

НАУКОВІ ВІСТІ КПІ

Міжнародний науково-технічний журнал

№ 1 (138)

2025

Започаткований у вересні 1997 року

Головний редактор
М. З. Згуровський, акад. НАН України

Заступник головного редактора
М. Ю. Ільченко, акад. НАН України

Відповідальний секретар
П. П. Маслянко, канд. техн. наук, доц.

У номері:

Прикладна математика

Матеріалознавство

Системний аналіз
та наука про дані

Машинобудування

Комп'ютерні науки

Адреса редакції:
КПІ ім. Ігоря Сікорського
просп. Берестейський, 37
Київ, 03056, Україна

Тел. (+38 044) 204-94-53
E-mail: n.visti@kpi.ua
<http://scinews.kpi.ua>

Засновник — Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Внесений до реєстру суб'єктів у сфері медіа з присвоєнням ідентифікатора медіа R30-02405
(рішення Національної ради з питань телебачення і радіомовлення № 1794 від 21.12.2023)

Згідно з наказами МОН України № 1643 від 28.12.2019, № 409 від 17.03.2020 та № 392 від 05.04.2023 журнал
включено до категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України з технічних наук з таких спеціальностей:

Код і найменування спеціальності в редакції постанови Кабінету Міністрів України від 30 серпня 2024 р. № 1021	Код і найменування спеціальності в редакції постанови Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 р. № 266 та наказу МОН України від 05 квітня 2023 р. № 392
F1 — прикладна математика	113 — прикладна математика
F2 — інженерія програмного забезпечення	121 — інженерія програмного забезпечення
F3 — комп'ютерні науки	122 — комп'ютерні науки
F7 — комп'ютерна інженерія	123 — комп'ютерна інженерія
F4 — системний аналіз та наука про дані	124 — системний аналіз
G9 — прикладна механіка	131 — прикладна механіка
G8 — матеріалознавство	132 — матеріалознавство
G11 — машинобудування (за спеціалізаціями)	133 — галузеве машинобудування, 142 — енергетичне машинобудування
G12 — авіаційна та ракетно-космічна техніка	134 — авіаційна та ракетно-космічна техніка
G3 — електрична інженерія	141 — електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
G4 — енерговиробництво (за спеціалізацією)	143 — атомна енергетика, 144 — теплоенергетика
G1 — хімічні технології та інженерія	161 — хімічні технології та інженерія
G5 — електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка	171 — електроніка, 172 — електронні комунікації та радіотехніка
G7 — автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка	174 — автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, протокол №2 від 10.02.2025 р.

Члени редакційної колегії

М. І. Бобир,	д-р техн. наук, проф., акад. НАН України
Є. Бондарєв,	PhD, проф., Нідерланди
Х. Валеро,	PhD, проф., Іспанія
І. А. Дичка,	д-р техн. наук, проф., Україна
П. І. Лобода,	д-р техн. наук, проф., акад. НАН України
В. Прівман,	д-р, проф., США
Г. С. Тимчик,	д-р техн. наук, проф., Україна
П. Хенаф,	д-р, проф., Франція
О. Е. Чигиринець,	д-р техн. наук, проф., Україна

Секретар редакції Т. Г. Кулікова

Редактори Н. В. Мурашова, С. Я. Тимчишин

Комп'ютерна верстка С. А. Бобров

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р., просп. Берестейський, 37, Київ, 03056

Підп. до друку 31.03.2024. Формат 60×84¹/₈. Папір офс. Гарнітура UkrainianTimesET.
Спосіб друку — електрографічний. Ум. друк. арк. 8,87. Обл.-вид. арк. 12,75. Наклад 35 пр. Зам. № 25-030.

Видавництво “Політехніка” КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15, Київ, 03056
тел. (044) 204-81-78

KPI SCIENCE NEWS

International research journal

№ 1 (138)

2025

Founded in September, 1997

Editor-in-chief

M. Z. Zgurovsky, Academician of NASU

Deputy editor-in-chief

M. Yu. Ilchenko, Academician of NASU

Executive editor

P. P. Maslyanko, Assoc. Prof., PhD

In the issue:

Applied mathematics

Science of materials

System Analysis and Data Science

Materials Science

Computer Science

Editorial office:

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute,
ave. Beresteyskyi, 37,
Kyiv, 03056, Ukraine

E-mail: n.visti@kpi.ua

<http://scinews.kpi.ua>

Founder – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

Entered into the register of subjects in the field of media with the assignment of media identifier R30-02405 (decision of the National Council on Television and Radio Broadcasting of Ukraine No. 1794 dated 21.12.2023).

According to the orders of MES of Ukraine from 12.28.2019 no. 1643, from 03.17.2020 no. 409, and from 04.05.2023 no. 392 the journal is included in the «B» category of the List of scientific publications of Ukraine on technical sciences in the following specialties:

Code and name of the specialty as amended by the Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine dated August 30, 2024 No. 1021	Code and name of the specialty as amended by the Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine dated April 29, 2015 No. 266 and the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated April 5, 2023 No. 392
F1 – Applied Mathematics	113 – Applied Mathematics
F2 – Software Engineering	121 – Software Engineering
F3 – Computer Science	122 – Computer Science
F7 – Computer Engineering	123 – Computer Engineering
F4 – System Analysis and Data Science	124 – System Analysis
G9 – Applied Mechanics	131 – Applied Mechanics
G8 – Materials Science	132 – Materials Science
G11 – Machinery Engineering (by specializations)	133 – Industrial Machinery Engineering 142 – Power Engineering
G12 – Aviation and Aerospace Technologies	134 – Aviation and Aerospace Technologies
G3 – Electric Engineering	141 – Electrical Power Engineering and Electromechanics
G4 – Energy Production	143 – Nuclear Power Engineering, 144 – Heat and Power Engineering
G1 – Chemical Technologies and Engineering	161 – Chemical Technologies and Engineering
G5 – Electronics, Electronic Communications, Instrument Making and Radio Engineering	171 – Electronics, 172 – Electronic Communications and Radio Engineering
G7 – Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics	174 – Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics

Advised by the Academic Council of the National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, protocol No 2 on 10.02.25.

Editorial Board

Mykola Bobyr,	Prof., Correspondent member of NASU, Ukraine
Egor Bondarau,	Prof., Netherlands
Jose Valero,	Prof., Spain
Ivan Dychka,	Prof., Ukraine
Petro Loboda,	Prof., Academician of NASU, Ukraine
Grygorii Tymchik,	Prof., Ukraine
Patrick Henaff,	Prof., France
Olena Chyhyrynets,	Prof., Ukraine

Editorial secretary T. G. Kulikova

Editors N.V. Murashova, S. Ya. Tymchyshyn

Desktop publishing S. A. Bobrov

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Registration Certificate – ДК № 5354 on 25.05.2017, Ave. Beresteiskyi, 37, Kyiv, 03056

Signed for printing on 31.03.2024. Format 60×84¹/₈. Text-weight paper. Font UkrainianTimesET.
Print. tech. – electrographic. Convent. printed sheets 8,87. Published sheets 12,75. Edition of 35 copies. Order No 25-030.

Publishing House “Politehnika”, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Politekhnichna Str., 14, building 15, Kyiv, 03056
Tel.: (044) 204-81-78

ЗМІСТ

Прикладна математика

<i>Легеза В.П.</i> Парадоксальні властивості лінії переслідування у задачі перехоплення втікача на горизонтальній площині.....	7
<i>Романюк В.В.</i> Зсув за одиницями часу в іграх трьох осіб у скінченних і незліченно нескінченних просторах сходячкових функцій, що розв'язуються у чистих стратегіях.....	15

Матеріалознавство

<i>Левчук Л.С., Шкарбань Р.А., Вербицька Т.І., Макогон Ю.М.</i> Особливості впливу напруженого стану на термічну стабільність фази NiSi в плівках Ni(Pt)/Si	37
---	----

Системний аналіз та наука про дані

<i>Романов А.Ю.</i> Алгоритм управління флотом для покращення екологічності морських перевезень	44
---	----

Машинобудування

<i>Новаківський Є.В., Неділько А.В.</i> Метод вибору робочого тіла для ORC — циклів утилізації теплоти димових газів	56
--	----

Комп'ютерні науки

<i>Бойко О.А.</i> Метод захисту цифрових активів від незворотної втрати у випадку втрати приватного ключа	63
<i>Новіков О.М., Ільїн М.І., Стьопочкіна І.В., Овчарук М.В.</i> Визначення параметрів непомітних кібератак на системи керування об'єктів критичної інфраструктури	69
Автори номери.....	76

CONTENTS

Applied mathematics

<i>Viktor Legeza. Paradoxical properties of the line of pursuit in the problem of intercepting a fugitive on a horizontal plane.....</i>	7
<i>Vadim Romanuke. Time-unit shifting in 3-person games in finite and uncountably infinite staircase-function spaces solved in pure strategies</i>	15

Science of materials

<i>Leonid Levchuk, Ruslan Shkarban, Tetiana Verbytska, Yuriy Makogon. Features of the influence of the stress state on the thermal stability of the NiSi phase in Ni(Pt)/Si film.....</i>	37
---	----

System Analysis and Data Science

<i>Andriy Romanov. Fleet management algorithm for enhancing environmental friendliness of maritime delivery</i>	44
---	----

Materials Science

<i>Yevhen Novakivskiy, Andriy Nedilko. Method of selecting the working body for OCR – cycles of flue gas heat recovery</i>	56
--	----

Computer Science

<i>Oleg Boiko. A method for protecting digital assets from permanent loss in the event of private key loss.....</i>	63
<i>Oleksii Novikov, Mykola Ilin, Iryna Stopochkina, Mykola Ovcharuk. Determination of parameters of stealthy cyber attacks on control systems of critical infrastructure objects</i>	69
<i>Contributors to the issue</i>	76

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

УДК 517.2

В.П. Легеза*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: victor.legeza@gmail.com

ПАРАДОКСАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЇ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ У ЗАДАЧІ ПЕРЕХОПЛЕННЯ ВТІКАЧА НА ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Проблематика. Крива переслідування — це лінія, уздовж якої рухається переслідувач під час переслідування втікача. Розглядається новий підхід до побудови, інтегрування та аналізу диференціального рівняння кривої переслідування у класичній задачі перехоплення втікача на площині. У запропонованому формулюванні він є новим і актуальним із практичної точки зору у таких сферах, як транспорт, логістика, військова справа, спортивні заходи тощо.

Мета дослідження. Метою роботи є визначення оптимального кута нахилу прямої, по якій має рухатись втікач, щоб максимально наблизитися до лінії «життя» до його затримання переслідувачем.

Методика реалізації. Для досягнення поставленої мети використовувалися класичні методи інтегрування диференціальних рівнянь у параметричній формі, а також графічно-числовий інструментарій, який надає пакет програмного забезпечення MathCad.

Результати дослідження. Сформульовано диференціальне рівняння кривої переслідування і встановлено його розв'язок у замкненій параметричній формі. Проведено його числовий аналіз і досліджено вплив параметрів α (співвідношення швидкостей переслідувача і втікача) та k на поведінку кривої переслідування. Проаналізовано залежність зміни відстані $x(0, k, \alpha)$ уздовж горизонтальної осі OX на момент затримання втікача залежно від величини кутового коефіцієнта k прямої його руху за фіксованого коефіцієнта α .

Висновки. У результаті дослідження з'ясовано, що якщо коефіцієнт $\alpha \rightarrow \infty$ (тобто швидкість переслідувача значно перевищує швидкість втікача), то відстань $x(0, k, \alpha)$, на якій останнього буде затримано, прямує до нуля. З іншого боку, якщо $\alpha \rightarrow 1$ (тобто швидкість катерів є однаковою), то зазначена відстань прямує у нескінченність, тобто затримання втікача не відбудеться. Залежність зміни відстані $x(0, k, \alpha)$ уздовж горизонтальної осі OX від коефіцієнта k має чітко виражений локальний максимум за умови $k \neq 0$, який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої втечі, який дає можливість втікачу досягти максимального переміщення $x(0, k, \alpha)$ у бік «лінії життя». Таким чином, спостерігаємо парадоксальне явище: для вдалої втечі стратегія вибору кута нахилу прямої, який дорівнює нулю (тобто рух по найкоротшому відрізьку, що з'єднує дві паралельні лінії), не є правильною.

Ключові слова: перехоплення втікача на площині; крива переслідування; катер-переслідувач; катер-втікач; лінія втечі; лінія життя; швидкість катерів; локальний максимум.

Вступ

Запропонована робота є продовженням попередніх досліджень автора [23–25] у межах різноманітних задач переслідування.

У цій статті розглянуто актуальну задачу побудови математичної моделі процесу переслідування втікача на площині з пошуком оптимального кута нахилу лінії втечі з метою уникнення втікачем захоплення на найдовшому відрізьку у заданому напрямку. Нова постановка задачі дозволяє встановити нові власти-

вості кривої переслідування та отримані з неї характеристики, які впливають на здатність втікача уникнути захоплення у процесі втечі на найдовшій горизонтальній відстані у бік «лінії життя». Як з'ясувалося у процесі дослідження, на основі кількісного та якісного аналізу впливу характеристик кривої переслідування можна оптимально змодельовати стратегію такої втечі, яка є парадоксальною. Математична модель дозволяє підібрати оптимальний кут нахилу лінії втечі, що і забезпечує зазначений вище рух втікача.

Пропозиція для цитування цієї статті: В.П. Легеза, “Парадоксальні властивості лінії переслідування у задачі перехоплення втікача на горизонтальній площині”, *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 7–14, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

Offer a citation for this article: Viktor Legeza, “Paradoxical properties of the line of pursuit in the problem of intercepting a fugitive on a horizontal plane”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 7–14, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

Наведемо стислий огляд літературних джерел і перейдемо до розгорнутої постановки задачі.

Огляд літературних джерел

Задачі переслідування, ймовірно, виникли і досліджувалися ще з часів Леонардо да Вінчі — саме він був першим вченим, хто дослідив цю задачу у випадку, коли втікач рухався по горизонтальній прямій. Більш загальний випадок досліджував французький вчений П'єр Бугер у 1732 р. [1–4]. Задача полягала у тому, щоби знайти криву переслідування торгового судна піратським кораблем, при цьому припускалося, що значення швидкості двох суден завжди перебувають в однаковому співвідношенні.

У роботах [4–7] було розглянуто відому задачу про «переслідування чотирьох мишей». Припустимо, чотири миші розміщені у кожному з чотирьох кутів квадратного столу, і кожна миша біжить до тієї, що праворуч від неї. Потрібно знайти параметричні криві, які описують траєкторію руху кожної миші. Розв'язками цієї задачі будуть спіральні траєкторії, які збігаються до центру столу.

У роботі [8] було розглянуто детерміноване неперервне переслідування, в якому n мурах женуться одна за одною по колу та мають наперед задані змінні швидкості. Розглядаються також два дискретні аналогі, в яких цвіркун (або жаба) циклічно переслідують іншого цвіркуна (або жабу) з постійною та однаковою швидкістю. Досліджується можлива еволюція цього руху у міру того, як час прямує до нескінченності: зіткнення, граничні точки, стан рівноваги і періодичний рух.

У роботі [9] подано просту математичну модель локальної взаємодії колонії мурах чи інших природних або штучних істот з великим «відчуттям глобальної геометрії» для того, щоб знайти прямий шлях від мурашника до їжі. Ця задача теж розглядалась у межах загальної задачі переслідування n мурах.

У роботі [10] досліджується рух довільного набору точок (або жуків) на площині, що переслідують одна одну у циклічному переслідуванні. Показано, що для регулярних центрально-симетричних конфігурацій аналітичні рішення легко отримати шляхом переходу до відповідної обертової системи відліку. Обговорено декілька випадків несиметричних конфігурацій. Зокрема, показано, що для трьох жуків у трикутній конфігурації центральнообертової системи координат, відносно якої жуки не мають тангенціальної

швидкості, є точкою колапсу і збігається з однією із двох точок Брокера у трикутнику. Для випадку, коли всі жуки мають однакову швидкість, доведено теорему про те, що щоразу, коли відбувається передчасне (тобто невзаємне) захоплення, зіткнення має бути лобовим. Ця теорема застосовується також до випадку конфігурацій із трьома та чотирма жуками, щоб показати, що ці системи руйнуються до певної точки, тобто захоплення є взаємним. Деякі аспекти цих результатів узагальнено на випадок систем із n жуками.

У роботі [11] досліджується рух довільної множини точок на площині, що переслідують одна одну, рухаючись по колу. Дано набір позначених точок $1, 2, 3, \dots, n$ із координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, а точку (x_i, y_i) вважають точкою-переслідувачем точки-втікача (x_{i+1}, y_{i+1}) уздовж миттєвої лінії, що їх з'єднує. Щоб замкнути цикл, точка (x_n, y_n) має переслідувати точку (x_1, y_1) . Усі точки рухаються з однаковою швидкістю. Описаний у такий спосіб рух називають рухом у «прямому часі». Якщо знак оператора похідної за часом змінено, у результаті чого точка (x_1, y_1) віддаляється від точки (x_{i+1}, y_{i+1}) , рух називають рухом у «зворотному часі». Рух як у прямому, так і у зворотному часі вивчають за допомогою розробленої комп'ютерної програми. У прямому часі спостерігається, що врешті-решт майже у всіх випробуваних випадках точки стають колінеарними, з великим співвідношенням максимальної відстані до мінімальної незалежно від форми початкової конфігурації. У зворотному часі спостерігається, що точки, зрештою, розміщуються у вигляді зірки, причому кут вершини зірки менший від деякого числа в районі дев'яноста градусів. За допомогою аналізу, основанийого на стійкості рівнянь руху, обчислюється точне значення максимального зоряного кута як функція кількості точок.

У роботі [12] розглядається добре відома проблема, яку сьогодні продовжують аналізувати. Три (чи більше) жуків, які спочатку містяться у вершинах правильного багатокутника, починають циклічно переслідувати один одного, рухаються разом з однаковою швидкістю. Зазвичай потрібно знати відстань, пройдену кожним жуком до взаємного захоплення. Випадок чотирьох жуків є найпростішим. Через симетрію чотири жуки завжди залишаються на чотирьох вершинах квадрата. Оскільки жук-втікач Ж2 завжди рухається під прямим кутом до жука-переслідувача Ж1, швидкість захоплення для цих двох жуків залежить лише від швидкості жука Ж1. Випадок для n жуків лише трохи складніший. Задача знову

симетрична, оскільки n жуків розміщені завжди у n вершинах правильного n -кутника.

У книзі [13] наведено системні методи гри у диференціальних іграх переслідування та ухилення, досліджується обсяг і застосування ігрових процедур. Численні корисні приклади ілюструють базові й розширені концепції, включаючи захоплення, стратегію та алгебраїчну теорію. Також міститься розгляд як лінійних, так і нелінійних ігор. Розділи книги також включають стробоскопічне та ізохронне захоплення цілі, алгебраїчну теорію і стратегії вибору.

У роботі [14] запропоновано постановку задачі переслідування на площині з точки зору мультиагентного підходу. Розглядаються розбіжності, які вирізняють пропоновану постановку задачі від постановки такої задачі з точки зору теорії диференціальних ігор. Наведено перелік методів, які потрібно розробити.

У статті [15] розглянуто диференціальні ігри переслідування на площині, в яких для кожного із втікачів створено групу переслідувачів. Сформульовано задачі оптимізації груп переслідування. Побудовано числові методи розв'язання таких задач, проведено числові експерименти та проаналізовано ефективність цих методів.

У статті [16] розглядається задача переслідування із простим рухом для випадку, коли максимальна швидкість гравців однакова, а людина, що втікає, рухається по строго опуклій гладкій n -вимірній поверхні. Доведено, що завершення переслідування можливе з будь-якої вихідної позиції. Встановлено, що ухилення можливе з деяких вихідних положень, якщо гіперповерхня містить двовимірну плоску частину.

У книзі [17] розглядаються задачі із класичної теорії оптимального керування, в яких визначається оптимальне керування, яке оптимізує критерій, підпорядкований динамічному обмеженню, що виражає еволюцію стану системи під впливом керівних змінних. Якщо цей підхід поширити на випадок кількох контролерів (або гравців) з різними, а іноді й суперечливими критеріями оптимізації (функція виграшу), можна почати досліджувати диференціальні ігри. Диференціальні ігри з нульовою сумою, які також називають диференціальними іграми переслідування, становлять найбільш розроблену частину диференціальних ігор і ретельно досліджуються. У книзі розроблено повну теорію диференціальних ігор переслідування з повною і частковою інформацією. Розв'язуються численні конкретні ігри переслідування-ухилення (ігри «лінія життя», прості ігри переслідування тощо), а також нові

узгоджені у часі принципи оптимальності в теорії диференціальних ігор n осіб.

Книга [18] — це відомий підручник із диференціальних ігор. У ньому диференціальні ігри розглядаються як конфліктні ситуації з нескінченною множиною альтернатив, які можна описати за допомогою диференціальних рівнянь. У книзі головну увагу приділено принциповим математичним питанням, методи розв'язання ілюструються великою кількістю цікавих прикладів, які самі по собі є важливими. Запропоновано низку постановок нерозв'язаних задач.

У книзі [19] процес переслідування аналізується з військової точки зору. Як переслідувачів можна розглядати ракети, літаки-перехоплювачі (або інші літальні апарати); інтелектуальний пошук військової цілі (наприклад, складів боєприпасів, танків, літаків на аеродромах тощо); підрозділ або окремого солдата, який переслідує і наближається до ворожого підрозділу або окремого солдата; кораблі, що наближаються до інших кораблів, торпеди стеження, які вибухають на ворожих кораблях. У цій роботі процес переслідування розглядався із врахуванням таких припущень: переслідувач рухається з постійною швидкістю, переслідування відбувається в заданому напрямку протягом певного інтервалу часу, і переслідувач завжди бачить втікача (ціль). Моделювання процесу переслідування спочатку виконано для плоского випадку, а потім ця модель узагальнюється на тривимірний випадок. Завдання полягає у тому, щоб визначити криву руху для переслідувача за умови, що розташування цілі є відомим.

У технічному звіті [20] наведено детальний опис впровадження чистого алгоритму стеження за кривою переслідування. Враховуючи загальний успіх алгоритму за останні роки, ймовірно, що його знову використовуватимуть у задачах наземної навігації. Звіт також включає геометричну версію методу, у ньому містяться деякі відомості про ефективність алгоритму як функції його параметрів.

У статті [21] описується переслідування третього порядку — гра в ухилення, в якій обидва гравці мають однакову швидкість і мінімальний радіус повороту. Своєрідна гра спочатку вирішується для бар'єра або оболонки станів, які можна захопити. Коли захоплення можливе, гра на певному рівні вирішується для оптимального контролю двох гравців як функції відносної позиції. Встановлено, що розв'язок задачі включає універсальну поверхню для переслідувача і поверхню розгону для тих, хто ухиляється.

У статті [22] розглядається компланарна проблема ухилення від переслідування, в якій беруть участь два переслідувача P_1 та P_2 та один втікач E . Втікач E ухиляється з постійною та більшою, ніж у переслідувачів, швидкістю $w > 1$, та має пройти між двома переслідувачами P_1 та P_2 з одиничною швидкістю, виграш — відстань найближчого наближення до будь-якого з переслідувачів. Це є типова задача двох гравців з нульовою сумою з теорії ігор. Керуючими змінними обрано напрямки швидкості P_1 , P_2 та E . Отримано замкнений розв'язок через еліптичні функції першого і другого роду. Замкнений розв'язок наведено графічно на кількох діаграмах для різних значень w .

Наведений огляд літературних джерел показав, що запропонована задача є новою і має конкретне практичне значення.

Постановка задачі

Розглянемо стартову позицію двох рухомих точок, одна з яких переслідує іншу (рис. 1). На одному березі (позначеному на рис. 1 як вісь OY) водойми на відстані $y_0 = 1$ один від одного стоять два катери — катер берегової охорони U (надалі — катер-переслідувач) і катер-порушник кордону V (надалі — катер-втікач). Водойма розділяє дві країни як природна межа між ними, при цьому катер-втікач V намагається якнайшвидше перетнути водойму у напрямку кордону між двома країнами. Назвемо її «лінією життя». Вважатимемо, що ця межа є паралельною береговій лінії старту двох катерів. Катер-переслідувач U намагається наздогнати катер V до того моменту, як він досяг би певної точки, яка міститься на «лінії життя».

Отже, у початковий час $t = 0$ катер-порушник V починає рухатись уздовж прямої $\eta = k\xi$ (рис. 1) зі швидкістю v . Катер-переслідувач U стартує одночасно з катером V й у процесі переслідування обирає напрямок руху на поточну точку розміщення катера V на площині OXY , при цьому катер U має швидкість u , яка в α разів більша за швидкість катера V : $u = \alpha v$.

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі задачі, знайшовши:

- 1) траєкторію $L : \{y = y(x)\}$ руху катера U ;
- 2) час T , за який він наздожене катер V ;
- 3) точку на площині OXY , в якій він наздожене катер V ;

4) коефіцієнт k , який забезпечує максимальне переміщення катера V уздовж осі OX у напрямку «лінії життя».

Швидкість течії водойми не враховується.

Побудова диференціального рівняння траєкторії руху переслідувача

Траєкторію L руху катера U називатимемо **кривою переслідування**.

