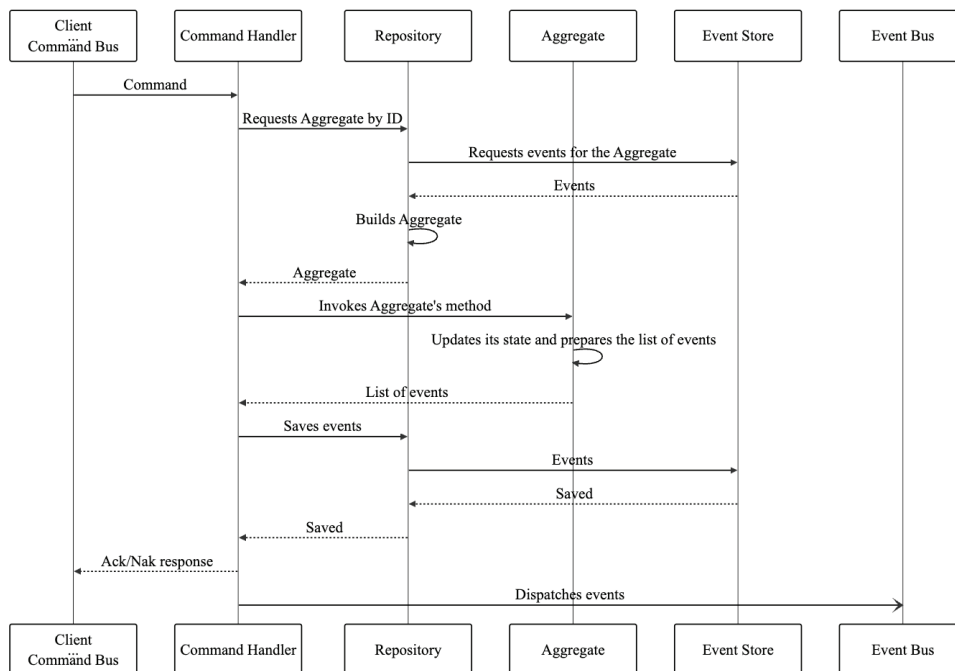


Fig. 5. Sequence diagram of the Command Processing Unit workflow

server pattern with a variation of polling the Event Store could be provided [34]. According to this variant event handlers continually request the Event Store whether the events they are interested in have occurred and, if so, pick them up and process. Of course, more sophisticated models of passive server patterns could also be used (e.g. different types of the Event Store replication) [35]. The advantages and disadvantages of the Passive server variants of the solution are well known and their detailed explanations are not the purpose of this work. We can only admit that the use of Event Bus can be regarded as the most common approach and that is the reason why we are focusing on its implementation and problems connected to this approach.

Some event handlers implement isolated business functions. For example, they may send notifications to external subscribers or perform post-processing required for internal validation and error detection. Another major class of handlers is dedicated to maintaining system consistency. In addition to the source-of-truth data store (typically the Event Store), the system includes a secondary storage layer that maintains projections, which must be updated for the system to eventually become consistent.

Projections (derived views, persistent read models) are denormalised, precomputed representations created to optimise read-side workloads. They may be customised for particular read scenarios, which

improves system responsiveness and overall performance. The storage and access mechanisms for projection data are implementation-dependent and are determined by architectural decisions and runtime constraints. A common strategy persists projections in SQL/NoSQL databases or cloud storage services. In some cases, projections are also stored in file-based repositories as documents or images. An alternative strategy keeps projections in memory and reconstructs them from the local event stream whenever server is rebooted. Consequently, projections are often treated as read-optimised services rather than as conventional persistent storage entities (e.g., database tables).

The transformation of an event stream into a projection is referred to as projecting [36]. Projection update handlers subscribe to events on the Event Bus and wait for relevant messages. When the Event Bus delivers a relevant event, the projection update handler advances the corresponding projection to the next version in accordance with the defined business logic and the event payload. The process is described in Fig. 6.

During projection updates, the Notification Subsystem also informs connected clients about changes in the system state.

Once all event handlers have successfully executed, the write request (command) processing is considered complete, and the system has reached a consistent state.

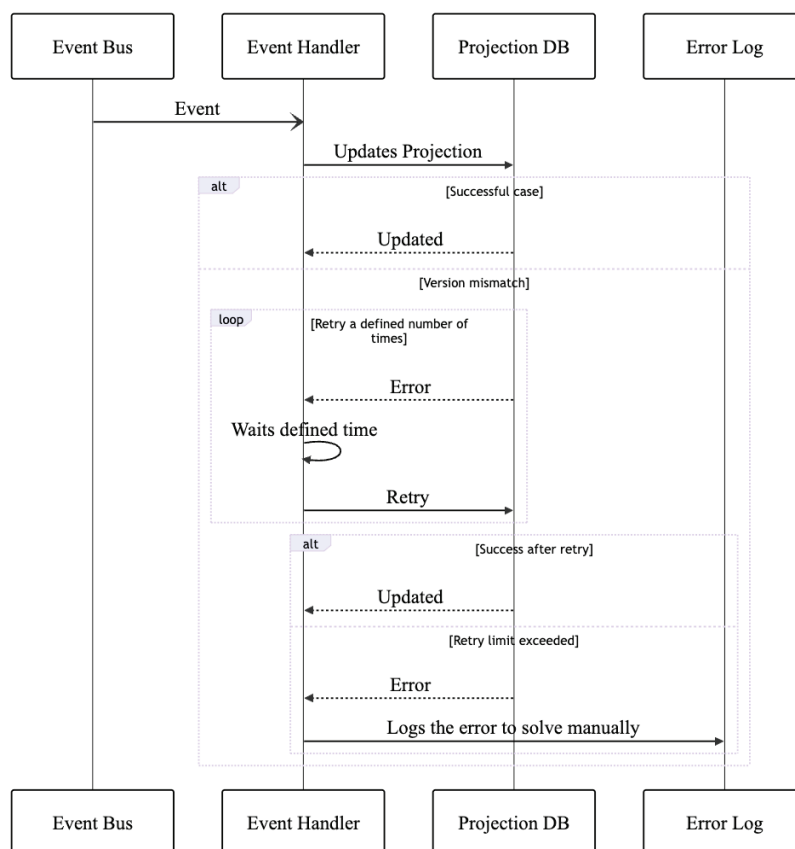


Fig. 6. Sequence diagram of the Update Projections workflow

The read request (query) process is fully handled by the Read Model subsystem. This unit includes Query Handlers, repositories for managing Projections and Projections.

When the system receives a request to read data, the Query Handler requests data from the corresponding repository, which retrieves pre-prepared data from Projections.

CQRS with ES approach with Snapshot database as a source of truth (mCQRS)

For certain systems, immediate response for write operations may not hold significant value. Usually, these are systems with a low percentage of write operations, like 20 % or less. Therefore, it is advisable to consider the following modified system architecture, which simplifies the development and maintenance of the system, as well as the potential transition of the architecture either towards classical CQRS or DDD approach.

The essence of the modification lies in shifting the focus from the event store to the database snapshot (Fig. 7). In contrast to the classical method, the

snapshot database in this approach closely resembles a relational database. The aggregate state is not serialised and may even be distributed across multiple tables. The snapshot is considered the source of truth where all the relevant information is stored. This modification makes event replay operation unnecessary for the majority of cases, replacing it with fetching data from the latest snapshot version with optional, on-the-fly, transformation.

When a command to add/modify data is received (Fig. 8) Command Handler in the same manner as in the classical solution requests aggregate by identifier and version. But instead of building aggregate from scratch (or snapshot) by replaying events, it just simply takes an up-to-date snapshot of it from the DB. Then, just as in classical CQRS, the corresponding aggregate method is called, which returns a set containing one or more events.

To update the snapshot, events are immediately applied to the aggregate. This procedure also helps ensure there are no errors during subsequent event replay operations (if they are needed). If applying an event leads to unexpected behaviour, this issue is detected before the event and the aggregate's new state