Ототожнимо місцеперебування катерів на площині OXY з точками U та V . Позначимо через (x, y) координати точки U і через (ξ, η) — координати точки V у поточний момент часу t . Проведемо дотичну в точці $U(x, y)$ до кривої L , яка з'єднує точки U та V й встановимо співвідношення для похідної функції $y(x)$:

$$y' = \frac{\eta - y}{\xi - x} \Rightarrow y' = \frac{k\xi - y}{\xi - x}. \quad (1)$$

Виразимо змінну ξ з рівняння (1):

$$\xi = \frac{xy' - y}{y' - k}. \quad (2)$$

Знайдемо похідну за часом від змінної ξ :

$$\dot{\xi} = \frac{y - kx}{(y' - k)^2} y'' \dot{x}. \quad (3)$$

Тепер визначимо співвідношення α для модулів швидкостей катерів, враховуючи, що

$$u = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (y')^2} \dot{x} \quad \text{та} \quad v = \sqrt{1 + k^2} \dot{\xi}.$$

Оскільки відомо, що $u = \alpha v$, то тоді можна переписати це саме співвідношення інакше:

$$\alpha = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \dot{x}}{\sqrt{1 + k^2} \dot{\xi}}. \quad (4)$$

Враховуючи (3) та (4), дістанемо рівняння траєкторії $L : \{y = y(x)\}$:

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 + k^2}} \frac{(y' - k)^2}{(y - kx)y''}. \quad (5)$$

Перепишемо диференціальне рівняння (5) шуканої кривої інакше:

$$\sqrt{1 + k^2} \alpha y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{(y' - k)^2}{(y - kx)}. \quad (6)$$

Приєднаємо до цього рівняння дві граничні умови:

$$y(0) = 1; y'(0) = -\infty. \quad (7)$$

Отже, щоб знайти криву переслідування, маємо крайову задачу з диференціальним рівнянням (6) і граничними умовами (7).

Розв'язання крайової задачі з пошуку рівняння траєкторії $L : \{y = y(x)\}$

У рівнянні (6) зробимо заміну змінної:

$$z = y - kx \Rightarrow z' = y' - k; z'' = y''.$$

У результаті дістанемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot z'' \cdot z = (z')^2 \cdot \sqrt{1 + (z' + k)^2}. \quad (8)$$

Рівняння (8) допускає зниження порядку на одиницю, якщо зробити таку заміну:

$$\frac{dz}{dx} = p(z); \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = p(z) \cdot \frac{dp}{dz}. \quad (9)$$

У нових змінних рівняння (9) набуде такого вигляду:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot p'_z \cdot p \cdot z = p^2 \cdot \sqrt{1 + (p + k)^2}. \quad (10)$$

У рівнянні (10) скоротимо на множник $p(z) \neq 0$ й дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{dp}{p \sqrt{1 + (p + k)^2}} = \frac{dz}{z}. \quad (11)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння (11):

$$\begin{aligned} & \alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \int \frac{dp}{p \sqrt{1 + (p + k)^2}} = \\ & = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(u) = p + k; dp = \frac{du}{\cos^2 u} \\ p = \operatorname{tg} u - k \end{array} \right| = \\ & = \alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \int \frac{du}{\sin u - k \cos u} = \\ & = \alpha \int \frac{du}{\sin(u - \operatorname{arctg} k)} = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{u - \operatorname{arctg} k}{2} \right) \right| = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\operatorname{arctg}(k + p) - \operatorname{arctg} k}{2} \right) \right| = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{p}{1 + k(p + k)} \right] / 2 \right) \right|. \end{aligned}$$

Отже, отримано диференціальне рівняння першого порядку:

$$\operatorname{tg}^\alpha \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{p}{1 + k(p + k)} \right) / 2 \right) = C_1 \cdot z. \quad (12)$$

Щоб визначити першу сталу у рівнянні (12), використаємо співвідношення $z = y - kx$ та крайові умови (7):

$$z(p) \Big|_{p \rightarrow -\infty} = 1. \quad (13)$$

У результаті граничного переходу з урахуванням (13) дістанемо

$$C_1 = \operatorname{tg}^\alpha (\operatorname{arctg}(1/k)/2).$$

Запишемо перший інтеграл у такому вигляді:

$$z = \operatorname{ctg}^\alpha \left(\frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{k} \right)}{2} \right) \cdot \operatorname{tg}^\alpha \left(\frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{p}{1 + k(p + k)} \right)}{2} \right). \quad (14)$$

Виразимо з (14) функцію $p = z'$ через z :

$$\begin{aligned} & \frac{p}{1 + k(p + k)} = \\ & = \operatorname{tg} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{k} \right)}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Позначимо праву частину співвідношення (15) через $f(z, k, \alpha)$. У результаті отримуємо рівняння першого порядку (тут $p = z'$):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z, k, \alpha) \cdot (k^2 + 1)}{1 - f(z, k, \alpha) \cdot k}. \quad (16)$$

Запишемо другий інтеграл, використовуючи (16):

$$x(z, k, \alpha) = \int_1^z \frac{1 - f(z, k, \alpha) \cdot k}{f(z, k, \alpha) \cdot (k^2 + 1)} dz. \quad (17)$$

Доповнимо вираз (17) виразом для $y(z, k, \alpha)$, які разом описують траєкторію переслідування $y(x)$ в параметричній формі у вигляді пари функцій, де змінна z виступає як параметр, а саме:

$$\begin{cases} x = x(z, k, \alpha); \\ y = z + k \cdot x(z, k, \alpha). \end{cases} \quad (18)$$

Числовий аналіз траєкторії переслідування та його характеристики

Отже, два рівняння (18) описують траєкторію $L : \{y = y(x)\}$ руху катера U . Наведемо гра-

фік (рис. 1), побудований для випадку процесу переслідування, в якому обрано такі параметри руху: $k = -2$ та $\alpha = 2$. На графіку (рис. 1) крива синього кольору являє собою траєкторію руху катера-втікача V , а крива червоного кольору – траєкторію руху катера-переслідувача U .

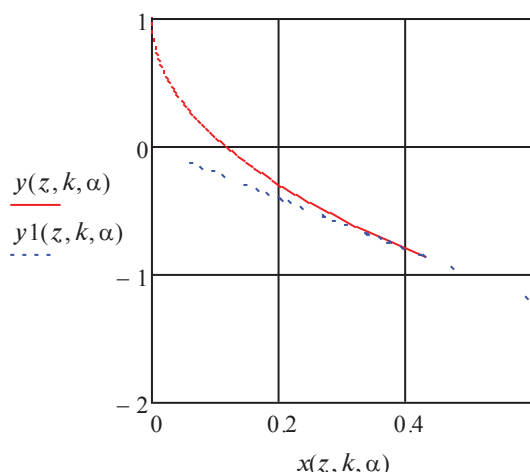


Рис. 1. Графік процесу переслідування катера-втікача V катером-переслідувачем U

Точка площини XOY , в якій відбувається затримання катера-втікача, має координати $(0,431; -0,863)$. Геометрично факт затримання означає, що червона крива дотикається до синьої прямої. Час T , потрібний для затримання катера-втікача у процесі переслідування, становить

$$T = \frac{\sqrt{0,431^2 + (-0,863)^2}}{v} = \frac{0,965}{v}.$$

Обчислимо відстань S , яку проходить катер-переслідувач за час переслідування:

$$S = T \cdot u = 0,965 \cdot \alpha = 1,93.$$

На рис. 2 подано криву, яка відображає залежність відстані $x(0, k, \alpha)$ (по горизонтальній осі OX) затримання катера-втікача від величини кутового коефіцієнта k прямої його руху за фіксованого коефіцієнта α . Вона має чітко виражений локальний максимум, який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої руху катера-втікача, який дає йому можливість досягти максимального переміщення у бік «лінії життя».

Отже, спостерігаємо певний парадокс: крива на рис. 2 показує, що стратегія вибору кута нахилу прямої, який рівний нулю (тобто рух по найкоротшому відрізьку, що з'єднує дві паралельні

лінії, що було би природно), не є правильною для вдалої втечі. У цьому варіанті розрахунку ($\alpha = 2$, $k = -0,393$) це переміщення є таким:

$$x(0; -0,393; 2) = 0,733.$$

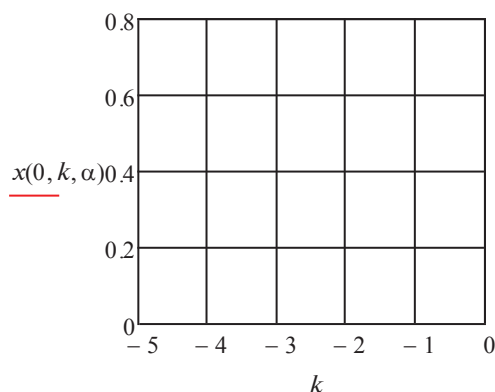


Рис. 2. Графік залежності відстані $x(0, k, \alpha)$ затримання катера-втікача від величини кутового коефіцієнта k прямої його руху

З'ясуємо поведінку величини $x(0, k, \alpha)$ за умови, коли коефіцієнт α прямує або до нескінченності, або до одиниці. На рис. 3 показано графік залежності величини $x(0, k, \alpha)$ від коефіцієнта α за фіксованого значення кутового коефіцієнта $k = -0,45$.

З поведінки кривої на рис. 3 випливає, що якщо коефіцієнт $\alpha \rightarrow \infty$ (тобто швидкість катера-переслідувача значно перевищує швидкість катера-втікача), то відстань $x(0, k, \alpha)$, на якій останнього буде затримано, прямує до нуля.

Утім, якщо $\alpha \rightarrow 1$ (тобто швидкість катерів є однаковою), то зазначена відстань прямує у нескінченність, тобто затримання катера-втікача не відбудеться.

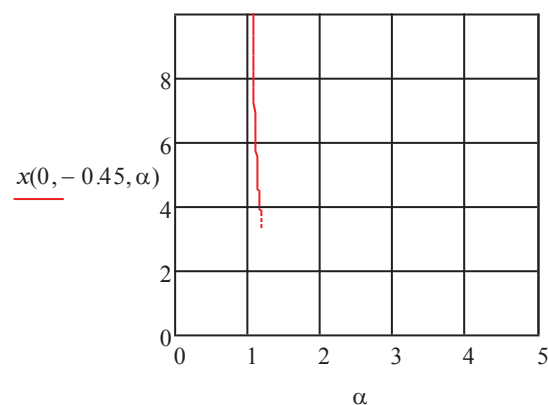


Рис. 3. Графік залежності величини $x(0, k, \alpha)$ від коефіцієнта α ($k = -0,45$)

Тепер розглянемо вплив коефіцієнта α на величину кутового коефіцієнта k , який забезпечує максимально можливе переміщення катера-втікача вздовж осі OX у бік «лінії життя».

На рис. 4 зображено відповідний графік залежності величини $k = k(\alpha)$ від коефіцієнта α , який побудовано для тих кутових коефіцієнтів «лінії втечі», які забезпечують максимуми кривих на графіку на рис. 2.

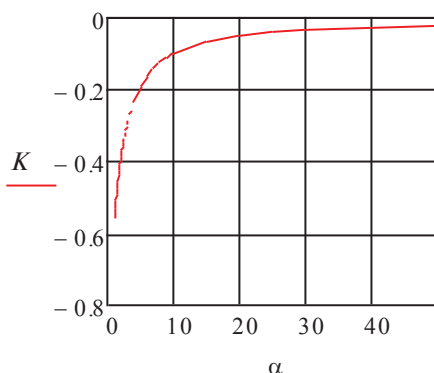


Рис. 4. Графік залежності величини $k = k(\alpha)$ від коефіцієнта α

Якщо коефіцієнт $\alpha \rightarrow \infty$, то кутовий коефіцієнт $k \rightarrow 0$, тобто найкраща для втечі пряма у цьому разі наближається до осі OX . З рівняння (14) знайдемо кутовий коефіцієнт k за умов $z = 0$ та $\alpha \rightarrow 1$: $k \rightarrow -\infty$.

Отримані рівняння (18) кривої переслідування дають ще одну корисну можливість: встановити, за якого параметра α катер-переслідувач U не дасть можливості катеру-втікачу V досягти «лінії життя».

Отже, нехай $k = -0,45$, тобто катер-втікач рухається уздовж прямої $y = -0,45x$, і «лінія життя» перебуває на відстані $X_{\max} = 1,0$ від точки старту

(уздовж осі OX). Обчислимо величину коефіцієнта α , за якої катер U зможе затримати втікача V до перетину ним межі між двома країнами. Сформулюємо відповідне трансцендентне рівняння відносно коефіцієнта α :

$$x(0, -0,45, \alpha) = 1.$$

У результаті його числового розв'язання дістанемо потрібну величину співвідношення швидкостей катерів: $\alpha \approx 1,714$.

Висновки

У роботі розглянуто класичну задачу переслідування, в якій катер-втікач рухається по похилій кривій $y = kx$. Отримано рівняння кривої переслідування у параметричній формі. Проведено його числовий аналіз, досліджено вплив параметрів α та k на поведінку кривої. Встановлено залежність зміни відстані $x(0, k, \alpha)$ (по горизонтальній осі OX) затримання катера-втікача залежно від величини кутового коефіцієнта k прямої його руху за фіксованого коефіцієнта α . Вона має чітко виражений локальний максимум, який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої руху катера-втікача, який дає йому можливість досягти максимального переміщення у бік «лінії життя».

Таким чином, для вдалої втечі **стратегія вибору** кута нахилу прямої рівним нулю (тобто рух по найкоротшому відрізку, що з'єднає дві паралельні лінії), **є неправильною**.

Результати числового експерименту дають підстави рекомендувати запропоновану модель для практичного використання у таких галузях, як логістика, воєнна справа, спортивні заходи тощо.

References

- [1] A. Bernhart, "Curves of pursuit", *Scripta Math*, no. 20, pp. 125–141, 1954.
- [2] A. Bernhart, "Curves of pursuit-II", *Scripta Math*, no. 23, pp. 49–65, 1957.
- [3] A. Bernhart, "Polygons of pursuit", *Scripta Math*, no. 24, pp. 23–50, 1959.
- [4] A. Bernhart, "Curves of general pursuit", *Scripta Math*, no. 24, pp. 189–206, 1959.
- [5] J.C. Clapham, "Playful mice", *Recreat. Math. Mag.*, August 1962, pp. 6–7.
- [6] Zuzana Malacká, "Pursuit Curves and Ordinary Differential Equations", *University of Žilina, Komunikacie*, no. 14 (1), pp. 66–68, March 2012. DOI: 10.26552/com.C.2012.1.66-68
- [7] P.J. Nahin, "Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion", Princeton-New Jersey: Princeton Puzzlers, 2012, 272 p.
- [8] A.M. Bruckstein *et al.*, "Ants, crickets and frogs in cyclic pursuit", Preprint, *Techion CIS Report*, July 1991, no. 9105.
- [9] A.M. Bruckstein, "Why the ant trails look so straight and nice", *Math. Intelligencer*, no. 15 (2), pp. 59–62, 1993.
- [10] F. Behroozi and R. Gagnon, "Cyclic pursuit in a plane", *J. Math. Phys.*, no. 20, pp. 2212–2216, November 1979.
- [11] F. Behroozi and R. Gagnon, "A computer-assisted study of pursuit in a plane", *Amer. Math. Monthly*, pp. 804–812, October 1975.
- [12] M.S. Klamkin and D.J. Newman, "Cyclic pursuit or "The Three Bugs Problem", *Amer. Math. Monthly*, pp. 631–639, June 1971. DOI: <https://www.jstor.org/stable/2316570>

- [13] O. Hajek, "Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion", New York: Academic Press, 1975.
- [14] A.L. Yalovets, "On the formulation of the pursuit problem on the plane", *Programming problems*, no. 2, pp. 95–100, 2013.
- [15] S.V. Pashko and A.L. Yalovets, "Numerical methods for solving pursuit optimization problems", *Problems of programming*, no. 4, pp. 74–85, 2013.
- [16] A.S. Kuchkarov, B.B. Rikhsiev, "A Pursuit Problem under Phase Constraints", *Automation and Remote Control*, no. 62 (8), pp. 1259–1262, 2001. DOI: 10.1023/A:1010297326898
- [17] L.A. Petrosyan, "Differential Games of Pursuit", World Scientific Publisher, Singapore, London, 340 p., 1993. DOI: 10.1142/1670
- [18] Isaacs R., "Differential Games, John Wiley and Sons", New York, 1965, p. 384.
- [19] David C. Arney, "The Chase Problem", Part 1, pp. 109–128.
- [20] R. Craig Conlter, "Implementation of the Pure Pursuit Path Tracking Algorithm", CMU-RI-TR-92-01, *The Robotics Institute Carnegie Mellon University*, Pittsburgh, Pennsylvania 15213, January 1992.
- [21] A. Merz, "The game of two identical cars", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 9, pp. 324–343, 1972. DOI: 10.1007/BF00932932
- [22] P. Hagedorn, J.V. Breakwell, "A Differential Game with Two Pursuers and One Evader", *Multicriteria Decision Making and Differential Games*, pp. 443–457, 1976. DOI: 10.1007/978-1-4615-8768-2_27
- [23] V.P. Legeza, O.M. Neshchadym, "The problem of fugitive interception on a plane in the one-dimensional vector field of a moving fluid", *Scientific Notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences*, vol. 34 (73), no. 3, pp. 168–174, 2023. DOI: 10.32782/2663-5941/2023.3.1/27
- [24] V. Legeza and L. Oleshchenko, "Paradoxical Properties Research of the Pursuit Curve in the Intercepting a Fugitive Problem", ICCSEE 2023, LNDECT 181, pp. 670–681, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-36118-0_60
- [25] V.P. Legeza, "The technique of applying the Laplace transform in the pursuit of the "Four mice", *Applied mathematics and computing AMC'2023*, a collection of abstracts of reports of the Sixteenth Conference of Master's and Postgraduate Students, Ukraine, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, pp. 502–506, 28–30 November, 2023.

Viktor Legeza

PARADOXICAL PROPERTIES OF THE LINE OF PURSUIT IN THE PROBLEM OF INTERCEPTING A FUGITIVE ON A HORIZONTAL PLANE

Background. A new approach to the construction, integration and analysis of the differential equation of the pursuit curve in the classical problem of intercepting a fugitive on the plane is considered. In the proposed wording, it is new and relevant from a practical point of view in such areas as transport, logistics, military affairs, sports events, etc.

Objective. The purpose of the work is to determine the optimal angle of inclination of the straight line along which the fugitive should move in order to get as close as possible to the "life" line before being caught by the pursuer.

Methods. To achieve the goal, classical methods of integrating differential equations in parametric form were used, as well as graphic and numerical tools provided by the MathCad software package.

Results. The differential equation of the pursuit curve is formulated and its solution in closed parametric form is established. Its numerical analysis was carried out and the influence of the parameters α (ratio of speeds of the pursuer and the fugitive) and k on the behaviour of the pursuit curve was investigated. The dependence of the change in the distance $x(0, k, \alpha)$ along the horizontal axis OX at the moment of apprehension of the fugitive, depending on the magnitude of the angular coefficient k of the straight line of his movement at a fixed coefficient α , was analysed.

Conclusions. As a result of the research, it was found that if the coefficient $\alpha \rightarrow \infty$ (that is, the speed of the pursuer significantly exceeds the speed of the fugitive), then the distance $x(0, k, \alpha)$ at which the latter will be detained goes to zero. On the other hand, if $\alpha \rightarrow 1$ (that is, the speeds of the boats are equal), then the specified distance goes to infinity, that is, the fugitive will not be apprehended. The dependence of the change of the distance $x(0, k, \alpha)$ along the horizontal axis OX on the coefficient k has a well-defined local maximum under the condition $k \neq 0$, which indicates that there is a certain non-zero angle of inclination of the direct flight, which enables the fugitive to achieve the maximum movement $x(0, k, \alpha)$ towards the border between the two countries. Thus, we observe a paradoxical phenomenon: for a successful escape, the strategy of choosing an angle of inclination of a straight line equal to zero (that is, moving along the shortest segment connecting two parallel lines) is not correct.

Keywords: interception of a fugitive on the flat surface; line of pursuit; chase boat; runaway boat; escape line; life line; speed of boats; local maximum.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
30 листопада 2023 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.321883

UDC 519.833+519.833.3

Vadim Romanuke*

Vinnytsia Institute of Trade and Economics of State University of Trade and Economics, Vinnytsia, Ukraine

*Corresponding author: romanukevadimv@gmail.com

TIME-UNIT SHIFTING IN 3-PERSON GAMES IN FINITE AND UNCOUNTABLY INFINITE STAIRCASE-FUNCTION SPACES SOLVED IN PURE STRATEGIES

Background. Games played with staircase-function pure strategies can model discrete-time dynamics of rationalizing the distribution of some limited resources among players. Along with 2-person games, 3-person games are the most applicable models of rationalization in economics, ecology, social sciences, politics, government, and sports. There is a known method of finding an equilibrium in a 3-person game played in staircase-function pure strategy spaces. The time interval on which the game is defined consists of an integer number of time units. The equilibrium is stacked from time-unit equilibria. An open problem is a multiplicity of equilibria (on some time units) leading to a multiplicity of equilibrium stacks. Another open question is how to deal with a 3-person game in which the time interval can be changed or shifted by an integer number of time units.

Objective. The purpose of the paper is to expand and develop the tractable method of solving 3-person games played within players' finite sets of staircase functions for the case when the length of the time interval on which the 3-person game is defined is varied by an integer number of time units.

Methods. To achieve the said objective, a 3-person game, in which the players' strategies are staircase functions of time, is formalized. In such a game, the set of the player's pure strategies is a continuum of staircase functions. The time can be thought of as it is discrete due to the time interval is comprised of time units (subintervals). Then the set of possible values of the player's pure strategy is discretized so that the player possesses a finite set of staircase functions.

Results. The known method is expanded to build a single pure-strategy equilibrium stack in a discrete-time staircase-function 3-person game. The criterion for selecting a single equilibrium solution is to maximize the players' payoffs sum. In the case of a time-unit shifting, this criterion allows extracting the respective best staircase-function equilibrium pure strategy of the player in any "narrower" subgame from the player's best staircase-function equilibrium pure strategy in the "wider" game.

Conclusions. A tractable and efficient method of finding the best pure-strategy equilibrium in a 3-person game played in finite or uncountably infinite staircase-function spaces is to solve a succession of time-unit 3-person games, whereupon their best equilibria are stacked into the best pure-strategy equilibrium. To deal with the case when not every time-unit 3-person game is solved in pure strategies, an effective way is to put a staircase-function game on hold-up on those time units which do not have pure-strategy equilibria. The result of putting the staircase-function game on hold-ups is that the player will obtain one's best staircase-function equilibrium pure strategy with gaps, whichever the time interval and time-unit shifting are.

Keywords: game theory; payoff functional; 3-person game; staircase-function strategy; trimatrix game; staircase-function equilibrium pure strategy.

Introduction

In practical tasks, noncooperative 3-person games are well-posed and easy-to-interpret models to rationalize the distribution of real-world resources, funds, energy, facilities, tools, etc. [1, 2]. Along with 2-person games, 3-person games are the most applicable models of rationalization in economics

[2, 3], ecology [2, 4, 5], social sciences [6], politics [7], government [3, 8], sports [8, 9]. Even games in which players possess just two pure strategies have a good practical impact. For instance, a problem of rationalizing industrial wastewater treatment considered in [4, 5, 10, 11] is solved by using dyadic 3-person games. As industrial enterprises may violate conventions about water treatment, they are

Пропозиція для цитування цієї статті: В.В. Романюк, "Зсув за одиницями часу в іграх трьох осіб у скінченних і незліченно нескінченних просторах сходянкових функцій, що розв'язуються у чистих стратегіях", *Наукові вісті КПП*, № 1, с. 15–36, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321883

Offer a citation for this article: Vadim Romanuke, "Time-unit shifting in 3-person games in finite and uncountably infinite staircase-function spaces solved in pure strategies", *KPI Science News*, no. 1, pp. 15–36, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321883

fined. The fines are directed to control water pollution by measuring it and treating wastewater additionally, if necessary. However, an enterprise may reduce or stop its manufacturing under threat of heavy fines. This results in a budget cut for water resources conservation and recirculation. The dyadic 3-person game models a process of balancing the fines. As a result, the balancing allows industrial enterprises to keep functioning along with satisfactory water recovery.

In particular, the dyadic 3-person game solution in [4] was searched in the form of equilibrium on a regular finite lattice of situations obtained by sampling the continuous set of those situations. An approximate solution was found using concessions in the equilibrium, where the cost for water treatment system application was a conventional unit for each enterprise per a period of time (a day, a week, or a month). By that solution, the water treatment system is turned off for 3 periods of 10, and the 2-fine (a range of the fine for when only two enterprises do simultaneously not treat wastewater) is optimally set at 0.34 units, whereas the 3-fine (a range of the fine for when no one treats wastewater) is set at 1.394 units. Obviously, switching from “clean” to “polluting” manufacturing and backwards can be controlled once per those 10 periods under the corresponding water treatment schedule. In such a schedule, the enterprise develops one’s metastrategy which, in fact, appears to be a primitive staircase function of time.

Games played with staircase-function pure strategies have been recently studied in [12, 13] and, in a more peculiar way, [14, 15]. Whereas an ordinary (“classical”) pure strategy of the player is a simple (point) action whose duration is usually negligible and represented as just a (time) point, a staircase-function pure strategy is a complex process comprising a series of simple actions (moves, decisions, changes, strikes, etc.). The staircase-function pure strategy is defined on a time interval. The time interval is broken into a set of time subintervals (units), on which the strategy is (approximately considered) constant. In fact, a pure staircase-function strategy can be considered as an ordinary mixed strategy unfolded over the time interval. A mixed staircase-function strategy is a far more complicated case, where at least a unit corresponds to an ordinary mixed strategy. The composition of ordinary pure and ordinary mixed strategies that a player has to switch through time units is a model whose practical implementation requires a definitely great number of game repetitions [4, 5, 10, 11, 16, 17].