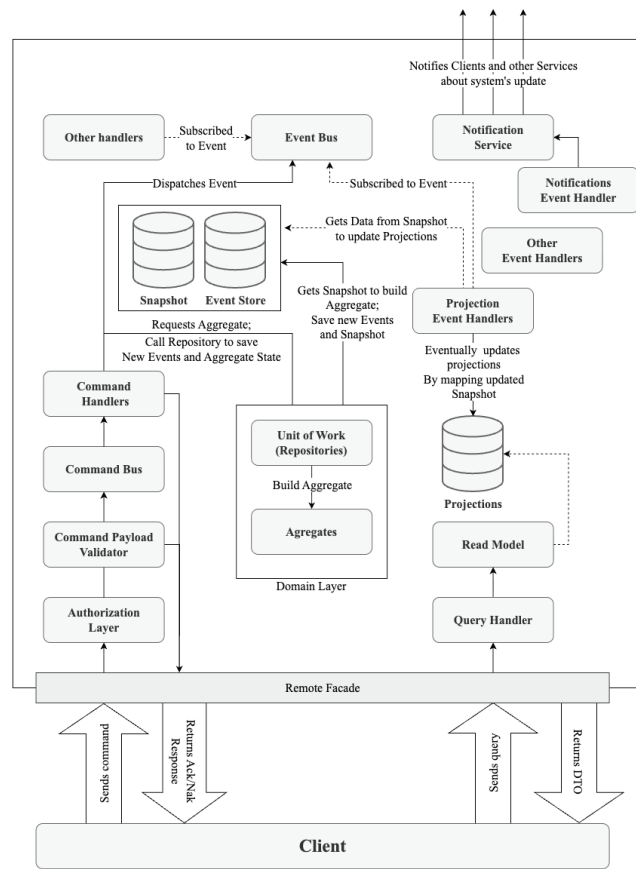


Fig. 7. Component diagram of mQRS-based system

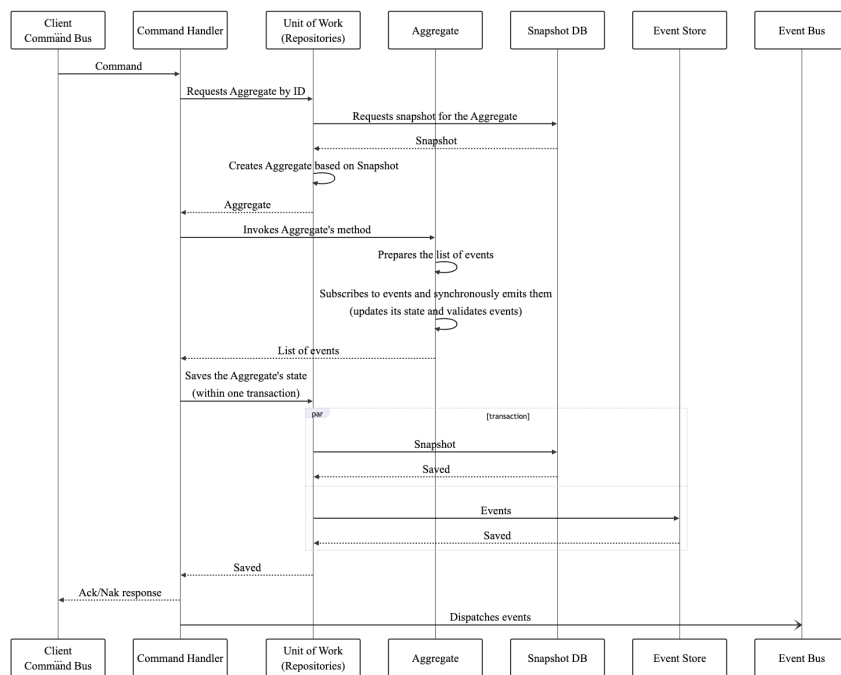


Fig. 8. The write operation flow in the proposed approach

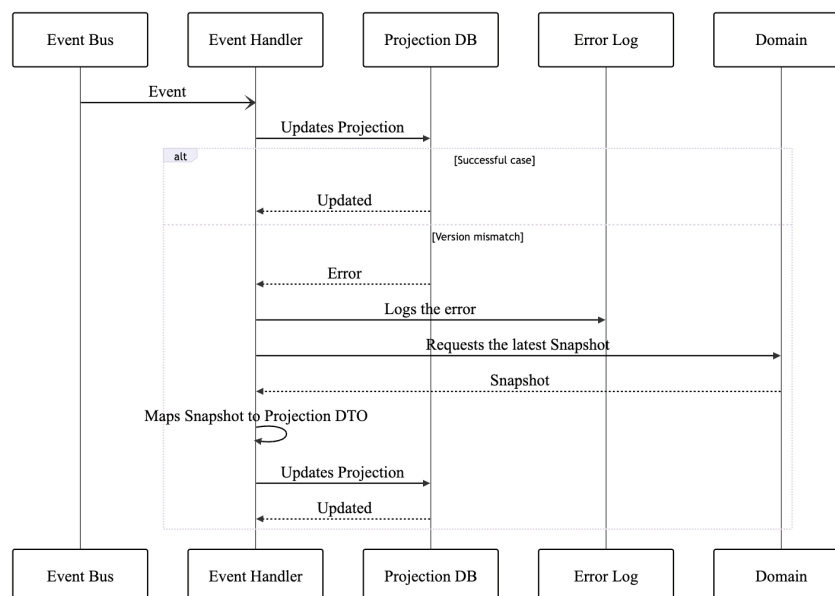


Fig. 9. Projections update in the proposed approach

are saved, allowing the operation to be cancelled. If the aggregate's state is modified successfully, it confirms that the events are valid and can be safely stored.

After the state is successfully updated, event store repository stores events and snapshot repositories update within one transaction that guarantees consistency of the Snapshot and Event Store. Despite the fact that events replay operation is not-required anymore, it is still possible when needed. Subsequently, Command Handler dispatches events to the Event Bus, to which multiple event handlers are subscribed.

In this step, the synchronous response is sent to the client. The system returns an acknowledgement response indicating that the Event Store has been updated and that the corresponding changes will be propagated across the system eventually. It should be noted that if the updated entity in the Snapshot Database contains all data required by the client application, it is technically possible to return it immediately instead of an acknowledgement response.

Projection update event handlers are subscribed to appropriate events and eventually update projections (Fig. 9). Version mismatch issue can be solved by taking the latest data from the Snapshot DB, followed by mapping if necessary. This operation is much simpler than the equivalent one in the classical CQRS approach, as it does not require event replay operation. After updating the projections, notifications about the data

update are sent to clients (e.g. mobile or web applications).

Querying data process works without any modifications and keeps the response time as short as possible in the system based on CQRS with ES architecture.

Experiments and results

The experiment aims to compare the classical CQRS and mCQRS approaches with respect to system performance and complexity.

The experiment involves developing two Representative Test Projects (RTPs) with identical functionality: one based on the classical CQRS architectural variation and the other on mCQRS. For each system, complexity and performance metrics were measured. The source code for both RTPs is available at [37]. The systems were deployed on an AWS cloud server and connected to a remote database (Amazon RDS).

For complexity measurement the McCabe's cyclomatic complexity [38] method is used. According to this method, the measurement is based on the amount and level of functions, methods, and procedures (e.g. loops and conditions). The higher this amount, the more difficult it will be for the developer to build, understand, and modify the code. For quantitative complexity assessment, the program code is divided into blocks and represented as a directed graph. Cyclomatic complexity (CC) is calculated using the following formula:

$$CC = E - N + 2P,$$

where E is the number of edges in the graph, N is the number of nodes in the graph, P is the number of connected components.

Cyclomatic complexity measurement was automated with SonarCloud tool [39]. Complexity was calculated for each RTP both at the system level and for its individual components to identify modifications that simplify development. Additionally, the complexity of adding a new simple aggregate root was measured to assess the modification complexity of the system [40].

The resulting metrics are summarised in Table 1. In these calculations, specification (test) files were excluded because they substantially inflate the metric yet do not reflect the intrinsic complexity of the system.

Table 1. Cyclomatic complexity metrics

	Classical CQRS	mCQRS
Common part	42	20
Snapshot repository	9	0
Event Store	12	7
Base projection repository	8	0
Aggregate	78	62
Aggregate repository	14	8
Aggregate	9	6
Projections repository	24	17
Total RTP (With 1 aggregate)	120	82
Total (With N aggregates)	$42 + 78 \cdot N$	$62 + 20 \cdot N$

Fig. 10 describes how complexity is distributed across the components of systems based on Classical CQRS and mCQRS variations. The purpose of this diagram is to illustrate the component hierarchy and the portion of the overall system complexity each component contributes.

To evaluate performance, average response times for write and read operations in both RTPs were measured. Averages were computed over one thousand requests per operation. The measurement script is available at [41].

Another time-based metric relevant to eventually consistent systems is the end-to-end propagation latency – the time from receiving a modification request to the corresponding projection update. This metric was also measured [41]. For half of the requests, entities were served from cache (warm), whereas for the other half, the cache was empty

(cold). The resulting average propagation latencies are summarised in Table 2.

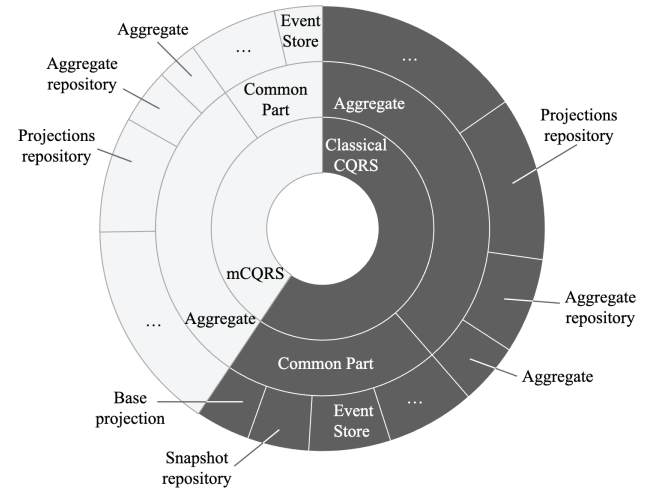


Fig. 10. Complexity distribution between components

Table 2. Performance metrics

	Classical CQRS (ms)	mCQRS (ms)
Query response time	44	44
Command response time	107	186
System eventual update time	268	347