If each of the three players possesses a finite number of staircase-function pure strategies, the re-

spective 3-person game is finite. The finite 3-person game can be represented as a trimatrix game, whichever pure strategy form is. If pure strategies are staircase functions (of time whose duration is broken into time subintervals or time units), the respective finite 3-person game can be called the trimatrix staircase-function game [1, 13]. Clearly, the number of pure-strategy situations in a trimatrix staircase-function game grows immensely as the number of time units (“stair” subintervals) increases, or the number of possible values of the player’s pure strategy increases, or they both increase [14, 18, 19]. For instance, if the number of time units is just 4, and the number of possible values of every player’s pure strategy is 8, then there is a finite set of

$$8^4 = 4096$$

possible pure strategies (i.e., 4-subinterval staircase functions of time) at this player. The respective trimatrix staircase-function game has a size of

$$4096 \times 4096 \times 4096,$$

and so there are

$$8^4 \cdot 8^4 \cdot 8^4 = 4096 \cdot 4096 \cdot 4096 = 68\,719\,476\,736$$

pure-strategy situations (more than 68.7 billion ones) in this game. If an additional time unit is (somehow) included, the game size increases dramatically: there are

$$\begin{aligned} 8^5 \cdot 8^5 \cdot 8^5 &= 32768 \cdot 32768 \cdot 32768 \\ &= 35\,184\,372\,088\,832 \end{aligned}$$

pure-strategy situations (more than 35.1 trillion ones!) in the respective

trimatrix $32768 \times 32768 \times 32768$ game.

Obviously, solving 3-person games of such gigantic sizes is intractable, let alone that there is no universal algorithm for solving any finite 3-person game played with ordinary (“classical”) pure and mixed strategies [19, 20]. Solving 3-person games in staircase-function pure strategies is always possible, but it takes too much computational resources even if there are a few time units.

For the equilibrium solution type, a method of solving a 3-person game played in staircase-function pure strategy spaces was presented in [13]. The spaces can be finite and uncountably infinite (continuous). The method is based on stacking equilibria of “short” 3-person games, each defined on a time unit where the pure strategy value is constant. In the case of finite 3-person games, the stack is

any interval-wise combination (succession) of the respective equilibria of the “short” trimatrix games (including equilibria in mixed strategies). Unlike the straightforward approach to solving directly the “long” 3-person game (finite or infinite), the presented method “breaks” the “long” game into a succession of “short” games, making thus its solving tractable. However, an open problem is a multiplicity of equilibria (on some time units) leading to a multiplicity of equilibrium stacks. Another open question is how to deal with a 3-person game in which the function-strategy can be redefined on a changed time interval (e.g., shifted by an integer number of time units) [21, 22]. For instance, if the pure staircase-function strategy is indeed considered as an ordinary mixed strategy unfolded over a time interval, but the number of game rounds is shortened, the time interval should become shorter [13, 16, 18, 23, 24]. Such game-interval modifications may occur frequently, and respective game solutions must be found even faster.

Problem statement

Reasoning from the mentioned issues, the objective is to expand and develop the tractable method of solving 3-person games played within players' finite sets of staircase functions [13, 14] for the case when the length of the time interval on which the 3-person game is defined is varied by an integer number of time units. The solution type is equilibrium in staircase-function pure strategies, where it is presumed that such an equilibrium exists. The case when the player possesses an uncountably infinite set (space) of staircase functions is to be considered as well. To meet the objective, the following eight tasks are to be fulfilled:

1. To formalize a 3-person game, in which the players' strategies are functions (of time) defined on a time interval. In such a game, the set of the player's pure strategies is a continuum of functions. Such function-strategies are presumed to be bounded and Lebesgue-integrable.

2. To formalize a 3-person game, in which the players' strategies are staircase functions defined on the time interval. In such a game, the set of the player's pure strategies is a continuum of staircase functions (of time). The time can be thought of as it is discrete due to the time interval is comprised of time units (subintervals).

3. To discretize the set of possible values of the player's pure strategy so that the game played with staircase-function strategies be defined on a product of staircase-function finite spaces.

4. To expand and develop the known method of solving 3-person games (the solution of the pure-strategy equilibrium type) played in staircase-function finite and uncountably infinite spaces by considering a possibility of narrowing the time interval on which the 3-person game is defined. In addition, a method of selecting a single pure-strategy equilibrium should be suggested.

5. To suggest a way of solution when not every “short” 3-person game is solved in pure strategies.

6. To give an example of how the suggested method is applied.

7. To discuss practical applicability and scientific significance of the method for the game theory and operations research.

8. To make an unbiased conclusion on the contribution to the game theory field. An outlook of how the study might be further developed is to be made as well.

3-person game played with pure strategies as functions of time

In a 3-person game, in which the player's pure strategy is a function of time, each of the players uses time-varying strategies defined almost everywhere on interval $[t_1; t_2]$ by $t_2 > t_1$. Pure strategies of the first, second, and third players denoted by $x(t)$, $y(t)$, and $z(t)$, respectively, are presumed to be bounded. Besides, the square of the function-strategy is presumed to be Lebesgue-integrable [25]. Thus, pure strategies of the player belong to a rectangular functional space of functions of time:

$$\begin{aligned} X = \{x(t), t \in [t_1; t_2], \\ t_1 < t_2 : a_{\min} \leq x(t) \leq a_{\max} \\ \text{by } a_{\min} < a_{\max}\} \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \end{aligned} \quad (1)$$

and

$$\begin{aligned} Y = \{y(t), t \in [t_1; t_2], t_1 < t_2 : b_{\min} \leq y(t) \leq b_{\max} \\ \text{by } b_{\min} < b_{\max}\} \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\begin{aligned} Z = \{z(t), t \in [t_1; t_2], t_1 < t_2 : c_{\min} \leq z(t) \leq c_{\max} \\ \text{by } c_{\min} < c_{\max}\} \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \end{aligned} \quad (3)$$

are the sets (sometimes referred to as action spaces) of the players' pure strategies.

The player's payoff in situation

$$\{x(t), y(t), z(t)\} \quad (4)$$

is presumed to be an integral functional [12, 13, 14, 15, 25]. Thus, the first, second, and third players' payoffs in situation (4) are

$$\begin{aligned} & F(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & G(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} g(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & H(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} h(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (7)$$

respectively, where

$$f(x(t), y(t), z(t), t), \quad (8)$$

$$g(x(t), y(t), z(t), t), \quad (9)$$

$$h(x(t), y(t), z(t), t) \quad (10)$$

are functions of $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, explicitly including time t . Therefore, a 3-person game

$$\langle \{X, Y, Z\}, \{F(x(t), y(t), z(t)), G(x(t), y(t), z(t)), H(x(t), y(t), z(t))\} \rangle \quad (11)$$

is uncountably infinite due to it is defined on product

$$X \times Y \times Z \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \times \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \times \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \quad (12)$$

of uncountably infinite rectangular functional spaces (1)–(3) of players' pure strategies. An example of a situation in 3-person game (11) is given in Fig. 1. There are no restrictions to the strategy form the players can use. In the example, the first player uses a sinusoidal strategy with an exponential growth, the second player uses a curvilinear strategy, and the third player uses a close-to-straight ascending line strategy. Each of sets (1)–(3) is a continuum of functions including a subset of staircase functions (this subset is a continuum as well).

In general, the player's payoff functional may have a terminal component. Thus, instead of (5)–(7), the players' payoffs in situation (4) may be calculated as

$$\begin{aligned} & F(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &+ T_f(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & G(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} g(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &+ T_g(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & H(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \int_{[t_1; t_2]} h(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &+ T_h(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2) \end{aligned} \quad (15)$$

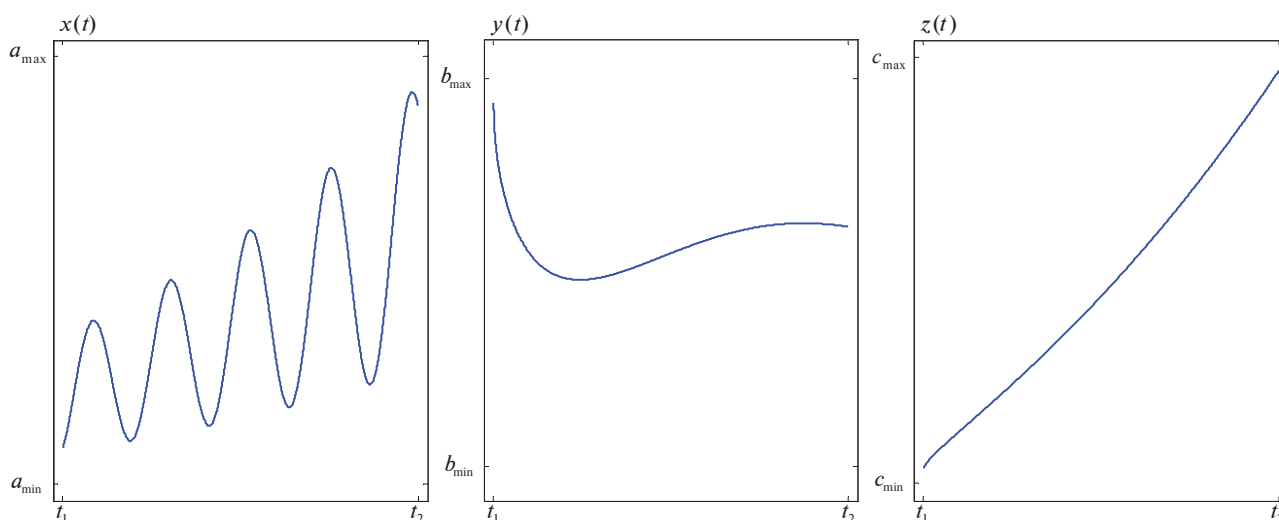


Fig. 1. A situation (4) in 3-person game (11) played in uncountably infinite functional spaces (1)–(3)

by some terminal functions [26]

$$T_f(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2), \quad (16)$$

$$T_g(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2), \quad (17)$$

$$T_h(x(t_2), y(t_2), z(t_2), t_2), \quad (18)$$

depending on only the final state of the player's strategy, but this case is not to be considered here.

3-person game played with staircase-function strategies through discrete time

Presume that the players' pure strategies in game (11) can change their values only a finite number of times. Denote by N the number of time units (subintervals) at which the player's pure strategy is constant, where $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Then the player's pure strategy is a staircase function having at most N different values. Let there be a time-interval breaking

$$\Theta = \{t_1 = \tau^{(0)} < \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(N-1)} < \tau^{(N)} = t_2\}, \quad (19)$$

where $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{N-1}$ are time points at which the staircase-function strategy can change its value. Generally speaking, time-interval breaking (19) is not equidistant, although in most practical cases it is equidistant, i.e.

$$\tau^{(i)} - \tau^{(i-1)} = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (20)$$

The staircase-function strategies are right-continuous [12, 13, 14, 15, 25]:

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(i)} + \varepsilon) = x(\tau^{(i)}), \quad (21)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(i)} + \varepsilon) = y(\tau^{(i)}), \quad (22)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} z(\tau^{(i)} + \varepsilon) = z(\tau^{(i)}) \quad (23)$$

for $i = \overline{1, N-1}$, whereas (if the strategy value changes) and

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(i)} - \varepsilon) \neq x(\tau^{(i)}), \quad (24)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(i)} - \varepsilon) \neq y(\tau^{(i)}), \quad (25)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} z(\tau^{(i)} - \varepsilon) \neq z(\tau^{(i)}) \quad (26)$$

for $i = \overline{1, N-1}$. In the end time point, obviously,

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(N)} - \varepsilon) = x(\tau^{(N)}), \quad (27)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(N)} - \varepsilon) = y(\tau^{(N)}), \quad (28)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} z(\tau^{(N)} - \varepsilon) = z(\tau^{(N)}). \quad (29)$$

A 3-person game played with staircase-function strategies through discrete time can be defined by using (1)–(12), (19)–(29).

Definition 1. 3-person game (11) defined on product (12) of rectangular functional spaces (1)–(3) is called a discrete-time staircase-function 3-person game by time-interval breaking (19), if (21)–(29) hold and

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_i \in [a_{\min}; a_{\max}], \\ y(t) &= \beta_i \in [b_{\min}; b_{\max}], \\ z(t) &= \gamma_i \in [c_{\min}; c_{\max}] \quad \forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}) \\ \text{for } i &= \overline{1, N-1} \text{ and } x(t) = \alpha_N \in [a_{\min}; a_{\max}], \\ y(t) &= \beta_N \in [b_{\min}; b_{\max}], \\ z(t) &= \gamma_N \in [c_{\min}; c_{\max}] \quad \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}], \end{aligned} \quad (30)$$

where the factual payoff of the first player in situation

$$\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\} \quad (31)$$

is

$$\begin{aligned} &F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)})} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\ &\quad \forall i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (32)$$

and

$$\begin{aligned} &F_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\ &= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (33)$$

the factual payoff of the second player in situation (31) is

$$\begin{aligned}
& G_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\
&= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\
&\quad \forall i = \overline{1, N-1}
\end{aligned} \quad (34)$$

and

$$\begin{aligned}
& G_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\
&= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t),
\end{aligned} \quad (35)$$

the factual payoff of the third player in situation (31) is

$$\begin{aligned}
& H_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\
&= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\
&\quad \forall i = \overline{1, N-1}
\end{aligned} \quad (36)$$

and

$$\begin{aligned}
& H_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\
&= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} h(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t).
\end{aligned} \quad (37)$$

Situation (4) in the discrete-time staircase-function 3-person game is a stack of successive situations

$$\{\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1}^N\} \quad (38)$$

in a succession of N (ordinary) 3-person games

$$\begin{aligned}
& \langle \{[a_{\min}; a_{\max}], [b_{\min}; b_{\max}], [c_{\min}; c_{\max}]\}, \\
& \{F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), G_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), H_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\} \rangle \\
& \quad \text{for } i = \overline{1, N}
\end{aligned} \quad (39)$$

defined on product

$$[a_{\min}; a_{\max}] \times [b_{\min}; b_{\max}] \times [c_{\min}; c_{\max}] \quad (40)$$

by (30)–(37). Stacks $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$, $\{\beta_i\}_{i=1}^N$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ are called staircase-function pure strategies of the respective players.

According to Definition 1, let a discrete-time staircase-function 3-person game by time-interval breaking (19) be denoted by

$$\begin{aligned}
& \langle \{X(\Theta), Y(\Theta), Z(\Theta)\}, \\
& \{F(x(t), y(t), z(t)), G(x(t), y(t), z(t)), \\
& H(x(t), y(t), z(t))\} \rangle
\end{aligned} \quad (41)$$

with the players' pure strategy sets

$$\begin{aligned}
X(\Theta) &= \{x(t) \in X([t_1; t_2]) : x(t) = \alpha_i \\
&\in [a_{\min}; a_{\max}] \forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \\
&\text{for } i = \overline{1, N-1} \text{ and } x(t) = \alpha_N \\
&\in [a_{\min}; a_{\max}] \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]\} \\
&\subset X([t_1; t_2])
\end{aligned} \quad (42)$$

and

$$\begin{aligned}
Y(\Theta) &= \{y(t) \in Y([t_1; t_2]) : y(t) = \beta_i \\
&\in [b_{\min}; b_{\max}] \forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \\
&\text{for } i = \overline{1, N-1} \text{ and } y(t) = \beta_N \\
&\in [b_{\min}; b_{\max}] \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]\} \\
&\subset Y([t_1; t_2])
\end{aligned} \quad (43)$$

and

$$\begin{aligned}
Z(\Theta) &= \{z(t) \in Z([t_1; t_2]) : z(t) = \gamma_i \\
&\in [c_{\min}; c_{\max}] \forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \\
&\text{for } i = \overline{1, N-1} \text{ and } z(t) = \gamma_N \\
&\in [c_{\min}; c_{\max}] \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]\} \\
&\subset Z([t_1; t_2]).
\end{aligned} \quad (44)$$

Obviously, discrete-time staircase-function 3-person game (41) is uncountably infinite as each of sets (42)–(44) contains a continuum of function-strategies. An example of situation (4) in a discrete-time staircase-function 3-person game played through 28 time units (subintervals) is given in Fig. 2, where

$$\tau^{(i)} - \tau^{(i-1)} = \frac{t_2 - t_1}{28} \quad \forall i = \overline{1, 28}.$$

The exemplified pure-strategy situation of three staircase functions can be also represented as a stack of 28 successive situations

$$\{\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1}^{28}\}$$

of 28 ordinary 3-person games (39), where each ordinary pure-strategy situation

$$\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\} \quad \text{for } i = \overline{1, 27}$$

corresponds to a time unit (subinterval) $[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]$ and ordinary pure-strategy situation

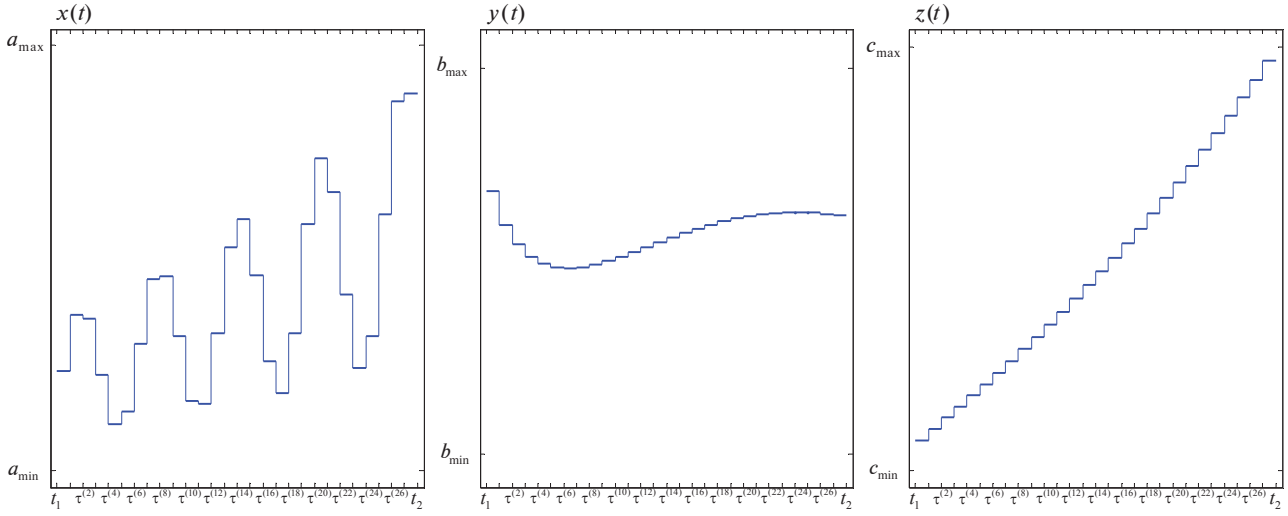


Fig. 2. A situation (4) in discrete-time staircase-function 3-person game (41), where the strategies are “digitized” versions of those strategies in Fig. 1; the game is played in uncountably infinite functional spaces (42)–(44); the exemplified pure-strategy situation is a stack of 28 successive situations $\{\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1}^{28}\}$

$$\{\alpha_{28}, \beta_{28}, \gamma_{28}\}$$

and

corresponds to a time unit (subinterval)

$$[\tau^{(27)}; \tau^{(28)}] = [\tau^{(27)}; t_2].$$

Time-interval breaking (19) allows considering payoffs (5)–(7) in situation (4) equivalent to the sum of respective payoffs (32)–(37). The proof is built by an analogy to that in [14]. Another way to prove (based on 2-person games) can be found in [12].

Theorem 1. In a pure-strategy situation (4) of discrete-time staircase-function 3-person game (41), payoff functionals (5)–(7) are re-written as time-unit-wise sums

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t) \end{aligned} \quad (45)$$

and

$$\begin{aligned} G(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N G_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} H(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N H_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} h(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t), \end{aligned} \quad (47)$$

where situation (4) is a stack of successive situations (38) in a succession of N 3-person games (39).

Proof. Time interval $[t_1; t_2]$ can be re-written as

$$[t_1; t_2] = \left\{ \bigcup_{i=1}^{N-1} [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \right\} \cup [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]. \quad (48)$$

Therefore, the property of countable additivity of the Lebesgue integral can be used:

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t), z(t)) &= \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &= \int_{\left\{ \bigcup_{i=1}^{N-1} [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \right\} \cup [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t). \end{aligned} \quad (49)$$

Owing to (30), $x(t) = \alpha_i$ and $y(t) = \beta_i$ and $z(t) = \gamma_i$, so (49) is simplified as

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ & + \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), z(t), t) d\mu(t) \\ & = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, t) d\mu(t) \\ & + \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N, t) d\mu(t) \\ & = \sum_{i=1}^N F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i). \end{aligned} \quad (50)$$

Consequently, in discrete-time staircase-function 3-person game (41), time-unit-wise sum (45) holds in any pure-strategy situation (4) consisting of staircase-function strategies

$$x(t) \in X(\Theta), \quad y(t) \in Y(\Theta), \quad z(t) \in Z(\Theta).$$

Obviously, time-unit-wise sums (46) and (47) are proved similarly to (48)–(50). $\square$

Theorem 1 provides a fundamental decomposition of the discrete-time staircase-function 3-person game based on the time-unit-wise summing in (45)–(47), regardless of whether the player's action space is finite or not. Although Theorem 1 itself does not provide a method of solving the game, it hints about how the game might be solved in a far easier way [12, 13, 14]. The time-unit-wise decomposition allows us to try finding an ordinary pure-strategy equilibrium in each game (39) separately, whereupon these equilibria are stitched (stacked) together [13]. Nevertheless, even a finite game (39) may not have an equilibrium in pure strategies, let alone the case when game (39) is infinite. So, in further investigation, it is presumed that every time-unit game (39) has a pure-strategy equilibrium.

A presumption about discrete-time staircase-function 3-person game (41) has an equilibrium in staircase-function pure strategies (i.e., this equilibrium is a triple of staircase functions) is equivalent to the presumption of that every time-unit game (39) has a pure-strategy equilibrium (which is a stack of time-unit equilibria). If this pure-strategy equilibrium stack is single, then every time-unit game (39) has a single pure-strategy equilibrium and vice versa [13].

Trimatrix staircase-function game

In a discrete-time staircase-function 3-person game (41), let the set of possible values of every player be finite. This can be done, e.g., by forcing the player to act within a finite subset of possible values of its pure strategies. Formally, the player's pure strategy set is discretized (sampled). The first player's set of possible values of its pure strategies is discretized as

$$\begin{aligned} A = \{ & a_{\min} = a_i^{(0)} < a_i^{(1)} < a_i^{(2)} < \dots \\ & < a_i^{(M-1)} < a_i^{(M)} = a_{\max} \} \end{aligned} \quad (51)$$

and the second player's set of possible values of its pure strategies is discretized as

$$\begin{aligned} B = \{ & b_{\min} = b_i^{(0)} < b_i^{(1)} < b_i^{(2)} < \dots \\ & < b_i^{(Q-1)} < b_i^{(Q)} = b_{\max} \} \end{aligned} \quad (52)$$

and the third player's set of possible values of its pure strategies is discretized as

$$\begin{aligned} C = \{ & c_{\min} = c_i^{(0)} < c_i^{(1)} < c_i^{(2)} < \dots \\ & < c_i^{(S-1)} < c_i^{(S)} = c_{\max} \} \end{aligned} \quad (53)$$

by $M \in \mathbb{N}$ and $Q \in \mathbb{N}$ and $S \in \mathbb{N}$, where

$$a_i^{(m-1)} = a^{(m-1)} \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \text{for } m = \overline{1, M+1} \quad (54)$$

and

$$b_i^{(q-1)} = b^{(q-1)} \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \text{for } q = \overline{1, Q+1} \quad (55)$$

and

$$c_i^{(s-1)} = c^{(s-1)} \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \text{for } s = \overline{1, S+1}. \quad (56)$$

This means that along with the discrete time units (subintervals), the players are forced (somehow) to act within finite subsets of possible values of their pure strategies

$$A = \{ a^{(m-1)} \}_{m=1}^{M+1} \quad (57)$$

and

$$B = \{ b^{(q-1)} \}_{q=1}^{Q+1} \quad (58)$$

and

$$C = \{ c^{(s-1)} \}_{s=1}^{S+1}. \quad (59)$$

Discretizations (51)–(56) allow defining a finite discrete-time staircase-function 3-person game, which is a trimatrix staircase-function game.

Definition 2. Discrete-time staircase-function 3-person game (41) is called a trimatrix staircase-function game if it is played on a product of finite subsets

$$\begin{aligned} X(\Theta, A) &= \left\{ x(t) \in X(\Theta) : x(t) \in \{a^{(m-1)}\}_{m=1}^{M+1} \right\} \\ &\subset X(\Theta) \subset X([t_1; t_2]) \end{aligned} \quad (60)$$

and

$$\begin{aligned} Y(\Theta, B) &= \left\{ y(t) \in Y(\Theta) : y(t) \in \{b^{(q-1)}\}_{q=1}^{Q+1} \right\} \\ &\subset Y(\Theta) \subset Y([t_1; t_2]) \end{aligned} \quad (61)$$

and

$$\begin{aligned} Z(\Theta, C) &= \left\{ z(t) \in Z(\Theta) : z(t) \in \{c^{(s-1)}\}_{s=1}^{S+1} \right\} \\ &\subset Z(\Theta) \subset Z([t_1; t_2]) \end{aligned} \quad (62)$$

of sets (42)–(44). The trimatrix staircase-function game is denoted by

$$\begin{aligned} &\langle \{X(\Theta, A), Y(\Theta, B), Z(\Theta, C)\}, \\ &\{F(x(t), y(t), z(t)), G(x(t), y(t), z(t)), \\ &H(x(t), y(t), z(t))\} \rangle \end{aligned} \quad (63)$$

by sets (42)–(44).