Discussion

Having a Snapshot DB as the source of truth instead of Event Store simplifies the development and maintenance of the system. It allows the replacement of the event replay operation with retrieving the record from the database and mapping it to a new aggregate. This is supported by cyclomatic complexity metrics for the “Aggregate repository” component: 14 for classical CQRS versus 8 for mCQRS, “Projection repository” component: 24 versus 17, as well as the “Base projection” component, which exists only in the classical CQRS variation and has a complexity value of 8.

The projection update operation is simpler for machine processing than event replay. The complexity of the operation to populate an aggregate using data from a database record depends only on the number of properties in the aggregate (m). In contrast, the complexity of event replay also de-

depends on the number of events that occurred with the aggregate instance (n). Therefore, if the number of aggregate properties remains unchanged, the complexity of the populate operation using Big O notation method [42] is $O(m)$, while the event replay complexity is $O(n \cdot m)$. However, if we consider a dynamic system where the number of aggregate properties increases over time, the complexity of the populate operation would be expressed as $O(f(m))$, and event replay would be $O(n \cdot f(m))$. Thus, it can be stated that unlike the event replay algorithm, the performance of the populate operation does not degrade as more events are stored in the database.

Due to the fact that in the mCQRS approach events are not strictly immutable, rapid incorporation of changes to stored data becomes possible. This significantly simplifies tasks such as deleting user data in compliance with GDPR.

On the other hand, the immutability of events allows for a higher level of security for the Event Store. Given the absence of a need to modify events, the Event Store can be protected against changes at the configuration level. Additionally, encryption methods can be applied, and, for example, reusing hashes of previous events when adding new ones (by analogy with blockchain technology [43]) enhances data integrity.

As mentioned earlier, there are situations when the version mismatch issue cannot be resolved with multiple retries. Using the mCQRS approach, the issue is resolved by simply updating a projection from the latest snapshot (Fig. 9).

Optimising the performance of the classical CQRS approach typically involves using snapshots for both aggregates and read models. The mCQRS approach addresses these issues by merging the snapshots of the aggregate and projections, thereby simplifying the management of snapshots and mitigating the complexity. This is partially supported by the cyclomatic complexity metrics for “Snapshot repository” and “Base projection repository” component, which exists only in the classical CQRS variation and has a complexity value of 9 and 8 respectively.

The primary drawback of a system based on the mCQRS approach in comparison with classical CQRS one is the high response time for write operations, especially when adding new entities. This is a logical consequence of waiting for data writes or updates in both relational database and Event Store. Saving a series of events to the Event Store undoubtedly occurs much faster (107 ms vs 186 ms based on the experiment data). However, it is worth noting that since event processing in both variations occurs

in a similar manner, the difference in response time and the time required for the system eventual update remains the same ($186 - 107 = 79$ and $347 - 268 = 79$). The longer the eventual update logic takes, the less impact this difference has on overall system performance.

The task of migrating a system between two different architecture approaches can be logically divided into two sub-tasks: functionality transformation and data migration.

The data migration can be considered as the most difficult part, especially in cases when data storage approaches are completely different. For instance, source architecture relies on a relational database, while the target one uses Event Store. When performing such a migration, it is necessary to create an event store along with a snapshot and projection database(s), whose structure will differ from the existing relational database. This task is particularly complex for live IS, since migration must proceed smoothly and without huge downtimes.

Conversely, migrating in the other direction requires designing a relational database for a system at later stages of development, taking into account all the nuances of data structure that were previously stored as events and a set of denormalised projections.

From a data-migration perspective, the mCQRS approach is more flexible than classical CQRS. The Snapshot DB essentially serves as a relational database after migration to such approach as DDD. And the Event Store, can be used as a base for migration to the approach that consider Event Store as a source of truth (e.g. classical CQRS).

Conclusions

The scientific novelty. For the first time, an alternative modification of the CQRS with ES architecture has been proposed. This variation is well-suited for a specific class of systems where the speed of write operations is not a critical metric. Based on performance measurements for the pilot IS, the average write operation response time is 107 ms for classical CQRS versus 186 ms for the proposed approach, with the overall command processing time being 268 ms and 347 ms, respectively.