An example of finite sets (60)–(62) of staircase-function pure strategies in a trimatrix staircase-function game is presented in Fig. 3. The players can change their pure strategy value at most twice. Even such a pretty hard restriction grants 64 pure strategies to the first player, 27 pure strategies to the second player, and 125 pure strategies to the third player.

Obviously, the exemplified trimatrix staircase-function game can be “broken” into a succession of three ordinary trimatrix $4 \times 3 \times 5$ games, each related to its time unit (of those three units). In [13], such ordinary games were called “short”. In general, “breaking” trimatrix staircase-function game (63) into a succession of “short” games can be defined as follows.

Definition 3. Trimatrix staircase-function game (63) is a succession of N trimatrix games can be defined as follows.

$$\begin{aligned} &\left\langle \left\{ \{a^{(m-1)}\}_{m=1}^{M+1}, \{b^{(q-1)}\}_{q=1}^{Q+1}, \{c^{(s-1)}\}_{s=1}^{S+1} \right\}, \{F_i, G_i, H_i\} \right\rangle \\ &\text{for } i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (64)$$

with the first player’s payoff matrices

$$F_i = [\varphi_{imqs}]_{(M+1) \times (Q+1) \times (S+1)} \quad (65)$$

whose elements are

$$\begin{aligned} \varphi_{imqs} &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\ &\text{for } i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (66)$$

and

$$\varphi_{Nmqs} = \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t), \quad (67)$$

with the second player’s payoff matrices

$$G_i = [\rho_{imqs}]_{(M+1) \times (Q+1) \times (S+1)} \quad (68)$$

whose elements are

$$\begin{aligned} \rho_{imqs} &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\ &\text{for } i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (69)$$

and

$$\rho_{Nmqs} = \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t), \quad (70)$$

and with the third player’s payoff matrices

$$H_i = [\theta_{imqs}]_{(M+1) \times (Q+1) \times (S+1)} \quad (71)$$

whose elements are

$$\begin{aligned} \theta_{imqs} &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} h(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\ &\text{for } i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (72)$$

and

$$\theta_{Nmqs} = \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} h(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t). \quad (73)$$

Situation (4) in the trimatrix staircase-function game is a stack of successive situations

$$\left\{ \{a_i^{(m-1)}, b_i^{(q-1)}, c_i^{(s-1)}\}_{i=1}^N \right\} \quad (74)$$

in the succession of N trimatrix games (64) by (54)–(56).

According to Definition 3, the assertion of Theorem 1 for trimatrix staircase-function game (63) can be re-written as

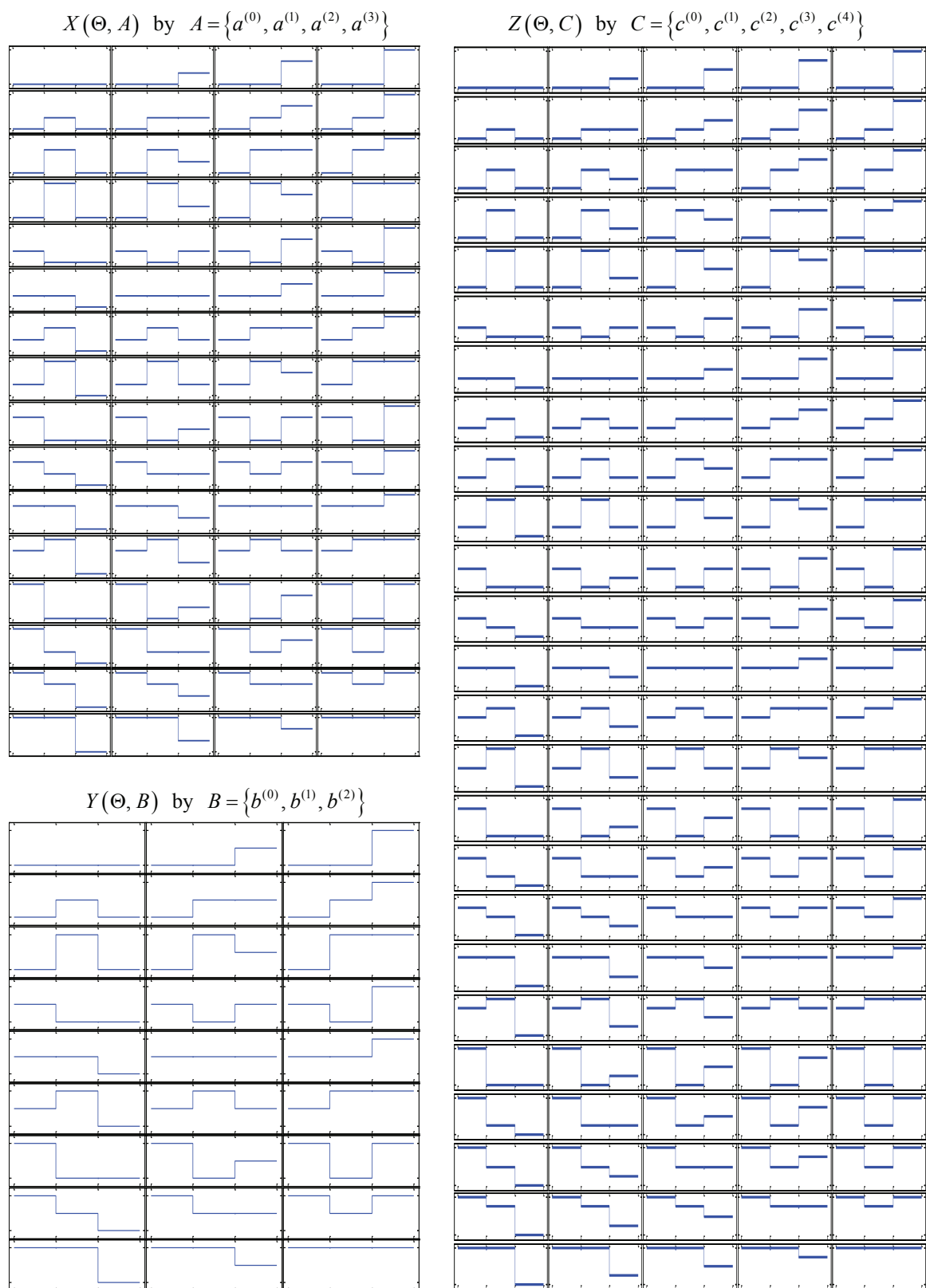


Fig. 3. An example of finite sets (60)–(62) of staircase-function pure strategies in a trimatrix staircase-function game played with 3-time-unit staircase functions of time, where the first, second, and third players have four, three, and five possible values of their pure strategies, respectively

$$\begin{aligned}
 F(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N \varphi_{iqs} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} f(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\
 &+ \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} f(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t), \quad (75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N \rho_{iqs} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} g(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\
 &+ \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} g(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t), \quad (76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(x(t), y(t), z(t)) &= \sum_{i=1}^N \theta_{iqs} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} h(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t) \\
 &+ \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} h(a^{(m-1)}, b^{(q-1)}, c^{(s-1)}, t) d\mu(t). \quad (77)
 \end{aligned}$$

It is worth remembering that, owing to (54)–(56), the first player's payoff in situation

$$\{a_i^{(m-1)}, b_i^{(q-1)}, c_i^{(s-1)}\} \quad (78)$$

is (66), (67), the second player's payoff in situation (78) is (69), (70), and the third player's payoff in situation (78) is (72), (73).

Pure-strategy equilibrium stack

In most practical problems, if time-unit game (39) is solved in pure strategies, there often are multiple equilibria (or even a continuum of equilibria). So, as it is presumed that every time-unit game (39) has at least a pure-strategy equilibrium, then some time-unit games may have multiple pure-strategy equilibria. The question is how to select a single equilibrium. To do this, the criterion of maximizing the sum of players' payoffs is used [12, 14, 18, 19, 23].

Theorem 2. If

$$\{\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*\} \quad (79)$$

is an equilibrium situation in 3-person game (39), $i = \overline{1, N}$, and maximum

$$\begin{aligned}
 &\max_{\{\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*\}} \{F_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) \\
 &+ G_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) + H_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*)\} \\
 &= F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\
 &+ H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \quad (80)
 \end{aligned}$$

is reached at an equilibrium situation

$$\{\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}\} \quad (81)$$

in this game for $i = \overline{1, N}$, then the maximum of the players' payoffs sum in a pure-strategy equilibrium stack of discrete-time staircase-function 3-person game (41) is reached at a stack

$$\{\{\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}\}\}_{i=1}^N \quad (82)$$

and this maximum is

$$\begin{aligned}
 p_{1,N}^{**} &= \sum_{i=1}^N [F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\
 &+ G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**})]. \quad (83)
 \end{aligned}$$

Proof. As (81) is an equilibrium in game (39), then stack (82), owing to Theorem 4 in [13], is an equilibrium in staircase-function pure strategies in game (41). Owing to Theorem 1, the first, second, and third players' payoffs in equilibrium stack (82) are

$$u_{1,N}^{**} = \sum_{i=1}^N F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (84)$$

$$v_{1,N}^{**} = \sum_{i=1}^N G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (85)$$

$$w_{1,N}^{**} = \sum_{i=1}^N H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (86)$$

respectively. Then

$$\begin{aligned}
 u_{1,N}^{**} + v_{1,N}^{**} + w_{1,N}^{**} &= \sum_{i=1}^N F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\
 &+ \sum_{i=1}^N G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + \sum_{i=1}^N H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\
 &= \sum_{i=1}^N [F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\
 &+ G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**})] \\
 &= \sum_{i=1}^N \max_{\{\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*\}} \{F_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) \\
 &+ G_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) + H_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*)\}, \quad (87)
 \end{aligned}$$

where (87) is the sum of all N maxima (80). $\square$

Theorem 2 suggests a method to select the best pure-strategy equilibrium stack. Clearly, the method is correct for both discrete-time staircase-function 3-person game (41) and trimatrix staircase-function game (63). Consider now the case when a discrete-time staircase-function 3-person game is played through a lesser number of time units. Thus, instead of time-interval breaking (19), the game is played by a narrower time-interval breaking

$$\Theta_* = \{t_1 \leq \tau_1 = \tau^{(n)} < \tau^{(n+1)} < \tau^{(n+2)} < \dots < \tau^{(U-1)} < \tau^{(U)} = \tau_2 \leq t_2\}, \quad (88)$$

where

$$n \in \{0, N-1\}, \quad U \in \{1, N\}, \quad n < U, \quad (89)$$

and $\{\tau^{(i)}\}_{i=n+1}^{U-1}$ are time points at which the staircase-function strategy can change its value. So, $\Theta_* \subset \Theta$ in terms of the interval breaking.

Theorem 3. If (79) is an equilibrium situation in 3-person game (39), $i = n+1, \bar{U}$ by (89), and maximum (80) is reached at an equilibrium situation (81) in this game for $i = n+1, \bar{U}$, then the maximum of the players' payoffs sum in a pure-strategy equilibrium stack of discrete-time staircase-function 3-person game

$$\begin{aligned} & \langle \{X(\Theta_*), Y(\Theta_*), Z(\Theta_*)\}, \\ & \{F(x(t), y(t), z(t)), G(x(t), y(t), z(t)), \\ & H(x(t), y(t), z(t))\} \end{aligned} \quad (90)$$

by time-interval breaking (88) is reached at a stack

$$\{\{\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}\}\}_{i=n+1}^U \quad (91)$$

and this maximum is

$$\begin{aligned} p_{n+1,U}^{**} = & \sum_{i=n+1}^U [F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\ & + G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**})]. \end{aligned} \quad (92)$$

Proof. As (81) is an equilibrium in game (39), then stack (91), owing to Theorem 4 in [13], is an equilibrium in staircase-function pure strategies in game (90). Owing to Theorem 1, whose assertion remains correct for game (90) by only changing the time interval endpoints to $\tau_1 = \tau^{(n)}$ and $\tau_2 = \tau^{(U)}$, the first, second, and third players' payoffs in equilibrium stack (91) are

$$u_{n+1,U}^{**} = \sum_{i=n+1}^U F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (93)$$

$$v_{n+1,U}^{**} = \sum_{i=n+1}^U G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (94)$$

$$w_{n+1,U}^{**} = \sum_{i=n+1}^U H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}), \quad (95)$$

respectively. Then

$$\begin{aligned} & u_{n+1,U}^{**} + v_{n+1,U}^{**} + w_{n+1,U}^{**} \\ & = \sum_{i=n+1}^U F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + \sum_{i=n+1}^U G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\ & \quad + \sum_{i=n+1}^U H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\ & = \sum_{i=n+1}^U [F_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) + G_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}) \\ & \quad + H_i(\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**})] \\ & = \sum_{i=n+1}^U \max_{\{\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*\}} \{F_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) + G_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*) \\ & \quad + H_i(\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*)\}, \end{aligned} \quad (96)$$

where (96) is the sum of all $U-n$ maxima (80). $\square$

It is quite obvious that

$$\{\{\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}\}\}_{i=n+1}^U \subset \{\{\alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**}\}\}_{i=1}^N \quad (97)$$

regardless of whether it is a discrete-time staircase-function 3-person game (41) or a trimatrix staircase-function game (63). That is, the best pure-strategy equilibrium stack (82) in a "wider" game contains the best pure-strategy equilibrium stack (91) in a "narrower" game. Therefore, Theorem 3 along with Theorem 4 in [13] imply that the time-unit shifting does not change the structure and number of pure-strategy equilibria (it can be also a continuum on a time unit) in a discrete-time staircase-function 3-person game, nor does it change the structure of the best pure-strategy equilibrium stack determined by the maximum of the players' payoffs sum. In fact, game (90) is a subgame of discrete-time staircase-function 3-person game (41). A pure-strategy equilibrium solution of the subgame can be easily taken from the respective pure-strategy equilibrium solution (if it exists) of "wider" game (41). The best pure-strategy equilibrium stack consists of the same pure-strategy equilibria being the best for the given time units (on which the respective "short"

3-person games are played), whichever time interval encloses those time units.

When not every “short” 3-person game is solved in pure strategies

It is likely that, as the number of successive time units increases, there may appear at least one “short” 3-person game without any pure-strategy equilibria. So, if mixed-strategy solutions are unacceptable, then what to do in this case? Are the proved assertions and the method of selecting a single pure-strategy equilibrium still relevant then?

In fact, the existence or non-existence of pure-strategy equilibria in a time-unit 3-person game does not depend on any other time-unit game, nor does it influence the others. Therefore, an equilibrium on a time unit would not influence the equilibrium stack if the time unit was deleted (canceled, annulled, etc.). Consequently, it is sufficient to put the “wider” game on hold-up on those time units which do not have pure-strategy equilibria. In practice, it is closely equivalent to hold on while certain changes are done in the system. On the other hand, hold-ups are equivalent to nonworking days, although the latter are mostly distributed regularly (say, on weekends and holidays). Anyway, the hold-up is almost always possible to incorporate. Then time units without pure-strategy-equilibrium are just like to “disappear”, and “wider” game (41) is solved, by this condition, as a pure-strategy equilibrium stack.

Examples of 3-person games solved in staircase-function pure strategies

Consider a finite 3-person game, in which players’ payoff functionals (5)–(7) are

$$F(x(t), y(t), z(t)) = \int_{[t_1; t_2]} \cos\left(0.8xyz t - \frac{\pi}{6}\right) e^{-0.001yzt} d\mu(t), \quad (98) \quad \text{and}$$

$$G(x(t), y(t), z(t)) = \int_{[t_1; t_2]} \sin\left(0.6xyz t + \frac{\pi}{9}\right) d\mu(t), \quad (99)$$

$$H(x(t), y(t), z(t)) = \int_{[t_1; t_2]} \sin\left(0.9xyz t - \frac{\pi}{8}\right) d\mu(t), \quad (100)$$

discretizations (51)–(53) are such that finite subsets (57)–(59) are

$$A = \{a^{(m-1)}\}_{m=1}^9 = \{0.5 + 0.5m\}_{m=1}^9 \subset [1; 5], \quad (101)$$

$$B = \{b^{(q-1)}\}_{q=1}^{11} = \{6.8 + 0.2q\}_{q=1}^{11} \subset [7; 9], \quad (102)$$

$$C = \{c^{(s-1)}\}_{s=1}^9 = \{3.9 + 0.1s\}_{s=1}^9 \subset [4; 4.8], \quad (103)$$

and the players are allowed to change their pure strategy values only at time points (the time-interval breaking is equidistant)

$$\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^9 = \{1.4\pi + 0.1\pi i\}_{i=1}^9 \quad (104)$$

by $t_1 = 1.4\pi$, $t_2 = 2.4\pi$.

This finite 3-person game is a trimatrix staircase-function game being a succession of 10 trimatrix games

$$\left\langle \{0.5 + 0.5m\}_{m=1}^9, \{6.8 + 0.2q\}_{q=1}^{11}, \{3.9 + 0.1s\}_{s=1}^9 \right\rangle, \{F_i, G_i, H_i\} \quad (105)$$

with the first player’s payoff $9 \times 11 \times 9$ matrices (65)

$$F_i = [\varphi_{imqs}]_{9 \times 11 \times 9} \quad (106)$$

whose elements (66) and (67) are

$$\begin{aligned} & \varphi_{imqs} \\ &= \int_{[1.3\pi + 0.1\pi i; 1.4\pi + 0.1\pi i]} \cos\left(0.8 \cdot (0.5 + 0.5m) \right. \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t - \frac{\pi}{6} \Big) \\ & \quad \times e^{-0.001 \cdot (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t} d\mu(t) \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, 9} \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{10mqs} &= \int_{[2.3\pi; 2.4\pi]} \cos\left(0.8 \cdot (0.5 + 0.5m) \right. \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t - \frac{\pi}{6} \Big) \\ & \quad \times e^{-0.001 \cdot (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t} d\mu(t), \end{aligned} \quad (108)$$

with the second player’s payoff $9 \times 11 \times 9$ matrices (68)

$$G_i = [\rho_{imqs}]_{9 \times 11 \times 9} \quad (109)$$

whose elements (69) and (70) are

$$\begin{aligned} & \rho_{imqs} \\ &= \int_{[1.3\pi+0.1\pi i; 1.4\pi+0.1\pi i)} \sin\left(0.6 \cdot (0.5 + 0.5m)\right) \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t + \frac{\pi}{9} d\mu(t) \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, 9} \end{aligned} \quad (110)$$

and

$$\begin{aligned} \rho_{10mqs} &= \int_{[2.3\pi; 2.4\pi)} \sin\left(0.6 \cdot (0.5 + 0.5m)\right) \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t + \frac{\pi}{9} d\mu(t), \end{aligned} \quad (111)$$

with the third player's payoff $9 \times 11 \times 9$ matrices (71)

$$\mathbf{H}_i = [\theta_{imqs}]_{9 \times 11 \times 9} \quad (112)$$

whose elements (72) and (73) are

$$\begin{aligned} & \theta_{imqs} \\ &= \int_{[1.3\pi+0.1\pi i; 1.4\pi+0.1\pi i)} \sin\left(0.9 \cdot (0.5 + 0.5m)\right) \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t - \frac{\pi}{8} d\mu(t), \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, 9} \end{aligned} \quad (113)$$

and

$$\begin{aligned} \theta_{10mqs} &= \int_{[2.3\pi; 2.4\pi)} \sin\left(0.9 \cdot (0.5 + 0.5m)\right) \\ & \quad \times (6.8 + 0.2q)(3.9 + 0.1s)t - \frac{\pi}{8} d\mu(t). \end{aligned} \quad (114)$$

Each of the 10 trimatrix games (105) by (106)–(114) is solved in pure strategies. The numbers of pure-strategy equilibria on time units

$$\left\{ \left\{ [1.3\pi + 0.1\pi i; 1.4\pi + 0.1\pi i] \right\}_{i=1}^9, [2.3\pi; 2.4\pi] \right\} \quad (115)$$

are 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, respectively. The best pure-strategy equilibrium stack

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ \alpha_i^{**}, \beta_i^{**}, \gamma_i^{**} \right\}_{i=1}^{10} = \left\{ \left\{ a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**} \right\}_{i=1}^{10} \right\} \right. \\ & \quad \left. = \left\{ x_i^{**}(t), y_i^{**}(t), z_i^{**}(t) \right\} \right\} \end{aligned}$$

by

$$\begin{aligned} a_i^{**} \in A &= \{0.5 + 0.5m\}_{m=1}^9, \quad b_i^{**} \in B = \{6.8 + 0.2q\}_{q=1}^{11}, \\ c_i^{**} \in C &= \{3.9 + 0.1s\}_{s=1}^9, \end{aligned}$$

at which the maximum of the players' payoffs sum $p_{1,10}^{**}$ by (83) is reached, is presented in Fig. 4, where the equilibria on time units

$$[1.5\pi; 1.6\pi), [2\pi; 2.1\pi), \quad (116)$$

which do not contribute to the maximum, are shown with square-dotted line. Note that the first player's equilibrium strategies $a_2^* = 2.5$ and $a_7^* = 2.5$ not

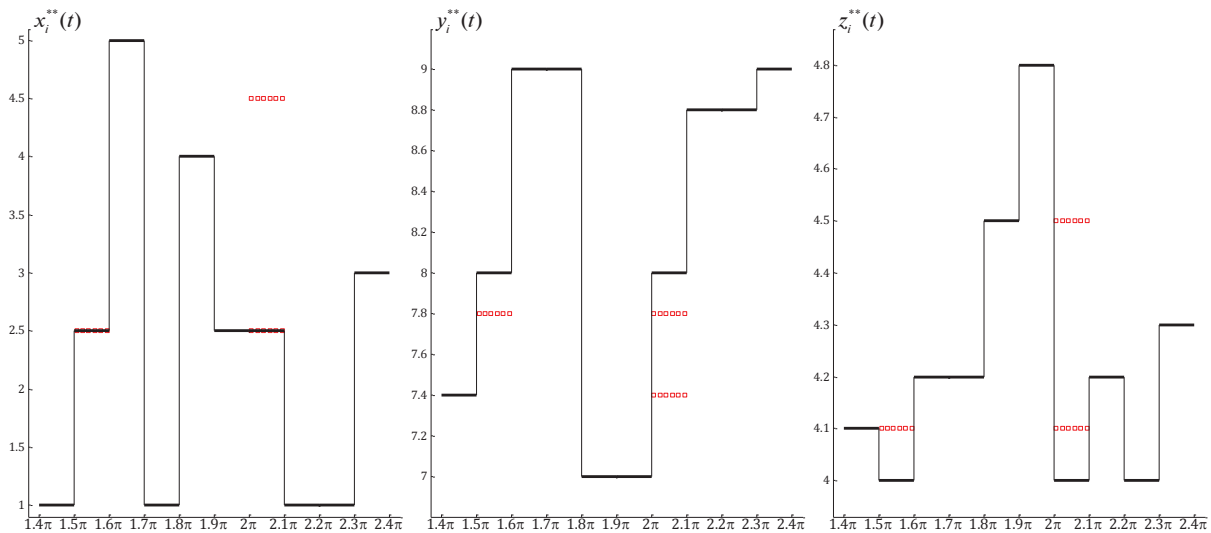


Fig. 4. The best pure-strategy equilibrium situation (as the triple of the best staircase-function pure strategy for every player) in the trimatrix staircase-function game being a succession of the 10 trimatrix games (105) by (106)–(114)

contributing to the maximum on time units (116) within the respective equilibrium situations

$$\{a_2^*, b_2^*, c_2^*\} = \{2.5, 7.8, 4.1\}$$

and

$$\{a_7^*, b_7^*, c_7^*\} = \{2.5, 7.8, 4.1\}$$

just overlap (coincide) with themselves within the best equilibrium situations

$$\{a_2^{**}, b_2^{**}, c_2^{**}\} = \{2.5, 8, 4\}$$

and

$$\{a_7^{**}, b_7^{**}, c_7^{**}\} = \{2.5, 8, 4\}$$

on (116).

Fig. 5 shows how players' payoffs

$F_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*)$ (shown as asterisks),

$G_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*)$ (shown as circles),

$H_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*)$ (shown as diamonds)

in every possible equilibrium situation

$$\{a_i^*, b_i^*, c_i^*\} \text{ for } i = \overline{1, 10} \quad (117)$$

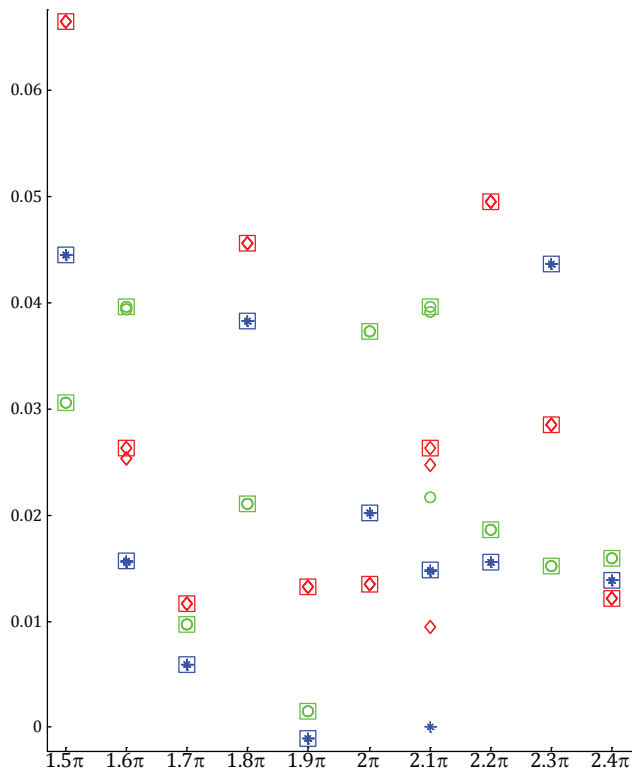


Fig. 5. Payoffs at the end of every time unit in every possible equilibrium situation (117)

are distributed. The best time-unit payoffs

$$F_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}), \quad (118)$$

$$G_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}), \quad (119)$$

$$H_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}) \quad (120)$$

in every best equilibrium situation

$$\{a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}\} \text{ for } i = \overline{1, 10} \quad (121)$$

are highlighted with squares.