The proposed approach simplifies the resolution of several challenges associated with the classical CQRS architectural variation. The total cyclomatic complexity of a SS using the proposed approach is $62 + 20 \cdot N$, compared to $42 + 78 \cdot N$ for classical CQRS (where N represents the number of aggregate roots). Additionally, it facilitates the migration

process, particularly in comparison to the transition between DDD and classical CQRS, making architectural changes at later stages of development more manageable.

The practical significance. The proposed modification of the CQRS with ES architecture can be applied to the development of real-world systems, where the classical CQRS approach is suitable, and where the speed of write operations is not a critically

important parameter. Employing this architectural strategy will make the development of SS more efficient and reduce the requirements to the developers' level of skill compared to using the classical CQRS approach.

An experiment was also conducted, demonstrating how the proposed model can be applied in practice to describe system processes, evaluate them, and compare their parameters.

References

- [1] M. Fowler, "Patterns of Enterprise Application Architecture", *Addison-Wesley Professional*, 2002, 560 p. ISBN 978-0321127426 Available: <https://raw.githubusercontent.com/ZoranLi/Books1/master/Patterns%20of%20Enterprise%20Application%20Architecture.pdf>
- [2] B. Woolf and G. Hohpe, "Enterprise Integration Patterns: Designing, Building, and Deploying Messaging Solutions", *Addison-Wesley Professional*, 2004, 736 p. ISBN 978-0321200686. Available: <https://github.com/ivanarandac/Books/blob/master/Enterprise%20Integration%20Patterns%20-%20Designing%20Building%20And%20Deploying%20Messaging.pdf>
- [3] E. Evans, "Domain-Driven Design: Tackling Complexity in the Heart of Software", *Addison-Wesley Professional*, 2004, 534 p. ISBN 978-0321125217. Available: <https://github.com/gmoral/Books/blob/master/Domain%20Driven%20Design%20Tackling%20Complexity%20in%20the%20Heart%20of%20Software%20-%20Eric%20Evans.pdf>
- [4] Neal Ford *et al.*, "Building evolutionary architectures (2nd ed.)", O'Reilly Media, Sebastopol, CA, 2022, 262 p. Available: https://www.thoughtworks.com/content/dam/thoughtworks/documents/books/bk_building_evolutionary_architectures_second_edition_free_chapter.pdf
- [5] Y. Zhong, "Using Event Sourcing and CQRS to Build a High Performance Point Trading System", *E-Business and Applications: 5th International Conference*, Bangkok, New York: Association for Computing Machinery, 25 February 2019, pp. 16–19. Available: <https://doi.org/10.1145/3317614.3317632>
- [6] D. Betts *et al.*, "Exploring CQRS and Event Sourcing: A Journey into High Scalability, Availability, and Maintainability with Windows Azure (1st ed.)", Microsoft patterns & practices, 2012. Available: https://download.microsoft.com/download/e/a/8/ea8c6e1f-01d8-43ba-992b-35cfcaa4fae3/cqrs_journey_guide.pdf
- [7] M. Fowler, "CQRS". Available: <https://martinfowler.com/bliki/CQRS.html>
- [8] G. Young, "CQRS Documents by Greg Young". Available: https://cqrs.files.wordpress.com/2010/11/cqrs_documents.pdf
- [9] H. Taylor *et al.*, "Event-Driven Architecture: How SOA Enables the RealTime Enterprise", *Addison-Wesley Professional*, 2009, 272 p. ISBN 978-0321591388. Available: <https://www.oreilly.com/library/view/event-driven-architecture-how/9780321591388/>
- [10] M. Overeem *et al.*, "An empirical characterization of event sourced systems and their schema evolution – Lessons from industry", *Journal of Systems and Software*, 2021, Vol. 178, Iss. 4. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jss.2021.110970>
- [11] K. Truysers, "Introduction to Domain Driven Design, CQRS and Event Sourcing", 2013. Available: <https://www.kenneth-truysers.net/2013/12/05/introduction-to-domain-driven-design-cqrs-and-event-sourcing/>
- [12] V. Vernon, "Implementing Domain-Driven Design", *Addison Wesley*, 2013, 656 p. ISBN 978-0321834577. Available: <https://ptgmedia.pearsoncmg.com/images/9780321834577/samplepages/0321834577.pdf>
- [13] O. Lytvynov and D. Hruzin, "Decision-making on Command Query Responsibility Segregation with Event Sourcing architectural variations", *Technology audit and production reserves*, 2025, Vol. 4, Iss. 2 (84), pp. 37–59. Available: <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2025.337168>
- [14] General Data Protection Regulation. Available: <https://gdpr-info.eu/>
- [15] N. Korkmaz and M. Nilsson, "Practitioners' view on command query responsibility segregation: thesis, MSc Information Systems", *Lund University: School of Economics and Management*, 2014, 53 p. Available: <https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=4864802&fileId=4864803>
- [16] O. Lytvynov and D. Hruzin, "On the migration of Domain-driven Design to CQRS with Event Sourcing software architecture", *Information Technology Computer Science Software Engineering and Cyber Security*, 2024, Vol. 1, Iss. 1, pp. 50–60. Available: <https://doi.org/10.32782/IT/2024-1-7>
- [17] P. Revesz, "Relational Databases", *Introduction to Databases*, London: Springer, 2010, Chap. 4, 743 p. Available: https://doi.org/10.1007/978-1-84996-095-3_3
- [18] M. L. Brodie and M. Stonebraker, "Ai S. DARWIN: On the Incremental Migration of Legacy Information Systems", 1995. Available: <https://dsf.berkeley.edu/papers/S2K-93-25.pdf>

- [19] M. Breitmayer *et al.*, “Deriving Event Logs from Legacy Software Systems”, *Lecture Notes in Business Information Processing*, 2023, Vol. 468, pp. 409–421. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-031-27815-0_30
- [20] D. Comartin, “Snapshots in Event Sourcing for Rehydrating Aggregates”. Available: <https://codeopinion.com/snapshots-in-event-sourcing-for-rehydrating-aggregates/>
- [21] O. Evsyukov, “The Bermuda Aggregate. And the Rescue of the Drowning”. Available: <https://youtu.be/Br4TL-486ZM?t=1500>
- [22] O. Dudycz, “Snapshots in Event Sourcing”. Available: <https://www.eventstore.com/blog/snapshots-in-event-sourcing>
- [23] DBB Software’s official company site. Available: <https://dbbsoftware.com/>
- [24] G. Young, “Versioning in an Event Sourced System”. Available: <https://leanpub.com/esversioning>
- [25] S. Kleanthous, “Event immutability and dealing with change”. Available: <https://www.eventstore.com/blog/event-immutability-and-dealing-with-change>
- [26] R. Laigner *et al.*, “An Empirical Study on Challenges of Event Management in Microservice Architectures”, in *An Empirical Study on Challenges of Event Management in Microservice Architectures*. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.00440>
- [27] P.R.G. Vasconcellos *et al.*, “Applying Event Sourcing in a ERP System: A Case Study”, *XLIV Latin American Computer Conference*, São Paulo, IEEE, 1–5 October 2018, pp. 80–89. Available: <https://doi.org/10.1109/CLEI.2018.00019>.
- [28] D.K. Pandiya and N.G. Charankar, “Optimizing Performance and Scalability in Micro Services with CQRS Design”, *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2024, Vol. 13, Iss. 4. Available: <https://doi.org/10.17577/IJERT-V13IS040284>
- [29] B. Wu *et al.*, “The Butterfly Methodology: a gateway-free approach for migrating legacy information systems”, 1997. Available: <https://doi.org/10.1109/ICECCS.1997.622311>
- [30] M. Breitmayer *et al.*, “Deriving Event Logs from Legacy Software Systems”, 2023. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-031-27815-0_30
- [31] G. Salvatierra *et al.*, “Legacy System Migration Approaches”, 2013. Available: <https://doi.org/10.1109/TLA.2013.6533975>
- [32] G. Young, “Link to GitHub repository”. Available: <https://github.com/gregoryyoung>
- [33] M. Driscoll, “The Publish-Subscribe Pattern”, *wxPython Recipes: A Problem – Solution Approach*, 2017, Chap. 4, 369 p. Available: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4842-3237-8_4?utm_source=researchgate.net&utm_medium=article
- [34] P. Shaddel, “Understand and Implement Long-Polling and Short Polling in Node.js”. Available: <https://levelup.gitconnected.com/understand-and-implement-long-polling-and-short-polling-in-node-js-94334d2233f3>
- [35] L.G. Cretu, “Event-driven replication in distributed systems”, *India Software Engineering: the 4th Annual Conference, Thiruvananthapuram Kerala*, New York: Association for Computing Machinery, 24–27 February 2011, pp. 95–98. Available: <https://doi.org/10.1145/1953355.1953367>
- [36] “Practical and focused guide for survival in post-CQRS world. Projections”. Available: <http://cqrs.wikidot.com/doc/projection>
- [37] D. Hruzin, “Link to Zenodo repository”. Access mode: <https://zenodo.org/records/18263117>. Available: <https://doi.org/10.5281/zenodo.18263116>.
- [38] T.J. McCabe, “A Complexity Measure”, *IEEE Transactions on Software Engineering*, 1976, Vol. SE-2, Iss. 4, pp. 308–320. Available: <https://doi.org/10.1109/TSE.1976.233837>
- [39] SonarQube Cloud official site. Available: <https://www.sonarsource.com/products/sonarcloud/>
- [40] D. Hruzin, “Link to SonarQube scan report”. Available: https://sonarcloud.io/component_measures?metric=complexity&selected=dmitryhruzin_CQRS-variations-test%3Atypescript%2Fapps&id=dmitryhruzin_CQRS-variations-test
- [41] D. Hruzin, “Link to GitHub repository”. Available: <https://github.com/dmitryhruzin/CQRS-variations-test/blob/main/scripts/run-measurement.js>
- [42] S. Gayathri Devi and Dr K. Selvam, “An abstract to calculate big O factors of time and space complexity of machine code”, *Conference: International Conference on Sustainable Energy and Intelligent Systems (SEISCON 2011)*, Jan. 2021. Available: <https://doi.org/10.1049/cp.2011.0483>.
- [43] Z. Zheng *et al.*, “An Overview of Blockchain Technology: Architecture, Consensus, and Future Trends”, *Conference: 6th IEEE International Congress on Big Data*. Available: <https://doi.org/10.1109/BigDataCongress.2017.85>