Fig. 6 shows how players' payoffs

$$u_{1,k}^* = \sum_{i=1}^k F_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*) \text{ for } k = \overline{1, 10}, \quad (122)$$

$$v_{1,k}^* = \sum_{i=1}^k G_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*) \text{ for } k = \overline{1, 10}, \quad (123)$$

$$w_{1,k}^* = \sum_{i=1}^k H_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*) \text{ for } k = \overline{1, 10}, \quad (124)$$

and their best payoffs (highlighted with squares)

$$u_{1,k}^{**}, v_{1,k}^{**}, w_{1,k}^{**} \text{ for } k = \overline{1, 10} \quad (125)$$

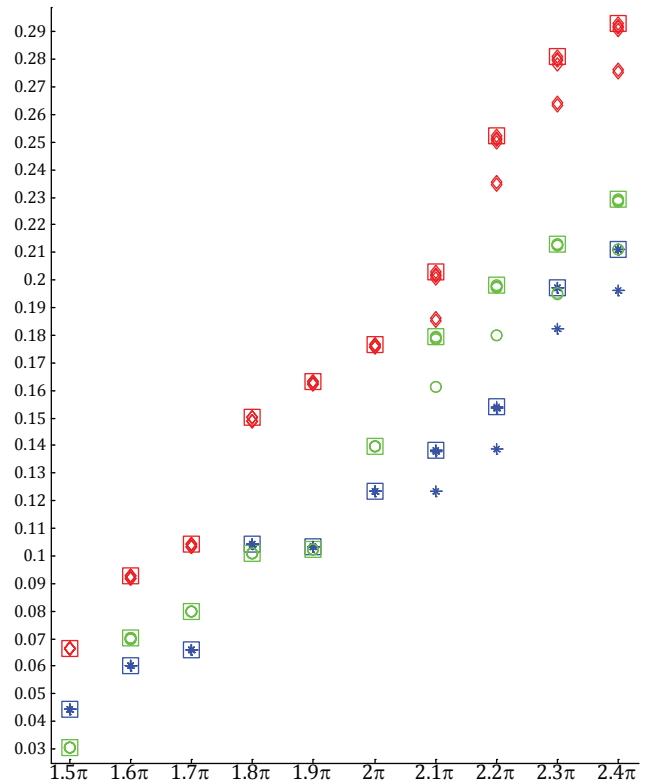


Fig. 6. Cumulative payoffs (122)–(124) and best cumulative payoffs (125) at the end of every time unit

by (84)–(86) develop as the time progresses. In fact, payoffs (122)–(125) are cumulative:

$$\begin{aligned} u_{1,1}^* &= F_1(a_1^*, b_1^*, c_1^*), & v_{1,1}^* &= G_1(a_1^*, b_1^*, c_1^*), \\ w_{1,1}^* &= H_1(a_1^*, b_1^*, c_1^*), & u_{1,1}^{**} &= F_1(a_1^{**}, b_1^{**}, c_1^{**}), \\ v_{1,1}^{**} &= G_1(a_1^{**}, b_1^{**}, c_1^{**}), & w_{1,1}^{**} &= H_1(a_1^{**}, b_1^{**}, c_1^{**}) \end{aligned}$$

are the payoffs after the first time-unit game,

$$\begin{aligned} u_{1,10}^* &= \sum_{i=1}^{10} F_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*), & v_{1,10}^* &= \sum_{i=1}^{10} G_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*), \\ w_{1,10}^* &= \sum_{i=1}^{10} H_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*) \end{aligned}$$

are the resulting payoffs after the end of the trimatrix staircase-function game, and

$$\begin{aligned} u_{1,10}^{**} &= \sum_{i=1}^{10} F_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}), & v_{1,10}^{**} &= \sum_{i=1}^{10} G_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}), \\ w_{1,10}^{**} &= \sum_{i=1}^{10} H_i(a_i^{**}, b_i^{**}, c_i^{**}) \end{aligned}$$

are the eventual (best) players' payoffs in the trimatrix staircase-function game being a succession of the 10 trimatrix games (105) by (106)–(114).

Fig. 7 shows how the sum of players' payoffs

$$p_{1,k}^* = u_{1,k}^* + v_{1,k}^* + w_{1,k}^* \quad \text{for } k = \overline{1, 10} \quad (126)$$

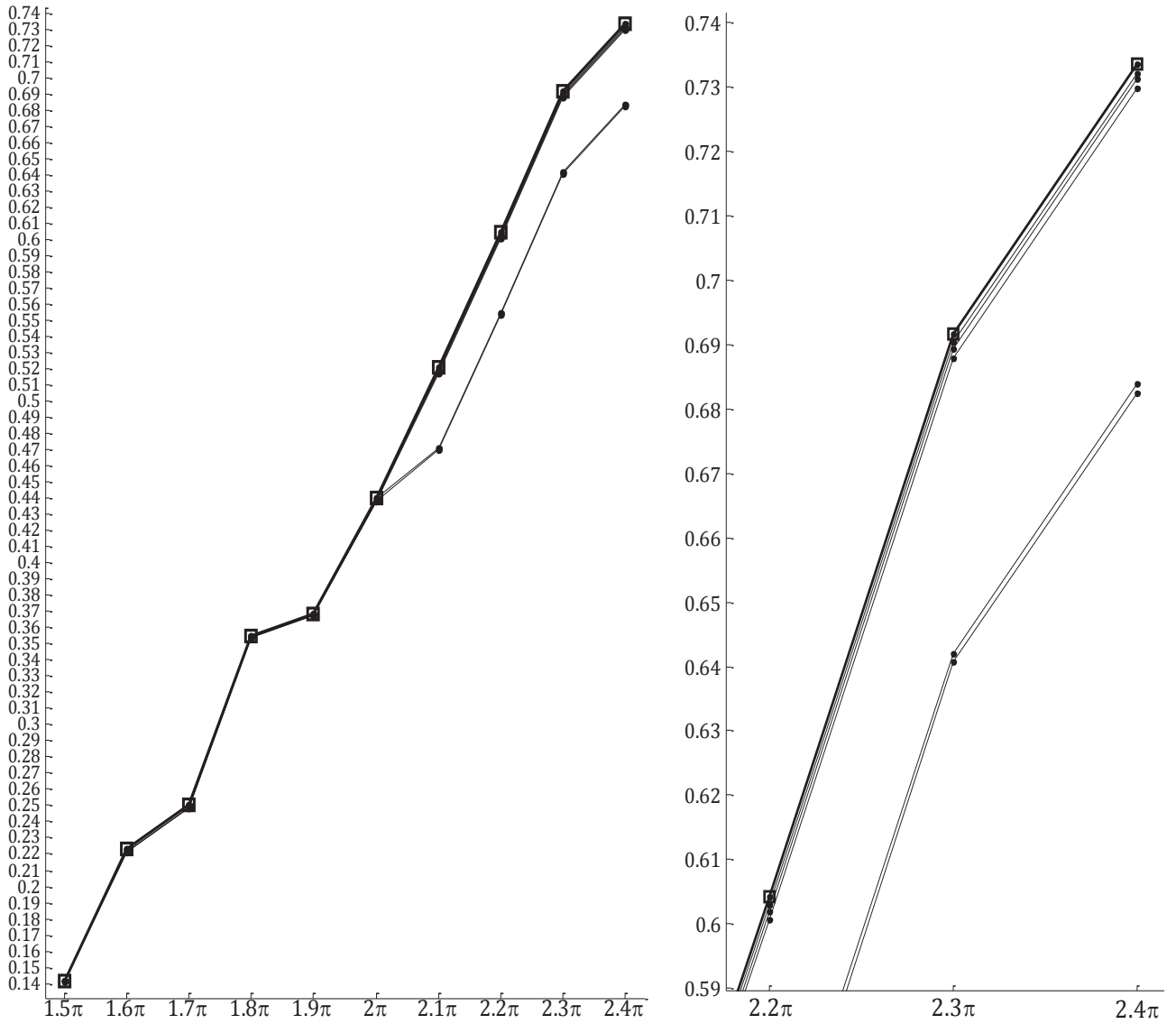


Fig. 7. Cumulative payoff sums (126) and (127) at the end of every time unit

and the best sum of players' payoffs (highlighted with thicker line and squares)

$$p_{1,k}^{**} = u_{1,k}^{**} + v_{1,k}^{**} + w_{1,k}^{**} \quad \text{for } k = \overline{1, 10}. \quad (127)$$

develop as the time progresses. Due to there are six pure-strategy equilibrium stacks, there are six polylines (126), among which polyline (127) is the best (the factual payoffs sum maximum is clearly seen).

According to Theorem 3, Fig. 4 contains the best equilibrium stack in the exemplified staircase-function game defined on any subset of time units (115). In other words, if the time interval in players' payoff functionals (98)–(100) is narrowed by an integer number of time units (either from the left or right or from both endpoints), it is sufficient to narrow the time interval in Fig. 4 and extract the respective part of the best staircase-function pure strategy for every player. If only right endpoint t_2 is shifted to some $t = \tau_2$, then the cumulative payoffs are those at the respective time-unit end in Fig. 6 (the plot part on $(\tau_2; t_2]$ is just cut off) and their best sum is in Fig. 7 (the best-sum polyline on $(\tau_2; t_2]$ is cut off as well). If left endpoint t_1 is shifted to some $t = \tau_1$ (regardless of whether the right endpoint is shifted or not), the cumulative payoffs and their best sum are to be recalculated. For this, payoffs at the end of every time unit in Fig. 5 can be used.

Now, what if the exemplified staircase-function game is continued to play beyond $t_2 = 2.4\pi$?

Say, when $t_1 = 2.4\pi$ and $t_2 = 20.5\pi$, and the players are still allowed to change their pure strategy values only through 0.1π time step, the staircase-function game does not have a pure-strategy equilibrium stack because there are many unit-time trimatrix games not having a pure-strategy equilibrium situation. However, putting the staircase-function game on hold-up on those time units which do not have pure-strategy equilibria allows to obtain the players' best staircase-function pure strategies with gaps (Fig. 8–10). It is up to the administrator (supervisor, manager, controller, etc.), who defines (or constrains) the rules of a system to be game-modelled, to “legalize” such gaps. Those gaps are not necessarily to be holidays or something like that. If, say, the time unit is a day, then the gap can be a day during which any activity of the players (personifying some agents on, e.g., a market) is forbidden (or suppressed) [19, 23, 27].

It is quite clear that, in real-world practice, a great deal of finite (ordinary) 3-person games do not have pure-strategy equilibria. In the case when at least one of the three players possesses an infinite set (or a continuum) of one's pure strategies, the existence of pure-strategy equilibria is far less likely. So, a “legalization” of pure-strategy solution gaps must be an additional condition imposed on the game model.

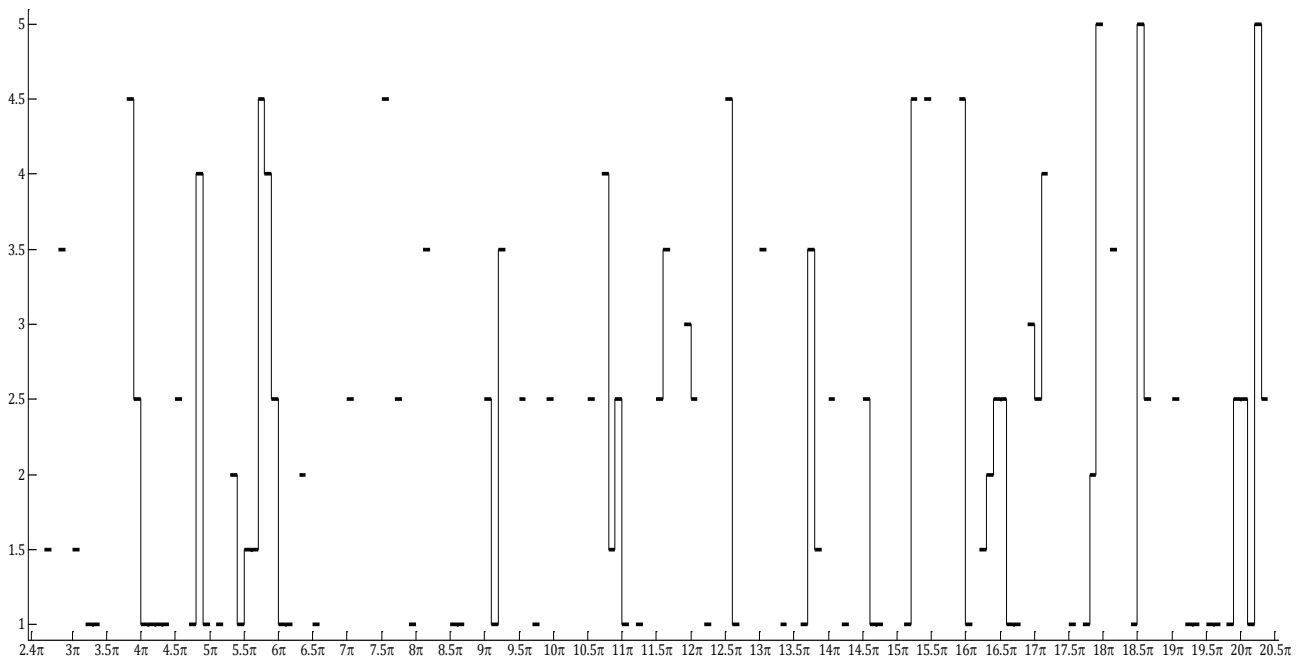


Fig. 8. The first player's best staircase-function pure strategy with gaps

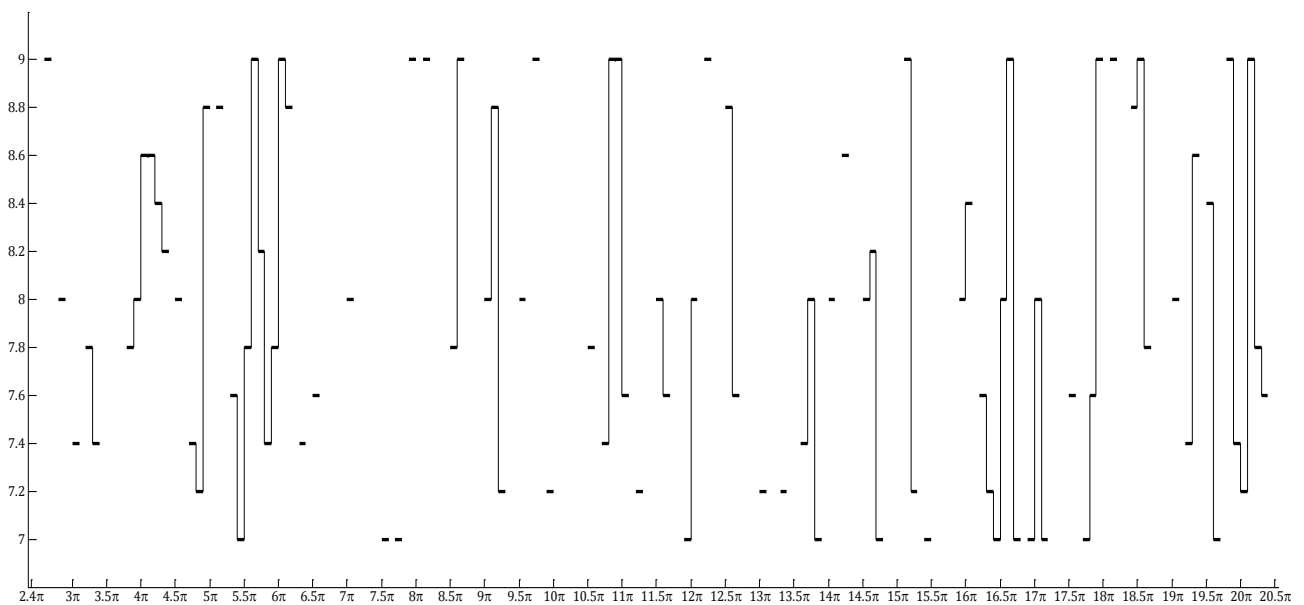


Fig. 9. The second player's best staircase-function pure strategy with gaps

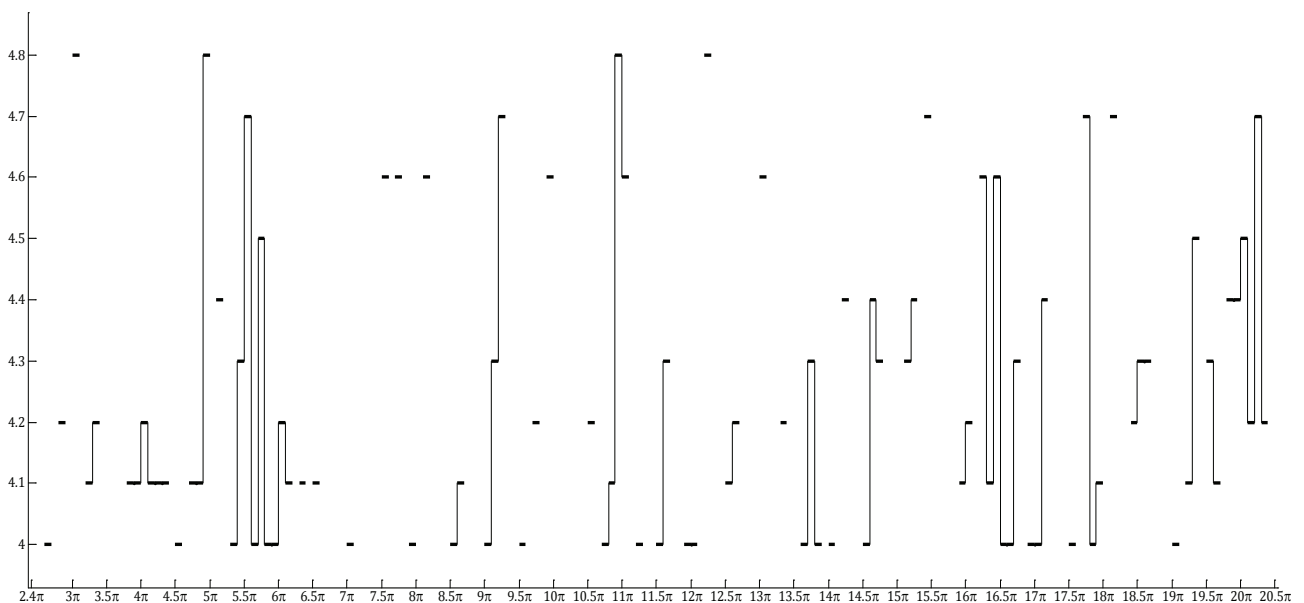


Fig. 10. The third player's best staircase-function pure strategy with gaps

Discussion of the contribution

The suggested method is an important supplement to the method of solving a 3-person game played in staircase-function pure strategy spaces presented in [13]. Along with the approach of the pure-strategy solution gaps, it allows quickly finding the best pure-strategy equilibrium (Theorem 2) in a discrete-time staircase-function 3-person game just by finding pure-strategy equilibria of a succession of time-unit subgames, even when not every

“short” 3-person game is solved in pure strategies. In the case of a trimatrix staircase-function game, being “wider” one, its pure-strategy equilibrium situation is formed by solving and stacking pure-strategy equilibria of successive smaller-sized trimatrix games. The stacking is done in a similar manner for (uncountably) infinite games also. Then, owing to Theorem 3, the respective best equilibrium solution of any “narrower” subgame can be taken from the “wider” game best pure-strategy equilibrium. The best equilibrium situation in subgame (90) is easily

found regardless of whether it is an (uncountably) infinite game or a trimatrix staircase-function game. Consequently, the suggested method is a significant contribution to the 3-person game theory and operations research, in the sense of both practical applicability and scientific soundness.

In the case of a trimatrix staircase-function game, the computational efficiency is only defined by and limited to the efficiency of finding pure-strategy equilibrium situations in an ordinary (time-unit) trimatrix game whose size is commonly not that large. Usually, this is about the direct search. Without considering the succession of time-unit trimatrix games, any straightforward approach to finding pure-strategy equilibrium situations in a trimatrix staircase-function game is intractable.

The case when the player's payoff functional has a terminal component is only seeming to be more general than that of functionals (5)–(7). Indeed, whichever terminal functions (16)–(18) are, functionals (13)–(15) can be always brought to the form of functionals (5)–(7) by transforming and fitting the terminal function under the integral. Then integrated functions (8)–(10) are respectively changed but the conception of the integral functional remains the same. This is why the terminal component case has not been considered.

Another peculiarity is the inclusion of time variable t into functions (8)–(10) to be integrated. As time variable t is explicitly integrated, it means that the time progress influences the process modeled by the staircase-function game. In simple terms, the explicit time variable t under the integral means that something changes within the process. Contrariwise, if in a discrete-time staircase-function 3-person game time t is not explicitly included in functions (8)–(10), then

$$\begin{aligned} & F_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) d\mu(t) \\ &= f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot (\tau^{(i)} - \tau^{(i-1)}) \\ & \quad \forall i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (128)$$

and

$$\begin{aligned} & F_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\ &= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) d\mu(t) \\ &= f(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \cdot (\tau^{(N)} - \tau^{(N-1)}) \end{aligned} \quad (129)$$

instead of (32) and (33),

$$\begin{aligned} & G_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) d\mu(t) \\ &= g(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot (\tau^{(i)} - \tau^{(i-1)}) \\ & \quad \forall i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (130)$$

and

$$\begin{aligned} & G_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\ &= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) d\mu(t) \\ &= g(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \cdot (\tau^{(N)} - \tau^{(N-1)}) \end{aligned} \quad (131)$$

instead of (34) and (35), and

$$\begin{aligned} & H_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ &= \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) d\mu(t) \\ &= h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot (\tau^{(i)} - \tau^{(i-1)}) \\ & \quad \forall i = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (132)$$

and

$$\begin{aligned} & H_N(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \\ &= \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} h(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) d\mu(t) \\ &= h(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N) \cdot (\tau^{(N)} - \tau^{(N-1)}) \end{aligned} \quad (133)$$

instead of (36) and (37). Equalities (128)–(133) mean that the player's payoff value, depending only on the time unit length, is equal to the length multiplied by the respective value of the function under the integral. If the length does not change in the case of trimatrix staircase-function game (63), then the time-unit trimatrix game does not change. If the length does not change in the case of discrete-time staircase-function 3-person game (41), the time-unit (ordinary) 3-person game defined on parallelepiped (40) does not change. Then the solution (of any type) to the initial (finite or uncountably infinite) discrete-time staircase-function 3-person game is determined just by the solution of a one time-unit game, and this solution will not change as the time units go by. Such a triviality of the equal-length-time-unit solution (by implicit time) is explained by a standstill of the players' strategies (not to be confused with equal-length-time-unit solutions, like that one in Fig. 4, where time is explicit under the

integral).

Without underestimation, the scientific significance of the discrete-time staircase-function 3-person game and the methods of finding the best pure-strategy equilibrium in it (provided by Theorems 2 and 3) is high. Owing to Theorems 2 and 3, such games, if finite, are very simple models to describe struggling for rationalizing the distribution of some limited resources among three sides. Unlike an ordinary trimatrix game, which models only a static process of the struggle, a discrete-time staircase-function 3-person game considers the discrete-time dynamics of the struggle.

Searching for the best pure-strategy equilibrium is much simplified if it is somehow known that a discrete-time staircase-function 3-person game has just a single pure-strategy equilibrium situation. Then, owing to Theorem 3 in [13], every time-unit game has a single pure-strategy equilibrium. Once it is found on a time unit, the (direct) search on this unit is stopped. This is a kind of an early stop condition. It allows for significantly shortening the time of computations making thus the solving process even more efficient, especially when time-unit games are solved concurrently.

Conclusions

Due to a pure staircase-function strategy can be considered as an ordinary mixed strategy unfolded over a time interval, staircase-function 3-person games are important mathematical objects to study ordinary (“classical”) 3-person games played on a finite horizon of game rounds. Besides, staircase-function games fairly describe discrete-time dynamics of competing processes. So, building and developing a theory for staircase-function games and their solutions is an actual task and a significant contribution to the game theory field.

Directly searching for a pure-strategy equilibrium in a trimatrix staircase-function game is an intractable problem because of a gigantic size of the game rendered to an ordinary (“classical”) trimatrix game. The same concerns (to a much more greater extent) a discrete-time staircase-function 3-person game, in

which at least one of the three players possesses an infinite set (or a continuum) of pure staircase-function strategies. Moreover, the time interval on which the discrete-time staircase-function 3-person game, being either finite or (uncountably) infinite, is defined can vary (be shifted) by an integer number of time units. For dealing with such a time-unit shifting along with selecting a single equilibrium solution, a tractable and efficient method of finding the best pure-strategy equilibrium in a 3-person game played in finite or uncountably infinite staircase-function spaces is to solve a succession of time-unit 3-person games, whereupon their best equilibria are stacked into the best pure-strategy equilibrium. The criterion for selecting a single equilibrium solution is to maximize the players’ payoffs sum. This criterion allows extracting the respective best staircase-function equilibrium pure strategy of the player in any “narrower” subgame from the player’s best staircase-function equilibrium pure strategy in the “wider” game.

To deal with the case when not every time-unit 3-person game is solved in pure strategies, an effective way is to put a staircase-function game on hold-up on those time units which do not have pure-strategy equilibria. During such a “freezing” of the game, the player’s payoff is not accumulated (i.e., is not added up to the preceding payoff). The players cannot change their strategies or any their activity is suppressed by attaching the respective prohibition to the game model. The result of putting the staircase-function game on hold-ups is that the player will obtain one’s best staircase-function equilibrium pure strategy with gaps, whichever the time interval and time-unit shifting are.

The study might be further developed in order to consider other solution types including situations with efficient (and, maybe, non-equilibrium) strategies. Moreover, the criterion for selecting a single solution situation on each time unit can be more disputable when at least two players’ payoff ranges differ significantly. Then, payoff normalization (standardization) or a correction of the criterion is to be studied as well.

References

- [1] A. Matsumoto and F. Szidarovszky, “Game Theory and Its Applications”, Springer Singapore, 2025, 283 p. <https://link.springer.com/book/9789819605897>
- [2] T. Oraby *et al.*, “Chapter 8 – The Environmental Kuznets Curve Fails in a Globalized Socio-Ecological Metapopulation: A Sustainability Game Theory Approach”, in: *A. S. R. Srinivasa Rao and C. R. Rao (eds.), Handbook of Statistics*, Elsevier, vol. 39, 2018, pp. 315–341. DOI: 10.1016/bs.host.2018.05.003
- [3] M. J. Osborne, “An introduction to game theory”, Oxford University Press, 2003, 554 p. <https://global.oup.com/academic/product/an-introduction-to-game-theory-9780195128956>

- [4] V.V. Romanuke, "Ecological-economic balance in fining environmental pollution subjects by a dyadic 3-person game model", *Applied Ecology and Environmental Research*, vol. 17, no. 2, pp. 1451–1474, 2019. DOI: 10.15666/aeer/1702_14511474
- [5] V.V. Romanuke, "Environment guard model as dyadic three-person game with the generalized fine for the reservoir pollution", *Ecological Safety and Nature Management*, iss. 6, pp. 77–94, 2010. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/19414>
- [6] R.B. Myerson, "Game theory: Analysis of Conflict", Harvard University Press, 1997, 600 p. <https://www.wiley.com/en-nz/Game+Theory%3A+Analysis+of+Conflict-p-9780674341166>
- [7] H. Moulin, "Théorie des jeux pour l'économie et la politique", Hermann Paris, 1981, 248 p. <https://portal.univ.edu.vu/fr/recherche/88-humanities-social-sciences/752>
- [8] N. Nisan *et al.*, "Algorithmic Game Theory", Cambridge University Press, 2007, 778 p. DOI: 0.1017/CBO9780511800481
- [9] S.J. Brams and P.D. Straffin, Jr., "Prisoners' dilemma and professional sports drafts", *American Mathematical Monthly*, vol. 86, no. 2, pp. 80–88, 1979. DOI: 10.2307/2321942
- [10] V.V. Romanuke, "Recommendations on using the nonequilibrium symmetric situation in a dyadic game as a model of the environment preservation with the three subjects of pollution", *Ecological Safety and Nature Management*, iss. 5, pp. 144–159, 2010. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/19405>
- [11] V.V. Romanuke, "Practical realization of the strategy in the most advantageous symmetric situation of the dyadic game with the three subjects of the reservoir pollution", *Ecological Safety*, iss. 8, no. 4, pp. 49–56, 2009. http://www.nbuv.gov.ua/old_jrn/natural/Ekol_bezpeka/2009_4/pdf/49.pdf
- [12] V.V. Romanuke, "Two-person games on a product of staircase-function continuous and finite spaces", *Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics*, iss. 29, pp. 67–90, 2021. <http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/ami/article/view/11117>
- [13] V.V. Romanuke, "Equilibrium stacks for a three-person game on a product of staircase-function continuous and finite strategy spaces", *Foundations of Computing and Decision Sciences*, vol. 47, no. 1, pp. 27–64, 2022. DOI: 10.2478/fcds-2022-0002
- [14] V.V. Romanuke, "Finite uniform approximation of two-person games defined on a product of staircase-function infinite spaces", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 145, pp. 36–50, 2022. DOI: 10.1016/j.ijar.2022.03.005
- [15] V.V. Romanuke, "Pareto-efficient strategies in 2-person games in staircase-function continuous and finite spaces", *Decision Making: Applications in Management and Engineering*, iss. 1, vol. 5, pp. 27–49, 2022. DOI: 10.31181/dmame0316022022r
- [16] J.P. Benoit and V. Krishna, "Finitely repeated games", *Econometrica*, iss. 4, vol. 53, pp. 905–922, 1985. DOI: 10.2307/1912660
- [17] G.J. Mailath and L. Samuelson, "Repeated Games and Reputations: Long-Run Relationships", Oxford University Press, 2006, 672 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195300796.001.0001
- [18] D. Fudenberg and J. Tirole, "Game Theory", MIT Press, Cambridge, MA, 1991, 603 p. <https://mitpress.mit.edu/9780262061414/game-theory/>
- [19] S. Adlakha *et al.*, "Equilibria of dynamic games with many players: Existence, approximation, and market structure", *Journal of Economic Theory*, vol. 156, pp. 269–316, 2015. DOI: 10.1016/j.jet.2013.07.002
- [20] K. Leyton-Brown and Y. Shoham, "Essentials of game theory: a concise, multidisciplinary introduction", Morgan & Claypool Publishers, 2008, 104 p. DOI: 10.2200/S00108ED1V01Y200802AIM003
- [21] S. Kim *et al.*, "Flexible risk control strategy based on multi-stage corrective action with energy storage system", *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 110, pp. 679–695, 2019. DOI: 10.1016/j.ijepes.2019.03.064
- [22] S. Rahal *et al.*, "Hybrid strategies using linear and piecewise-linear decision rules for multistage adaptive linear optimization", *European Journal of Operational Research*, vol. 290, iss. 3, pp. 1014–1030, 2021. DOI: 10.1016/j.ejor.2020.08.054
- [23] T.C. Schelling, "The Strategy of Conflict", Harvard University, 1980, 328 p. <https://www.hup.harvard.edu/books/9780674840317>
- [24] P. Bernhard and J. Shinar, "On finite approximation of a game solution with mixed strategies", *Applied Mathematics Letters*, vol. 3 (1), pp. 1–4, 1990. DOI: 10.1016/0893-9659(90)90054-F
- [25] R.E. Edwards, "Functional Analysis: Theory and Applications", New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, 781 p. <https://archive.org/details/functionalanalysis0000edwa/mode/2up>
- [26] F.L. Lewis *et al.*, "Optimal Control", Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2012, 552 p. DOI: 10.1002/9781118122631
- [27] S.P. Coraluppi and S.I. Marcus, "Risk-sensitive and minimax control of discrete-time, finite-state Markov decision processes", *Automatica*, vol. 35 (2), pp. 301–309, 1999. DOI: 10.1016/S0005-1098(98)00153-8

В.В. Романюк

ЗСУВ ЗА ОДИНИЦЯМИ ЧАСУ В ІГРАХ ТРЬОХ ОСІБ У СКІНЧЕННИХ І НЕЗЛІЧЕННО НЕСКІНЧЕННИХ ПРОСТОРАХ СХОДИНКОВИХ ФУНКЦІЙ, ЩО РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ У ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ

Проблематика. Ігри, котрі розігруються чистими стратегіями у формі сходиноквих функцій, можуть моделювати дискретно-часову динаміку раціоналізації розподілу деяких обмежених ресурсів між гравцями. Як і ігри двох осіб, ігри трьох осіб є найбільш

уживаними моделями такої раціоналізації в економіці, екології, соціальних науках, політиці, управлінні, спорті. Існує відомий метод знаходження рівноваги у грі трьох осіб, що розігрується у просторах чистих стратегій у формі сходиноквих функцій. Інтервал часу, на якому така гра задається, складається із цілого числа часових одиниць. Ця рівновага утворюється укладанням рівноваг на одиницях часу. Відкритою задачею є множинність рівноваг (на деяких одиницях часу), що призводить до множинності укладів рівноваг. Ще одне відкрите питання полягає у тому, що робити із грою трьох осіб, у якій інтервал часу може бути змінений або зсунутий на ціле число часових одиниць.

Мета дослідження. Мета полягає у тому, щоб розвинути й удосконалити ефективний метод розв'язування ігор трьох осіб, котрі розігруються у межах скінченних множин сходиноквих функцій гравців для випадку, коли період, упродовж якого гра триває, змінюється на ціле число часових одиниць.

Методика реалізації. Щоб досягти зазначеної мети, формалізують гру трьох осіб, в якій стратегії гравців є сходинокними функціями часу. У такій грі множина чистих стратегій гравця є континуумом сходиноквих функцій. Оскільки часовий інтервал складається з часових одиниць (підінтервалів), час вважають дискретним. Після цього множина можливих значень чистої стратегії гравця дискретизується так, що гравець володіє скінченною множиною сходиноквих функцій.

Результати дослідження. Відомий метод розвинуто так, щоб будувати єдиний уклад рівноваг у чистих стратегіях у будь-якій дискретно-часовій грі трьох осіб зі сходинокними функціями. Критерієм вибору єдиної рівноважної ситуації є максимізація суми ви-
грашів гравців. У випадку зсуву за часовими одиницями цей критерій дозволяє витягувати відповідну найкращу рівноважну чисту стратегію у формі сходиноквої функції гравця у довільній «більш вузькій» підгрі з найкращої рівноважної чистої стратегії у формі сходиноквої функції цього гравця у «ширшій» грі.

Висновки. Ефективним методом знаходження найкращої рівноваги у чистих стратегіях у грі трьох осіб, котра розігрується у скінченних або незліченно нескінченних просторах сходиноквих функцій, є розв'язування послідовності ігор трьох осіб на часових одиницях, після чого їх найкращі рівноваги укладаються у найкращу рівновагу у чистих стратегіях. У випадку, коли не кожна гра трьох осіб на часових одиницях розв'язується у чистих стратегіях, ефективним рішенням є призупинення гри зі сходиноквих функцій на тих часових одиницях, котрі не мають рівноваг у чистих стратегіях. У результаті таких зупинок гравець отримуватиме власну сходинокву рівноважну чисту стратегію із пропусками, яким би не був часовий інтервал і зсув за часовими одиницями.

Ключові слова: теорія ігор; функціонал вигравів; гра трьох осіб; стратегія у формі сходиноквої функції; триматрична гра; сходиноква рівноважна чиста стратегія.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
25 жовтня 2024 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.322112

УДК 539.216.2:661.685

Л.С. Левчук¹, Р.А. Шкарбань¹, Т.І. Вербицька^{1*}, Ю.М. Макогон¹¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: verbitska@kpm.kpi.ua

ОСОБЛИВОСТІ ВПЛИВУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
НА ТЕРМІЧНУ СТАБІЛЬНІСТЬ ФАЗИ NiSi У ПЛІВКАХ Ni(Pt)Si

Проблематика. Підвищити швидкодiю, ступiнь iнтеграцiї мiкросхем та їх надiйної експлуатацiї можна завдяки застосуванню термiчно стiйких нанорозмiрних плiвок-силiцидiв, перехiдних металiв як функцiональних елементiв. Напруження у структурах є загальною проблемою мiкроелектронiки, яку слiд враховувати на всiх етапах виробництва, зберiгання та експлуатацiї як дискретних приладiв, так i iнтегральних схем.

Мета дослідження. Дослідження впливу напруженого стану та легувального елемента Pt на фазовий склад i термiчну стабiльнiсть моносилiциду нiкелю NiSi у нанорозмiрних плiвках [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм] та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм] на пiдкладках монокристалiчного Si(001) пiд час вiдпалу у вакуумi в iнтервалi температур 400–1000 °C.

Методика реалiзацiї. Нанорозмiрнi плiвки осаджено методом магнетронного розпорощення на пiдкладки Si(001) за кiмнатної температури. Вiдпал зразкiв проводився у вакуумi $\sim 1,3 \cdot 10^{-3}$ Па в iнтервалi температур 400–1000 °C. Методами рентгеноструктурного фазового аналізу, мас-спектрометрiї вторинних нейтралей i резистометрiї (чотиризондовий метод) досліджено вплив Pt на змiну напруженого стану та термiчну стабiльнiсть фази NiSi у плiвках Ni(Pt) на монокристалiчній пiдкладцi Si(001).

Результати дослідження. Визначено вплив внутрiшнiх механiчних напружень i вiмiсту легувального елемента Pt у плiвцi на послiдовнiсть, температуру формування силiцидних фаз i термiчну стабiльнiсть моносилiциду нiкелю NiSi пiд час вiдпалу у вакуумi.

Висновки. Встановлено, що додавання Pt у плiвку Ni приводить до пiдвищення температури формування моносилiциду нiкелю порiвняно з плiвкою Ni (30 нм). Моносилiцид нiкелю NiSi починає формуватись у плiвках з 1 ат. % Pt та 8 ат. % Pt пiсля вiдпалу за температур 500 °C та 450 °C вiдповiдно. Пiдвищення термiчної стiйкостi NiSi пов'язано зi значним зменшенням рушiйної сили фазового переходу NiSi у NiSi₂ за рахунок формування твердого розчину Ni_xPt_{1-x}Si, який має меншу вiльну енергiю, що обумовлено позитивним внеском добутку $T \cdot \Delta S$.

Ключові слова: напружений стан; NiSi; фазовий склад; нанорозмiрнi плiвки; вiдпал; вакуум.

Вступ

Закономірності фазоутворення у плівках Ni(Pt) на підкладках монокристалічного Si(001) є ключовим фактором, який впливає на створення і функціонування на їх основі напівпровідникових пристроїв [1], мікроелектромеханічних систем (МЕМС) [2], каталізаторів та мембран як у хімічній промисловості [3], так і для потреб екології [4].

Існує шість стабільних фаз силіциду нікелю – Ni₃Si, Ni₃₁Si₁₂, Ni₂Si, Ni₃Si₂, NiSi та NiSi₂, які є близькими за стехіометрією [5]. У тонких плівках на утворення фаз впливає багато факто-

рів – підкладка, додавання легувальних елементів, товщина шарів, середовище відпалу, метод нанесення тонкої плівки. Для потреб мікроелектроніки найбільш затребуваним є моносиліцид нікелю NiSi [6]. Завдяки низькому опору (~ 10 мОм·см) NiSi використовують для затвора транзисторів з топологічними розмірами, що не перевищують 65 нм [7, 8]. Утім, зменшення товщини плівок силіцидів нікелю призводить до різкої зміни послідовності утворення фаз, характерних для масивних зразків [9].

Головним недоліком використання фази NiSi є її стабільність лише до 600–800 °C [10], тобто зі зростанням температури в моносиліциді

Пропозиція для цитування цієї статті: Л.С. Левчук, Р.А. Шкарбань, Т.І. Вербицька, Ю.М. Макогон, “Особливості впливу напруженого стану на термічну стабільність фази NiSi у плівках Ni(Pt)/Si”, *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 37–43, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.322112

Offer a citation for this article: Leonid Levchuk, Ruslan Shkarban, Tetiana Verbitska, Yuriy Makogon, “Features of the influence of the stress state on the thermal stability of the nisi phase in Ni(Pt)/Si films”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 37–43, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.322112

нікелю порушується структурна однорідність – спостерігається агломерація [11]. Якщо температура відпалу перевищує 800 °С, шорсткість NiSi збільшується завдяки утворенню фази з більшим питомим опором NiSi₂ [4].

Оскільки 75 % технологічних операцій з виготовлення інтегральних схем здійснюється за підвищених температур після того, як силіцидна плівка сформована [12], завдання з підвищення її термостабільності є найбільш актуальним. Відомо багато наукових робіт, присвячених розширенню температурного інтервалу існування фази NiSi [7] і факторів, що на нього впливають [13]. У результаті численних експериментів було встановлено, що збільшити однорідність та температурний інтервал існування NiSi можна, застосовуючи легування металами (до 10 % ат.) [14] або напилюючи тонку металеву плівку на поверхню силіциду ([15]) чи між його шарами. Металом, який найкраще підвищує температуру агломерації, запобігає виникненню небажаних фаз і не викликає зменшення питомого опору, є Pt [16, 17]. У роботі [18] автори показали, що прошарок Pt знижує теплоту утворення NiSi, що і приводить до термічної стабільності цієї фази. Утім, використання Pt підвищує вартість як виробу, так і технологічного процесу. Знизити вартість можна, якщо нанести на підкладку плівку сплаву NiPt. У науковій літературі немає відомостей щодо оптимального елементного складу сплаву NiPt та його впливу на термічну стабільність фаз, що виникають. Зазвичай у виробництві інтегральних схем використовують плівку сплаву NiPt, який наносять на підкладку Si.

Під впливом температури під час швидкого відпалу зазвичай утворюється твердий розчин NiPtSi [19–20]. У роботі [21] показано підвищення термічної стабільності NiSi та перешкодження переходу в NiSi₂ під час високотемпературного відпалу. Зниження теплоти утворення NiSi, викликане прошарком Pt, запропоновано як засіб для підвищення термічної стабільності у роботі [22].

Постановка задачі

Знання закономірностей фазоутворення у плівках Ni(Pt) на підкладках монокристалічного Si(001) безпосередньо впливає на створення та функціонування на їх основі напівпровідникових пристроїв і мікроелектромеханічних систем. Напружений стан і додавання легувального елемента Pt змінюють температуру початку утворення та інтервал існування моно-

силіциду нікелю NiSi у нанорозмірних плівках [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм] та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм] на підкладках монокристалічного Si(001) під час відпалу у вакуумі в інтервалі температур 400–1000 °С.

Методика дослідження

Нанорозмірні плівки [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм] та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм] осаджено методом магнетронного розпорошення на підкладки монокристалічного кремнію Si(001) за кімнатної температури. Відпал відбувався у вакуумі $\sim 1,3 \cdot 10^{-3}$ Па в інтервалі температур 400 °С – 1000 °С. Зразки нагрівалися протягом 3 хв – 5 хв, витримувалися за відповідної температури відпалу 30 с, а потім охолоджувалися до температури ~ 45 °С без розвакуування.

Дослідження фазового складу і структури плівок після осадження та відпалів проводилось методом рентгеноструктурного фазового аналізу з фотографічною реєстрацією (випромінювання $\text{Co } K_{\alpha 1,2}$, $\lambda_{\text{Co}} = 1,79\,021\text{ \AA}$) у камері Дебая. Термічні напруження оцінювали за формулою

$$\sigma_T = \Delta\alpha \cdot \Delta T \left(\frac{E}{1 - \nu} \right),$$

де E – модуль Юнга плівки;

ν – коефіцієнт Пуассона;

ΔT – різниця між кімнатною температурою і температурою відпалу;

$\Delta\alpha$ – різниця між коефіцієнтами термічного розширення підкладки і плівки. Негативне значення σ означає, що у плівці є напруження стиску, а позитивне – напруження розтягу. Залишкові механічні напруження було оцінено за зміною об'єму після утворення силіцидів нікелю для рефлексу Ni(111) та NiSi(021). Електропір вимірювали чотиризондовим методом. Розподіл елементів по товщині плівки досліджено методом мас-спектрометрії вторинних нейтралей (МСВН).

Результати дослідження та їх обговорення

Фазові перетворення у плівці [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм]/Si(001)

На рентгенограмі плівки (Ni + 1 ат. % Pt) після осадження ідентифіковано текстуровані рефлекси від Ni та Pt (рис. 1). На рис. 2, а–в показано пошаровий хімічний аналіз розподілу елементів за товщиною у плівці (Ni + 1 ат. % Pt).

Оскільки між осажденою плівкою сплаву (Ni + 1 ат. % Pt) і кремнієм підкладки межа поділу чітка, можна зробити висновок, що взаємної дифузії між ними не відбувається.

Під час відпалу за температури 400 °C починаються взаємна дифузія і перебіг твердотільних реакцій між плівкою та підкладкою (рис. 1).

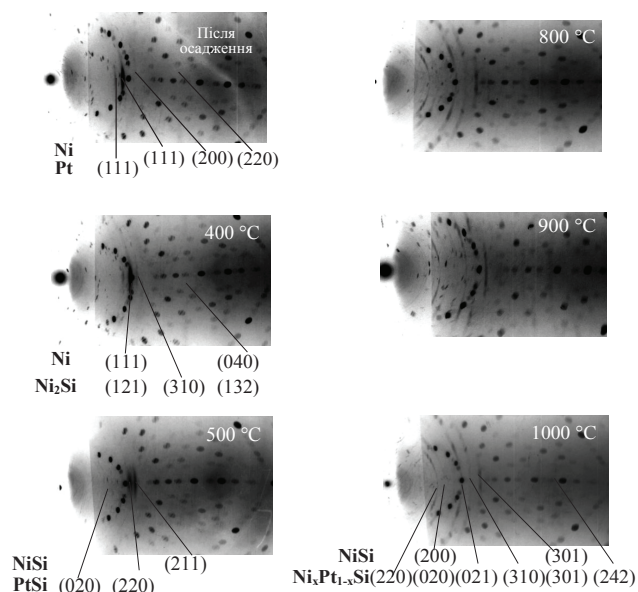


Рис. 1. Рентгенограми від плівок (Ni + 1 ат. % Pt) після осадження і відпалу у вакуумі за температур 400 °C – 1000 °C

На рентгенограмі з'являються рефлекси фази силіциду Ni₂Si, збагаченого Ni, що супроводжується підвищенням електроопору (рис. 3). Це пояснюється тим, що більша частина нікелю дифундує у кремній раніше, ніж утворюються інтерметалідні сполуки за вищих температур. Ще однією причиною може бути зміна коефіцієнта термічного розширення твердого розчину з температурою відпалу. Пошаровий хімічний аналіз плівки (Ni + 1 ат. % Pt) після відпалу за 450 °C підтверджує наявність двох фаз Ni та силіциду Ni₂Si (рис. 2, б).

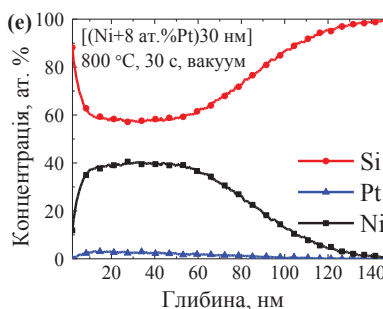
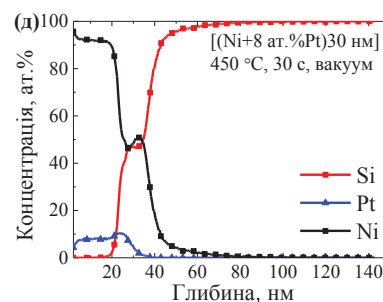
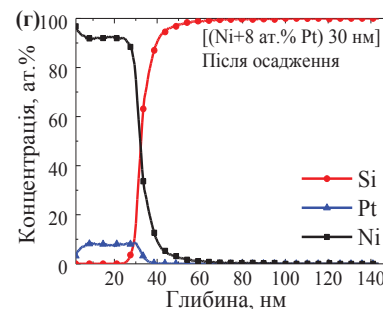
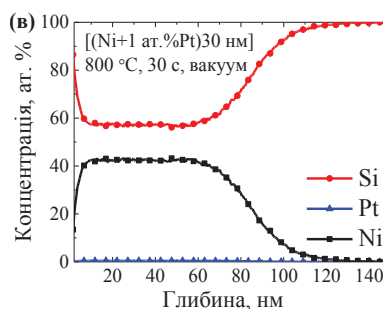
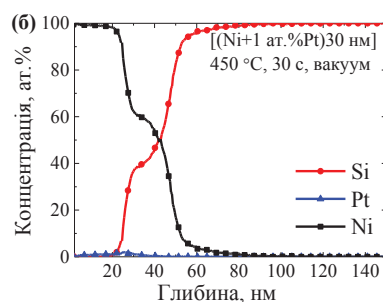
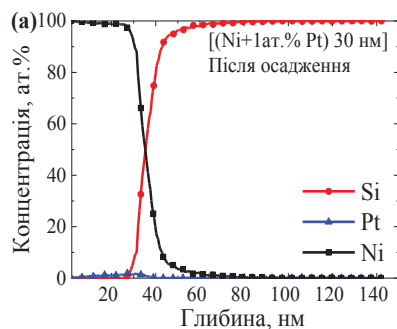


Рис. 2. Пошаровий хімічний аналіз розподілу елементів по товщині плівок [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 nm] та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 nm] після осадження (а, з) і відпалу за температур 450 °C (б, д) та 800 °C (в, е)

Відпал за 500 °С супроводжується зниженням електроопору, що пов'язано з появою фази моносиліциду нікелю NiSi (рис. 3). Під час відпалу за температури 600 °С у плівці з'являються рефлекси потрійного силіциду $Ni_xPt_{1-x}Si$, електроопір якого дещо вищий, ніж у NiSi, який утворюється у нелегованій платиною плівці Ni(30 нм)/Si (рис. 3). Подальше підвищення температури відпалу до 800 °С якісно дифракційної картини не змінює (рис. 1). Пошаровий хімічний аналіз розподілу елементів за товщиною за цієї температури підтвердив наявність фази NiSi. Pt поширена по всій товщині силіцидної плівки (рис. 2, в). Дані пошарового хімічного аналізу показують, що твердотільні реакції відбулись по всій товщині плівки. На це вказує форма профілів концентрації елементів Ni, Pt та Si — на кожному із них утворилась поличка. Розміщення поличок одна під одною вказує на утворення у зразку фази NiSi, в якій рівномірно розміщена Pt.