Д.Л. Грузін, О.А. Литвинов

ІНЖЕНЕРІЯ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ АРХИТЕКТУРИ CQRS З EVENT SOURCING ЩО ҐРУНТУЄТЬСЯ НА ЗНІМКУ СТАНУ СИСТЕМИ

Проблематика. Розмежування відповідальності команд і запитів (CQRS) у поєднанні з підходом фіксації та збереження подій (англ. Event Sourcing, ES) є поширеним рішенням для проектування масштабованих і високопродуктивних інформаційних систем. Утім, класичні реалізації CQRS з ES часто пов’язані з підвищеною складністю розроблення та супроводу.

Мета дослідження. Метою роботи є оптимізація розроблення та супроводу програмних систем, побудованих на CQRS з ES, шляхом запровадження альтернативної варіації цієї архітектури.

Методика реалізації. Проаналізовано класичну варіацію архітектури й виокремлено компоненти, що підвищують складність розроблення та супроводу системи. На основі проведеного аналізу запропоновано альтернативну варіацію архітектури (mCQRS), яка передбачає використання набору компонентів із нижчою складністю. Рішення ґрунтується на використанні реляційної бази даних, в якій знімки стану агрегатів розглядаються як джерело істини, що знижує складність реалізації та супроводу програмного забезпечення, а також спрощує потенційний перехід до інших архітектурних підходів.

Результати дослідження. Побудовано репрезентативні тестові проекти для класичної та mCQRS варіацій. Значення цикломатичної складності реалізації типового процесу виконання команди (120 для Classical CQRS та 82 для mCQRS) свідчать про спрощення на 31.67 %. Водночас час відповіді сервера на запити є однаковим для обох варіацій (44 мс), тоді як повний час досягнення узгодженості системи для команд становить 268 мс для Classical CQRS та 347 мс для mCQRS. Попри зниження продуктивності на 22,76 % швидкодія операцій запису залишається високою в контексті усталених галузевих практик.

Висновки. Запропонований підхід підвищує ефективність розроблення й супроводу та зменшує вимоги до рівня компетентностей розробників; він є доцільним для класу систем, в яких швидкодія операцій запису не є критичною.

Ключові слова: архітектура програмного забезпечення; оптимізаційні моделі; CQRS; Event Sourcing порівняльний аналіз.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
19 січня 2026 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року

АВТОРИ НОМЕРА

Волошин Вячеслав Степанович

<https://orcid.org/0009-0005-6809-6779>

Грузін Дмитро Леонідович

<https://orcid.org/0009-0004-8534-2559>

Кольцов Дмитро Романович

<https://orcid.org/0000-0002-0396-7255>

Литвинов Олександр Анатолійович

<https://orcid.org/0000-0001-7660-1353>

Ориняк Ігор Володимирович

<https://orcid.org/0000-0003-4529-0235>

Протасов Анатолій Георгійович

<https://orcid.org/0000-0002-2965-3334>

Романюк Вадим Васильович

<https://orcid.org/0000-0001-9638-9572>

Стешенко Ярослав Віталійович

<https://orcid.org/0009-0003-5367-1529>

Тавров Данило Юрійович

<https://orcid.org/0000-0002-3689-2931>

Ткаленко Ілля Анатолійович

<https://orcid.org/0000-0002-5799-6473>

Чиж Ігор Генріхович

<https://orcid.org/0009-0000-3738-4835>