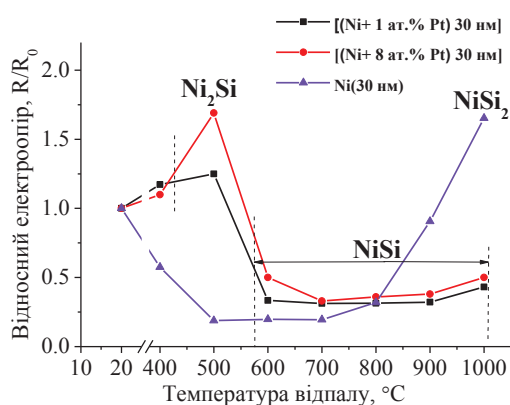


Рис. 3. Зміна відносного електроопору плівок [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм], [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм] та Ni (30 нм) з температурою відпалу

У табл. 1 наведено дані про зміну фазового складу у плівці (Ni + 1 ат. % Pt) з температурою відпалу.

Таблиця 1. Зміна фазового складу плівки з температурою відпалу

Температура відпалу, °С	Фазовий склад
Після осадження	Ni, Pt
400	Ni, Ni ₂ Si
450	Ni, Ni ₂ Si
500	NiSi, PtSi
600	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
700	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
800	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
900	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
1000	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si

На рис. 4 показано зміну розрахункових термічних напружень у шарах Ni, NiSi на підкладці монокристалічного кремнію та NiSi на NiSi₂. У шарі Ni на кремнії більший рівень напружень стиску, ніж у NiSi в інтервалі температур 400 °С – 500 °С.

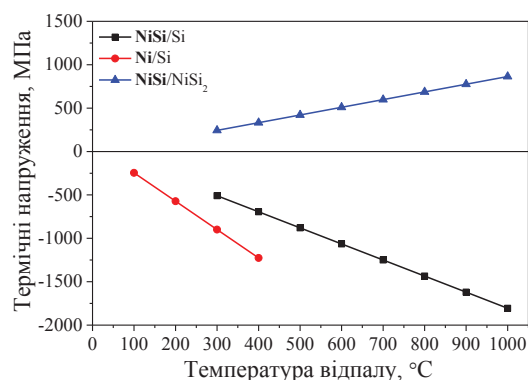


Рис. 4. Зміна термічних напружень у плівках Ni та NiSi на межі з підкладкою та NiSi₂ з температурою відпалу

Підвищення температури відпалу до 1000 °С супроводжується збільшенням рівня термічних напружень стиску у шарі NiSi на межі з підкладкою. Розрахунок термічних напружень показує, що формування NiSi на межі поділу з Ni₂Si та NiSi₂ змінює знак напружень на напруження розтягу, унаслідок унаслідок того, що коефіцієнти термічного розширення цих силіцидів більші, ніж моносиліциду нікелю. Додавання легувального елемента також може змінити величину і знак цих напружень, що буде впливати на температуру початку утворення силіцидів (рис. 4).

Фазові перетворення у плівці [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм]/Si(001)

На рис. 5 показано рентгенограми плівок (Ni + 8 ат. % Pt) з більшим вмістом легувального елемента. Після осадження ідентифіковано наявність твердого розчину Ni(Pt).

На рис. 2, з–е подано пошаровий хімічний аналіз розподілу елементів за товщиною у плівці (Ni + 8 ат. % Pt). Між плівкою сплаву і кремнієм підкладки наявна чітка межа поділу, тобто взаємної дифузії між ними не спостерігається. Pt рівномірно розподілена по товщині плівки (рис. 2, з). На рентгенограмі після відпалу за температури 400 °С з'являються рефлекси силіциду Ni₂Si (рис. 5). Це вказує на початок взаємної дифузії між Ni та Si.

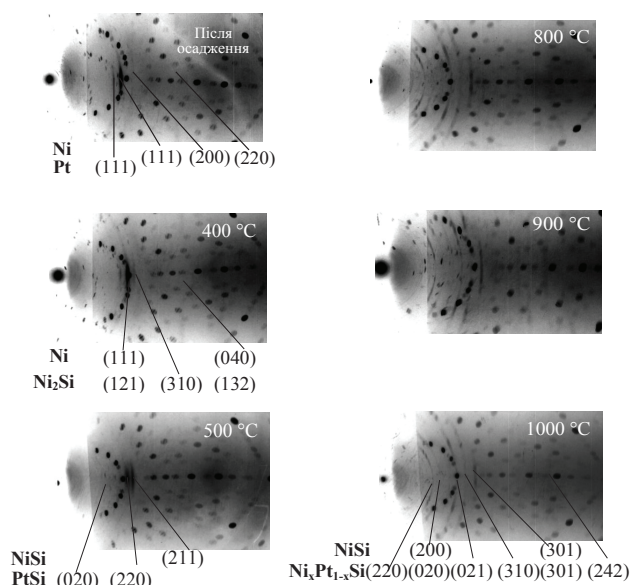


Рис. 5. Рентгенограми від плівок [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм]/Si(001) після осадження та відпалу у вакуумі за температур 400 °C – 1000 °C

У плівці з більшим вмістом платини під час відпалу за 450 °C частина нікелю прореагувала з кремнієм підкладки, але першим почав формуватись моносиліцид нікелю NiSi. Товщина нікелю, що не прореагувала з кремнієм, становить ~20 нм. Pt нерівномірно розподілена за товщиною моносиліциду нікелю (рис. 2, д).

Під час подальшого відпалу за температур 600 °C – 800 °C у плівці утворюється потрібний силіцид $Ni_xPt_{1-x}Si$. У табл. 2 наведено зміну фазового складу з температурою відпалу у плівці (Ni + 8 ат. % Pt).

Таблиця 2. Зміна фазового складу плівки у плівці (Ni + 8 ат. % Pt) з температурою відпалу

Температура відпалу, °C	Фазовий склад
Після осадження	Ni, Pt
400	Ni, Ni ₂ Si
450	Ni, NiSi
500	NiSi, PtSi
600	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
700	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
800	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
900	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si
1000	NiSi, Ni _x Pt _{1-x} Si

Дані пошарового хімічного аналізу показують, що твердотільні реакції відбулись по всій товщині плівки (рис. 2, е). NiSi та потрібний силіцид $Ni_xPt_{1-x}Si$ залишаються термічно стабільними до температури відпалу 1000 °C (рис. 5).

У табл. 3 наведено результати розрахунку зміни об'єму під час утворення силіцидів нікелю. Оскільки змінення об'єму під час утворення силіциду має позитивне значення, то у плівці під час утворення силіцидів нікелю наявні напруження стиску різної величини.

Таблиця 3. Зміна об'єму під час утворення силіцидів нікелю

Тип реакції	Зміна об'єму ΔV , %	Тип напружень
$2Ni + Si = NiSi$	47	Стиску
$Ni_2Si + Si = 2NiSi$	33,7	Стиску
$Ni + Si = NiSi$	52,6	Стиску
$Si + NiSi = NiSi_2$	34,2	Стиску

Під час нагрівання тонкоплівкові силіциди перехідних металів мають напруження стиску, оскільки у них температурний коефіцієнт лінійного розширення більший, ніж у кремнію.

Результати розрахунку структурних напружень у плівках (Ni + 1 ат. % Pt) та (Ni + 8 ат. % Pt) показано на рис. 6. Зі збільшенням температури відпалу внаслідок утворення фази NiSi у плівках відбувається релаксація напружень.

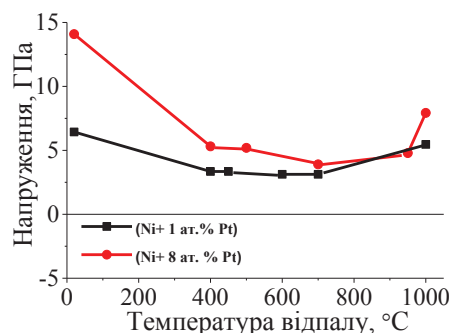


Рис. 6. Зміна структурних напружень у плівках (Ni + 1 ат. % Pt) та (Ni + 8 ат. % Pt) з температурою відпалу

Утворення NiSi в обох плівках також супроводжується різким зменшенням електроопору, який має більше значення, ніж у плівці Ni (30 нм) (див. рис. 3). Збільшення концентрації платини до 8 ат. % супроводжується майже однаковою послідовністю розвитку твердофазних реакцій силіцидоутворення, як у плівці з 1 % Pt, але зміщує їх початок у бік більш високих температур відпалу порівняно з плівкою нікелю без легувального елемента. Відмінність спостерігається тільки за температури відпалу 450 °C, де у плівці з меншим вмістом Pt формується збагачений на Ni силіцид Ni₂Si, а у плівці з більшим вмістом Pt – моносиліцид NiSi.

За результатами досліджень очевидним є те, що у плівках Ni, легованих Pt, розширюється інтервал існування фази NiSi до 1000 °C.

Таким чином, додавання Pt стабілізує потрібну силіцидним технологіям фазу NiSi та розширює інтервал її існування за рахунок утворення твердого розчину NiSi-PtSi. Це пов'язано зі значним зменшенням рушійної сили фазового переходу NiSi в NiSi₂. Твердий розчин Ni_xPt_{1-x}Si має меншу вільну енергію, що обумовлено позитивним внеском $T \cdot \Delta S$, де T і ΔS – температура термообробки і зміна ентропії змішування відповідно. При цьому підвищується енергетичний бар'єр для формування зародків дисиліциду NiSi₂.

Висновки

Встановлено, що формування силіцидних фаз у плівках [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм] та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм] на монокристалічних підкладках Si(001) різняться від діаграм фазової

рівноваги для масивного стану і відбувається в інших температурних інтервалах.

Встановлено, що збільшення рівня механічних напружень розтягу у плівці з більшим вмістом Pt (8 ат. %) підвищує температуру формування моносиліциду нікелю порівняно з плівкою Ni (30 нм). Моносиліцид нікелю NiSi починає формуватись у плівках [(Ni + 1 ат. % Pt) 30 нм]/Si(001) та [(Ni + 8 ат. % Pt) 30 нм]/Si(001) після відпаду за температури 500 °C та 450 °C відповідно.

Визначено, що додавання легувального елемента Pt у плівку Ni збільшує термічну стабільність моносиліциду нікелю і розширює інтервал його існування до 1000 °C за рахунок формування твердого розчину Ni_xPt_{1-x}Si. Це пов'язано зі значним зменшенням рушійної сили фазового переходу NiSi у NiSi₂ за рахунок меншої вільної енергії твердого розчину, що обумовлено позитивним внеском $T \cdot \Delta S$.

У подальшому передбачається дослідити вплив середовища відпаду на формування моносиліциду нікелю та його термічну стабільність.

References

- [1] J.-G. Min *et al.*, “Implementation of ambipolar polysilicon thin-film transistors with nickel silicide Schottky junctions by low-thermal-budget microwave annealing”, *Nanomaterials*, 2022, vol. 12, no. 4, 628 p. DOI: 10.3390/nano12040628
- [2] P.C. Yeh *et al.*, “A Novel three-axial magnetic-piezoelectric mems ac magnetic field sensor”, *Micromachines*, Basel, 2019, vol. 10, no. 10, 710 p. DOI: 10.3390/mi10100710
- [3] R. Artal *et al.*, “Electrodeposition of mesoporous Ni-Rich Ni-Pt films for highly efficient methanol oxidation”, *Nanomaterials*, 2020, vol. 10, no. 8, 1435 p. <http://dx.doi.org/10.3390/nano10081435>
- [4] Sudiyarmanto and Eiichi Kondoh, “Synthesis and Characterization of Ni-Pt Alloy Thin Films Prepared by Supercritical Fluid Chemical Deposition Technique”, *Nanomaterials*, Basel, 2021, vol. 11, no. 1, 151 p. <http://dx.doi.org/10.3390/nano11010151>
- [5] R. Kumar *et al.*, “Phase selective synthesis of nickel silicide nanocrystals in molten salts for electrocatalysis of the oxygen evolution reaction”, *Nanoscale*, 2020, vol. 12, no. 28, pp. 15209–15213. <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-02923099v1>
- [6] Wu Chi-Ting *et al.*, “In-situ Rs and improvement in thermal stability of nickel silicides using different interlayer films”, *Journal of Materials Science and Engineering A*, 2015, vol. 5, no. 3–4, pp. 159–165. <http://dx.doi.org/10.17265/2161-6213/2015.3-4.008>
- [7] S.-L. Zhang, “Self-aligned silicides for ohmic contacts in complementary metal-oxide semiconductor technology: TiSi₂, CoSi₂, and NiSi”, *J. Vac. Sci. Technol. A*, 2004, vol. 22, no. 4, pp. 1361–1370. <http://dx.doi.org/10.1116/1.1688364>
- [8] S. Ramamurthy, “Low temperature spike anneal for NiSi”, *Solid State Technology*, 2004, vol. 10, pp. 37–39. <https://doi.org/10.1016/j.mee.2004.07.048>
- [9] Zhihui Liu *et al.*, “The preliminary exploration on change mechanism of Seebeck coefficient for NiCr/NiSi thin film thermocouple with different thickness”, *Journal of Alloys and Compounds*, 2023, vol. 931, 167573 p., – ISSN 0925-8388. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2022.167573>
- [10] Sunil Babu Eadi *et al.*, “NiSiTb alloy interlayer properties at NiSi/Si junctions for improving thermal stability and contact resistance”, *Microelectronic Engineering*, 2021, vol. 236, 111482 p., ISSN 0167-9317. DOI: 10.1016/j.mee.2020.111482
- [11] Munir H. Nayfeh and Ammar Nayfeh, “Chapter 6 – Nanoparticle-assisted growth of nanowires”, Editor(s): In *Micro and Nano Technologies, Integrated Silicon-Metal Systems At the Nanoscale*, Elsevier, 2023, pp. 129–151, ISBN 9780443186738. DOI: 10.1016/B978-0-443-18673-8.00007-7
- [12] Ratnesh K. Pandey *et al.*, “New insights on Ni-Si system for microelectronics applications”, *Microelectronic Engineering*, 2022, vol. 264, 111871 p., ISSN 0167-9317. DOI: 10.1016/j.mee.2022.111871
- [13] Mike El Kousseifi *et al.*, “Nucleation and lateral growth kinetics of the NiSi phase at the epitaxial θ-Ni₂Si/Si interface”, *Acta Materialia*, 2020, vol. 198, pp. 100–110, ISSN 1359-6454. DOI: 10.1016/j.actamat.2020.07.062
- [14] Jun & Qiu Luo *et al.*, “Interaction of NiSi with dopants for metallic source/drain applications”, *Journal of vacuum science & technology B*, 28, C111–C1111, 2010. DOI: 10.1116/1.3248267

- [15] Jianbao Gao *et al.*, “Dewetting of Ni silicide thin film on Si substrate: In-situ experimental study and phase-field modeling”, *Acta Materialia*, 2022, vol. 223, 117491 p., ISSN 1359-6454. DOI: 10.1016/j.actamat.2021.117491
- [16] W. Huang *et al.*, “Effect of a thin W, Pt, Mo and Zr interlayer on the thermal stability and electrical characteristics of NiSi”, *Microelectronic Engineering*, 2007, vol. 84, pp. 678–683. DOI: 10.1016/j.mee.2006.11.006
- [17] W. Huang *et al.*, “The improvements of thermal stability of nickel silicide by adding the Zr interlayer”, *Microelectronic Engineering*, 2006, vol. 83, pp. 345–350.
- [18] J.F. Liu *et al.*, “Improvement of the thermal stability of NiSi films by using a thin Pt interlayer”, *Appl. Phys., Lett.* 2, October 2000, vol. 77, no. 14, pp. 2177–2179. DOI: 10.1063/1.1313815
- [19] M. Lemang *et al.*, “Redistribution of phosphorus during NiPtSi formation on in-situ doped Si”, *Microelectronic Engineering*, 2018, vol. 202, pp. 25–30, ISSN 0167-9317. DOI: 10.1016/j.mee.2018.10.005
- [20] K. Hoummada *et al.*, “Effect of Pt addition on Ni silicide formation at low temperature: Growth, redistribution, and solubility”, *Journal of Applied Physics*, 15 September 2009, vol. 106, no. 6, 063511 p. DOI: 10.1063/1.3204948
- [21] R. Mezouar *et al.*, “Effect of Vacuum Annealing Temperature on the Binary System Ni/Si(100)”, *Journal of nano- and electronic*, 2020, vol. 12, no 6, pp. 06005-106005-5. [http://dx.doi.org/10.21272/jnep.12\(6\).06005](http://dx.doi.org/10.21272/jnep.12(6).06005)
- [22] O. Cojocaru-Mirădin *et al.*, “Snowplow effect and reactive diffusion in the Pt doped Ni–Si system”, *Scripta Materialia*, 2007, vol. 57, is. 5, pp. 373–376, ISSN 1359-6462. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2007.05.007

L.S. Levchuk, R.A. Shkarban, T.I. Verbitska, Yu.M. Makogon

FEATURES OF THE INFLUENCE OF THE STRESS STATE ON THE THERMAL STABILITY OF THE NISI PHASE IN NI(Pt)/SI FILM

Background. It is possible to increase the speed the degree of integration of microcircuits and their reliable operation due to the use of thermostable nanoscale films of transition metal silicides as functional elements. Stress in nanostructures is a general problem of microelectronics, which must be taken into account at all stages of production, storage and operation of both discrete devices and integrated circuits.

Objective. The purpose of the paper is to study of the effect of stress state and Pt alloying element on the phase composition and thermal stability of NiSi nickel monosilicide in nanoscale [(Ni + 1 at. % Pt) 30 nm] and [(Ni + 8 at. % Pt) 30 nm] films on single crystalline Si(001) substrates during vacuum annealing in the temperature range of 400 °C – 1000 °C.

Methods. Nanoscale films were deposited by magnetron sputtering on Si(001) substrates at room temperature. The samples were annealed in a vacuum of $\sim 1.3 \cdot 10^{-3}$ Pa in the temperature range of 400 °C – 1000 °C. The influence of Pt on the change in stress state and the thermal stability of the NiSi phase in Ni(Pt) films on a single crystalline Si(001) substrate was investigated using the methods of X-ray structural phase analysis, mass spectrometry of secondary neutrals, and resistometry (four-probe method).

Results. The influence of internal mechanical stresses and the content of the Pt alloying element in the film on the sequence, temperature of silicide phases formation, and thermal stability of NiSi nickel monosilicide during vacuum annealing was determined.

Conclusions. It was established that adding Pt to the Ni film leads to an increase in the nickel monosilicide formation temperature compared to the Ni (30 nm) film.

Nickel monosilicide NiSi begins to form in films with 1 at. % Pt and 8 at. % Pt during annealing at temperatures of 500 °C and 450 °C, respectively. An increase in the thermal stability of NiSi is associated with a significant decrease in the driving force of the NiSi into NiSi₂ phase transition due to the formation of a Ni_xPt_{1-x}Si solid solution, which has a lower free energy, due to the positive contribution of the $T \cdot \Delta S$.

Keywords: stressed state; NiSi; phase composition; nanoscale films; annealing; vacuum.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового інституту матеріалознавства
та зварювання ім. Є.О. Патона
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
13 лютого 2024 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.313011

UDC 004.021:519.876.5

Andriy Romanov*

Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine*

corresponding author: andreygorogogo@gmail.com

FLEET MANAGEMENT ALGORITHM FOR ENHANCING ENVIRONMENTAL FRIENDLINESS OF MARITIME DELIVERY

Background. Maritime cargo delivery accumulates over 80 % of international transport operations, providing a cost-effective method for global trade, particularly vital for developing countries. However, maritime transportation is heavily dependent on fossil fuels, which results in significant emissions of carbon dioxide CO₂ and creates environmental problems for water resources. To address these issues, this study proposes a solution to optimize maritime delivery route planning projects, and reduce fuel consumption and CO₂ emissions.

Objective. The objective is to develop an algorithm for planning delivery routes at optimal vessel speed, consisting of a genetic algorithm and a speed optimization step, to reduce fuel consumption and CO₂ emissions during maritime transportation. In addition, the results will be validated and the efficiency of the developed algorithm will be compared with a standard genetic algorithm without a speed optimization step.

Methods. This article proposes an implementation of an additional step of vessel speed optimization into the algorithm for calculating delivery routes, which can significantly reduce fuel consumption and CO₂ emissions without increasing the complexity of the algorithm itself. The route is computed by solving the vehicle routing problem.

Results. The study demonstrates that the application of the speed optimization step in the algorithm for planning delivery routes significantly reduces the volumes of fuel consumption and CO₂ emissions. Comparison of the experimental results showed that the genetic algorithm with a speed optimization step outperforms the standard genetic algorithm in terms of the volumes of fuel used and CO₂ emissions. Detailed analysis of various combinations of fleet composition emphasizes the need to balance the capacity of vessels to achieve maximum efficiency of cargo delivery. While adding more feeders initially reduces overall fuel consumption, overloading the fleet with underutilized vessels can lead to inefficiencies and increased operational costs. The study also considers alternative approaches such as increasing capacity and reallocating vessels among routes, highlighting their impact on fuel consumption and CO₂ emissions.

Conclusions. The study proposes an improved algorithm for constructing maritime cargo delivery routes using a genetic algorithm with a speed optimization step. Such an algorithm ensures effective management of maritime delivery route planning projects, while significantly reducing fuel consumption and CO₂ emissions into the environment. Also, optimal control of the fleet composition ensures the reduction of CO₂ emissions due to the efficient use of each vessel.

Keywords: water transport; fleet management; optimal control; route planning; route optimization; project management; fuel consumption; CO₂ emissions; vessel speed optimization; genetic algorithm.

Introduction

Maritime cargo delivery accounts for the largest share of global goods transportation, making up more than 80 % of international transport. This percentage is even higher in most developing countries [1]. One of the key advantages of maritime cargo transportation is its low delivery cost [2]. However, this mode of transportation consumes a vast amount of fuel, leading to significant carbon dioxide CO₂ emissions, which have a detrimental impact on the environment [3]. Many carrier companies op-

erate ageing fleets that rely almost exclusively on fossil fuels, having resulted in a 20% increase in greenhouse gas emissions over the last decade [4]. Efficient ways to reduce CO₂ emissions include using modern fuels and deploying modern ships that are less harmful to the environment. These options are interconnected, as it is not feasible to easily switch to modern fuel on older ships and vice versa. Therefore, implementing these emission reduction strategies will require significant investment – first to renew the fleet of ships and then to transition to less harmful fuels. Consequently, the cost of delivery is

Пропозиція для цитування цієї статті: А. Ю. Романов, “Алгоритм управління флотом для покращення екологічності морських перевезень”, *Наукові вісті КПП*, № 1, с. 44–55, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.313011

Offer a citation for this article: Andriy Romanov, “Fleet management algorithm for enhancing environmental friendliness of maritime delivery”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 44–55, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.313011

likely to increase substantially, potentially decreasing the share of maritime delivery in the global market. It is important to note that fleet modernization can only be implemented in the long term, allowing for a gradual phase-out of outdated ships and fuels.

An alternative way to reduce CO₂ emissions is to plan the shortest delivery routes for cargo. It may seem intuitive that shorter routes use less fuel, leading to lower CO₂ emissions. However, a crucial factor influencing CO₂ emissions is the speed of the ship. Fuel consumption has a non-linear relationship with vessel speed — as speed increases, fuel usage increases significantly. Consequently, CO₂ emissions into the atmosphere also rise with increased speed.

High delivery speeds are justified by the fact that container shipping companies aim to deliver goods as quickly and reliably as possible. As fuel consumption increases, so does the delivery cost. Carrier companies commit to delivering goods within specified time frames and failing to meet these deadlines results in penalties and reputational damage. Therefore, it is crucial to plan delivery routes that allow cargo to be delivered on time while enabling ships to travel at the minimum acceptable speed to fulfil contractual agreements. Additionally, the lower speeds can lead to a reevaluation or reduction in delivery costs [5].

Article [6] considers the multiple travelling salesmen problem (mTSP) for constructing optimal routes, incorporating additional constraints such as feeder capacity, cargo accumulation intensity at the port, and maximum route duration or time windows. These constraints effectively expand the mTSP into the vehicle routing problem (VRP). The classic VRP extends the mTSP by including different service requirements at each node and varying capacities for vessels in the fleet management. The objective of these problems is to minimize the total cost or distance across all routes [7].

This article proposes an additional route optimization step that can significantly reduce costs and emissions without increasing the complexity of the route calculation algorithm. The route is computed using a genetic algorithm, which belongs to heuristic algorithms, providing approximate solutions that save computational resources — equivalent to time and budget [8, 9]. The genetic algorithm stands out as one of the best heuristics for finding delivery routes with lengths practically approaching the possible minimum [10, 11]. In some cases, the heuristic solution matches the exact solution's route length.

Various methods exist to enhance the performance of a genetic algorithm. A study on the selection mechanism and the elimination of invalid

routes is discussed in [12]. The impact of a random number generator on population creation and mutation processes is explored in [13]. The fundamental mutation operation in genetic algorithms is the crossover operation, commonly known as two-point crossover. An alternative version of the algorithm featuring a modified three-point crossover is detailed in [14].

This paper proposes a solution that calculates the optimal speed of vessels along routes, identified using a genetic algorithm with enhanced constraints [6]. In maritime cargo delivery, the vehicle routing problem addresses the routing of optimal feeder tours. The determination of speed follows the identification of the optimal feeder route for cargo delivery. Opting for reduced-speed delivery routes allows ships to travel slowly enough to ensure timely cargo delivery while minimizing fuel consumption and thereby reducing CO₂ emissions.

Problem statement

The goal is to describe, implement, and justify the importance of using an algorithm, consisting of a genetic algorithm and a speed optimization step, to achieve reductions in fuel consumption and CO₂ emissions in maritime shipping. Moreover, comparisons with the algorithm without an additional optimization step will be demonstrated. To achieve the goal, the following four tasks are to be fulfilled:

1. To substantiate the inclusion of the speed optimization step after an initial route is produced by the genetic algorithm.
2. To show the advantage of the algorithm using the speed optimization step compared to the algorithm, which does not consider the speed of feeders.
3. To discuss the significance and practical applicability of the suggested improvements in the algorithm of maritime delivery route planning and project management.
4. To make an unbiased conclusion on the contribution to the field of algorithms used, in particular, to optimize maritime cargo delivery planning. An outlook of how the research should be extended and advanced is to be made as well.

GA with speed optimization

Route planning is a crucial aspect of maritime cargo delivery and project management, aimed at solving the traveling salesman problem. This classic problem involves constructing the shortest route that visits all points on a map exactly once before returning to the starting point. However, in practical

maritime operations, companies manage large fleets of ships, and merely solving the classic travelling salesman problem is not sufficient to ensure optimal and profitable delivery of goods. As a result, the mTSP has emerged, focusing on finding the shortest routes for several salesmen simultaneously. Solving the mTSP requires an enhanced algorithm based on the classic TSP framework. Despite the complexity introduced by multiple salesmen, the ultimate goal remains the same: to identify the shortest possible routes, which are deemed optimal for efficient cargo delivery.

Constructing a route solely based on minimum length may not suffice for efficient maritime cargo delivery. Carrier companies must navigate numerous additional constraints crucial to planning delivery routes effectively. Key among these are feeder capacity, cargo accumulation intensity at ports, and maximum route duration, reflecting real-world processes in maritime cargo operations. Integrating these factors into algorithms enables the development of delivery routes that accommodate the complexities and specificities of maritime logistics [6]. Incorporating these constraints expands the mTSP into the VRP. The primary goal of these problems is to minimize the total cost or distance covered across all feeder tours.

Expanding the problem to include the VRP complicates the algorithmic logic required to find optimal routes, necessitating consideration of implemented restrictions. This challenge can be formulated as a mathematical optimization problem and solved using various algorithms, including meta-heuristics or exact methods [15]. As previously mentioned, a proposed solution to address this transportation challenge involves the utilization of a genetic algorithm. Genetic algorithms leverage principles of natural selection to solve optimization problems efficiently [10].

The genetic algorithm iteratively modifies a population of individual solutions. In each iteration, the algorithm selects individuals from the current population to act as parents, generating offspring for the next generation. Through successive generations, the population evolves towards an optimal solution. During the generation of a new population, mutations occur. The algorithm used in this study incorporates mutations such as flip, swap, slide, and crossover. These mutations can also be combined, enabling the creation of complex mutations. Each of these operations modifies the individual in unique ways, contributing to a near-optimal solution.

Following the completion of all mutations across the population, the genetic algorithm proceeds with

evaluation and selection steps. Each generated solution undergoes evaluation using a fitness function, which assesses its proximity to the optimal solution of the problem and verifies compliance with specified constraints. Solutions that violate any defined constraints are penalized and rendered infeasible, thereby excluding them from further mutations. Conversely, solutions that incur fewer penalties or remain penalty-free are deemed feasible and retained for subsequent mutation processes.

In our previous studies [6, 12, 13, 14], a genetic algorithm is utilized to find the shortest delivery routes while imposing a maximum route length constraint. The fitness function evaluated each feeder route's length, imposing penalties if it exceeded the defined constraint. This constraint aimed to enable uninterrupted cargo delivery routes without the need for refuelling, thereby reducing fuel costs and avoiding additional refuelling time. In this article, a new set of constraints is introduced and the algorithm's input data is expanded. Notably, the maximum route length restriction is omitted, as refuelling costs are now considered permissible during the cargo delivery process.

Expanding the problem to solve the VRP complicates the search for the optimal route. For instance, in the case of using a genetic algorithm, the population size must be sufficiently large to accommodate all constraints, such as capacity and speed of movement. If speed variations are not initially considered in the algorithm for solving mTSP, addressing the VRP requires multiplying the population size by the range of permissible vessel speeds. Consequently, this increases the time required to compute the optimal route.

This research proposes a solution to the cargo delivery problem using a genetic algorithm that considers route length, feeder capacity, and cargo accumulation at ports to compute the minimum route satisfying these conditions. Following the calculation of the feeder route, a speed optimization step is proposed to gradually reduce the speed of each feeder along the route. This speed reduction significantly decreases fuel consumption and CO₂ emissions. Integrating this speed optimization step leverages the existing genetic algorithm to find the optimal route without initially factoring in feeder speeds, thereby avoiding an increase in computation time. The speed reduction step requires minimal additional calculation time compared to the main route calculation. Thus, a hybrid approach is suggested for planning sea routes for cargo delivery, combining a genetic algorithm with an additional speed optimization step.

Maritime cargo delivery model

In this section, the mathematical model underlying the genetic algorithm for maritime route planning is presented. The model aims to optimize cargo delivery routes while considering various constraints, such as feeder capacity, port cargo accumulation, and route duration. By formulating this problem as a variant of the mTSP in order to achieve efficient and sustainable maritime logistics advanced optimization techniques can be leveraged. The primary objective of the model is to minimize the total cost, which includes fuel consumption and CO₂ emissions while ensuring that all delivery constraints are met. This involves not only finding the shortest possible routes but also optimizing feeder speeds and capacities. The genetic algorithm incorporates various mutations and crossover operations to explore a wide range of potential solutions, ultimately converging on an optimal or near-optimal route configuration.

The following variables are used in a simplified maritime cargo delivery model [6]: N the number of ports, p_{k1} and p_{k2} are the horizontal and vertical components of the position of the port k , and $M_{\max}$ the number of feeders available to accomplish the delivery. Every feeder m starts its tour off port 1 and ends up returning to that port. We denote the current number of feeders by M .

In our previous work, we considered a model in which the feeder had a limitation feeder m capacity C_m , accumulation intensity A_{nm} of cargo at port n visited by the feeder m , and maximum route duration $D_{\max}$. The minimization goal is to find such a set of flags X^* , at which

$$d_{\Sigma}(N, M, X^*) = \min_X d_{\Sigma}(N, M, X) \quad (1)$$

under feeder capacity and cargo accumulation constraints.

This article discusses an approach to reducing fuel consumption during maritime delivery. Fuel consumption for a feeder vessel is primarily dependent on the vessel's speed and can be expressed as a cubic relationship. This means that fuel consumption increases exponentially with speed. At the same time, it depends on the specific characteristics of the vessel, including its engine efficiency and hull resistance.

To accurately calculate fuel consumption, it is essential to refer to the fuel consumption va-

lues at the vessel's maximum speed as specified in the technical documentation. Using this data, fuel consumption at lower speeds can be approximately estimated. Also, it can be adjusted with additional empirical data or specific operational considerations for the vessel.

In this work, the objective function is to minimize fuel consumption when delivering cargo by sea. So, the task is to find X^* , at which

$$d_{\Sigma}(R_m, v_m, X^*) = \min_X \sum_{m=1}^N F(R_m, v_m, X) \quad (2)$$

where N is the number of routes, R_m is the route of the m feeder, and v is the speed of the m feeder. The restrictions from [6] must also be taken into account when searching for optimal routes and speeds.

Maritime shipping is a significant contributor to global CO₂ emissions, which play a major role in climate change and ocean acidification. By minimizing these emissions, we can help protect marine ecosystems and the environment. Additionally, compliance with increasingly stringent international regulations, such as those set by the International Maritime Organization (IMO), is essential to avoid penalties and ensure the sustainability of maritime operations. Lowering CO₂ emissions also has public health benefits, as it reduces the release of harmful pollutants, thereby improving air quality and reducing health risks for communities near ports and along shipping routes. Air pollutants from the ship operations using heavy fuel oil are shown in Table 1 [16]. The table displays the amount of pollution in grams produced per gram of fuel burned.

Testing

In the testing section, the algorithm's operation for constructing maritime cargo delivery routes with a speed optimization step is analysed. A comparison with the algorithm without this additional optimization step is conducted. Experiments are performed to evaluate the impact of the speed optimization step on algorithm performance. Henceforth in this article, the algorithm with the optimization step will be denoted as GA_S , while the algorithm without it will be referred to as GA . Each experiment is conducted under identical conditions, using the same port map and a predetermined number of feeders.

Table 1. Emissions produced by heavy fuel oil

Pollutant	CO ₂	CH ₄	N ₂ O	NO _x	NMVOC	CO	PM ₁₀	SO ₂
EF HFO	3,114	0,000 06	0,000 15	0,0903	0,003 08	0,002 77	0,002 78	0,025

Table 2 presents the results of experiments comparing fuel consumption and carbon dioxide emissions between *GA* and *GA_S*. These experiments are conducted across varying numbers of ports, reflecting the need to establish sea delivery routes for both small-scale scenarios (e.g., the Sea of Azov or the Marmara Sea) and larger-scale scenarios encompassing several dozen ports (e.g., the Black Sea or the Mediterranean Sea) [17].

Table 2 demonstrates that the algorithm with an additional optimization step yields promising results in reducing fuel consumption and CO₂ emissions. This suggests that the speed reduction step can effectively contribute to planning optimal maritime delivery routes. Importantly, this approach allows for calculating the minimum permissible speed without introducing complexity to the existing algorithm. The additional step gradually reduces the speed of each feeder until it conforms to all specified delivery constraints, including the total fleet capacity necessary to manage accumulated cargo at ports within specified timeframes.

Considering an alternative approach to solving the VRP using a genetic algorithm without an additional optimization step, it becomes evident that incorporating speed selection into population generation and selection processes is crucial. Introducing a population with varied speeds inevitably increases its size compared to one without speed considerations. The larger population size in a genetic algorithm impacts the time required to reach an optimal solution. To compare the performance of algorithms with an additional speed optimization step and an algorithm featuring an expanded population, tests are conducted, and the results are presented in Table 3.

As shown in Table 3, the basic genetic algorithm (*GA*) finds a route faster than other algorithms. The genetic algorithm with a speed optimization step (*GA_S*) slightly increases the time required to obtain a route but has the advantage of reducing fuel con-

sumption. This increase in time can be considered quite acceptable. A basic genetic algorithm (*GA*) is also run with an increased population (from 24 to 32 individuals) to simulate the operation of an algorithm that would evaluate all possible speeds. The time to find the optimal route using an algorithm with an increased population (*GA_IP*) is significantly longer than that of an algorithm with a speed optimization step. Thus, it follows that *GA_S* is more preferable for obtaining a route with the minimum permissible speeds if considering the speed of obtaining the result. On the other hand, *GA_IP* searches for solutions among a larger number of initial routes, which can help obtain a more preferable route, which requires more computational time.

Next, specific examples of constructing maritime delivery routes for the same set of ports are examined. Both algorithms – those with and without an additional speed optimization step – are tested. These experiments utilized the same port map to ensure objective evaluation of algorithm performance. Each test resulted in a map displaying constructed routes for every feeder involved in cargo delivery. Additionally, a table is constructed presenting key characteristics and properties of the calculated routes: feeder capacities, route lengths, tour durations, vessel speeds, cargo accumulation at ports, fuel consumption, and carbon dioxide emissions. Furthermore, tables presenting results from the algorithm with an additional speed optimization step illustrate differences in fuel consumption and CO₂ emissions.

In the initial test, the delivery routes for five feeders are computed using the algorithm without an additional optimization step. For the tests, the “Wes Janine” feeder vessel is chosen. It has a capacity of 1000 TEU, a top speed of 16 knots, and an approximate fuel consumption of 24 tons per day. The routes are illustrated in Fig. 1, while fuel consumption and CO₂ emissions are detailed in Table 4.

Table 2. Comparison of *GA_S* and *GA* on fuel consumption and CO₂ emissions

		<i>GA</i>		<i>GA_S</i>		<i>GA – GA_S</i>	
		fuel	CO ₂	fuel	CO ₂	fuel	CO ₂
<i>N</i>	10	356,23	1109,31	153,39	477,66	202,84	631,65
	15	536,47	1670,56	192,06	598,08	344,41	1072,48
	20	601,41	1872,79	222,99	694,41	378,42	1178,38
	25	803,76	2502,92	309,66	964,29	494,1	1538,63
	30	945,88	2945,47	318,97	993,29	626,91	1952,18
	35	1031,52	3212,18	373,99	1164,62	567,53	2047,56
	40	1230,11	3830,58	445,84	1388,35	784,27	2442,23
	45	1358,58	4230,64	466,16	1451,62	892,42	2779,02
	50	1473,41	4588,2	546,34	1701,31	927,07	2886,89

In the tables describing the characteristics of the tour, abbreviations are used: Acc – accumulation, Cons – consumption and d – difference.

Table 3. Comparison of *GA*, *GA_S* and *GA* with increased population (*GA_IP*) on performance.

		<i>GA</i>	<i>GA_S</i>	<i>GA_IP</i>
<i>N</i>	10	0,072 413 961	0,072 851 451	0,103 959 863
	15	0,518 522 275	0,518 782 627	1,585 358 039
	20	1,249 203 49	1,249 525 882	2,045 274 353
	25	1,907 294 725	1,907 693 686	3,174 980 137
	30	3,648 222 176	3,648 680 647	4,429 585 902
	35	4,730 179 745	4,730 695 49	6,475 466 02
	40	5,993 691 235	5,994 274 039	8,846 539 392
	45	7,198 098 902	7,198 742 863	9,660 162 451
	50	8,419 610 608	8,420 315 353	11,584 472 2

Fig. 1 displays highly optimal routes that facilitate the delivery of goods without breaching specified restrictions on feeder timing and capacity. It's important to note that the algorithm used to generate these routes does not account for feeder speed, thus all feeders default to a speed of 16 knots. This relatively high speed enables efficient port service along the routes. Upon analyzing the constructed route, it's evident that the feeders handle cargo delivery with a margin of safety, as indicated by accumulated cargo and tour durations. With a maximum route duration set at 10 days and the longest route lasting 6 days, it can be inferred that reducing speed would not violate these restrictions. Furthermore, reducing speed would also lead to decreased fuel consumption.

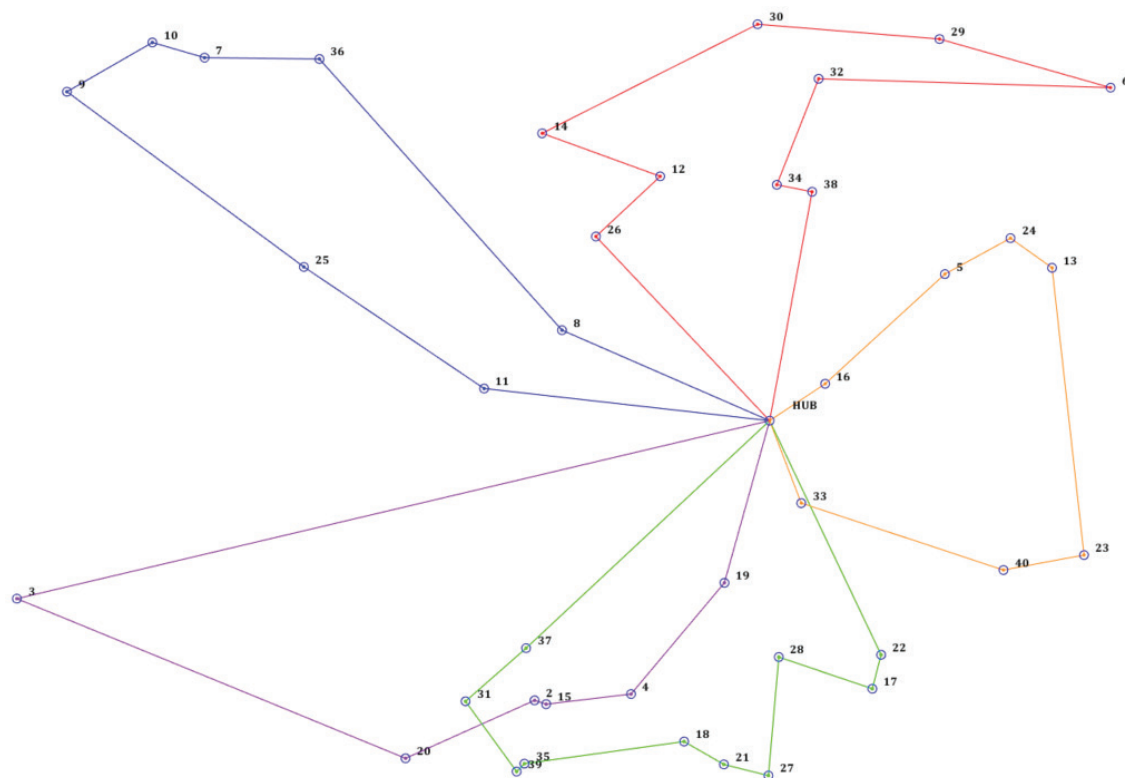


Fig. 1. Route of 5 feeders with a total consumption of 648 tons of fuel built by *GA*

Table 4. Route of 5 feeders built by *GA*

	Feeder 1	Feeder 2	Feeder 3	Feeder 4	Feeder 5
Capacity	1000	1000	1000	1000	1000
Distance	88,82	82,68	84,8	69,57	55,81
Days_ <i>GA</i>	6	6	6	5	4
Speed_ <i>GA</i>	16	16	16	16	16
Acc_ <i>GA</i>	990	600	720	800	380
Cons_ <i>GA</i>	144	144	144	120	96
CO ₂ _ <i>GA</i>	448,41	448,41	448,41	373,68	298,94

Fig. 2 depicts feeder routes similar to those in Fig. 1, but incorporating an additional optimization step. In this updated calculation considering optimal speeds, the trajectories of the routes have been adjusted. The width of each route line on the graph varies depending on the feeder speed – routes with higher feeder speeds are represented by wider lines.

By reducing feeder speeds, updates have been made to accumulation, duration, speed, fuel consumption, and CO₂ emissions. The algorithm's output data are presented in Table 5. The significant differences in fuel consumption and CO₂ emissions underscore the importance of employing the additional step to optimize feeder speeds.

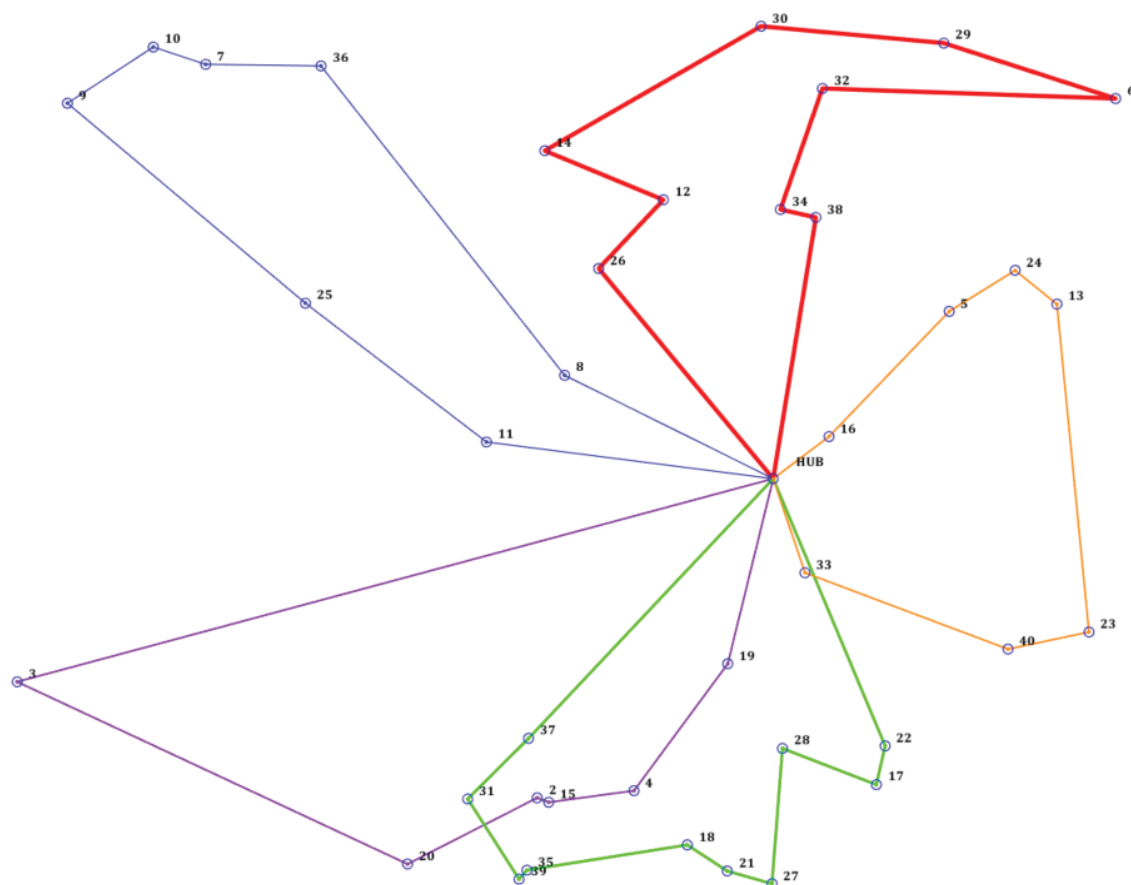


Fig. 2. Route of 5 feeders with a total consumption of 315,52 tons of fuel built by *GA_S*

Table 5. Route of 5 feeders built by *GA_S*

	Feeder 1	Feeder 2	Feeder 3	Feeder 4	Feeder 5
Capacity	1000	1000	1000	1000	1000
Distance	88,82	82,68	84,8	69,57	55,81
Days_ <i>GA</i>	6	6	6	5	4
Acc_ <i>GA</i>	990	600	720	800	380
Cons_ <i>GA</i>	144	144	144	120	96
Days_ <i>GA_S</i>	6	9	8	6	7
Speed_ <i>GA_S</i>	15	10	11	12	8
Acc_ <i>GA_S</i>	990	900	960	960	665
Cons_ <i>GA_S</i>	118,65	52,73	62,39	60,75	21
Cons_d	25,34	91,26	81,6	59,25	75
CO ₂ _d	78,93	284,2	254,13	184,5	233,55

Table 5 highlights that feeders 1 and 4 operate at speeds of 15 and 12 knots, respectively, indicating they are not operating at the lowest possible speed and thus consume more fuel. One approach to further reduce overall feeder speed and fuel consumption is to augment the fleet with additional feeders to distribute the workload. To explore this, an algorithm is deployed to construct delivery routes involving two additional feeders. The delivery trajectories are displayed in Fig. 3.

The addition of extra feeders to the fleet resulted in a reduction of both the overall average feeder speed and fuel consumption (Table 6). This reduction is attributed to the cubic relationship between fuel consumption and speed. Despite the inclusion of additional feeders, overall fuel consumption and CO₂ emissions are effectively lowered.

The involvement of additional feeders (Fig. 4) does not consistently result in reduced fuel con-

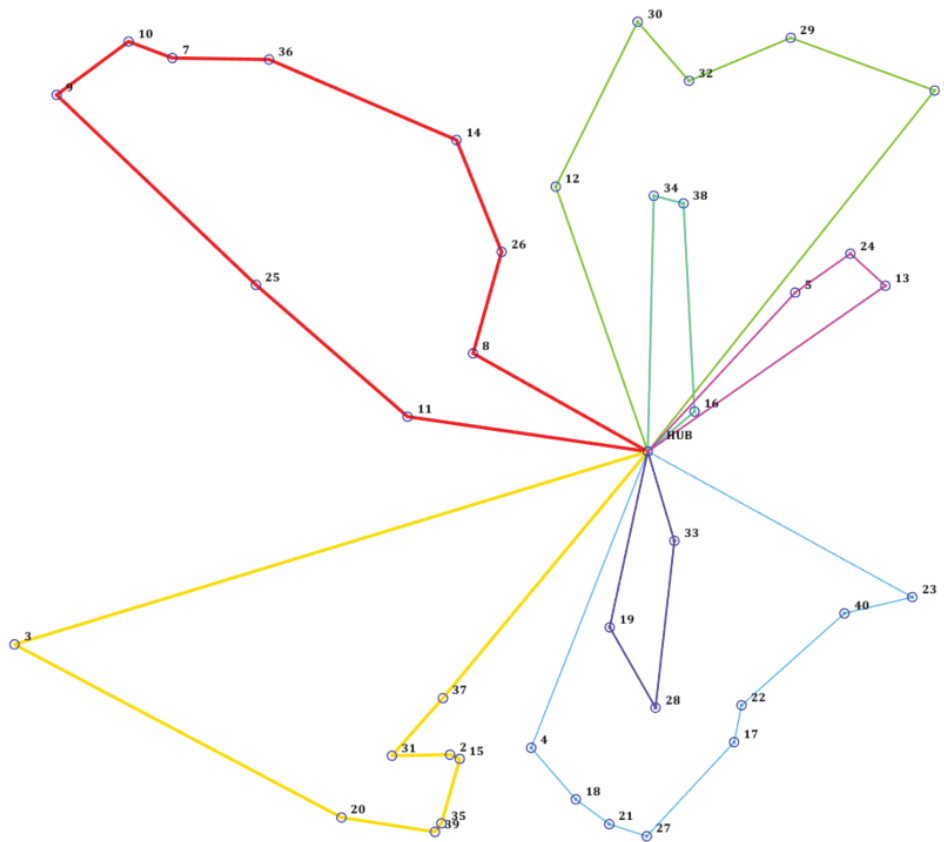


Fig. 3. Route of 7 feeders with a total consumption of 290,23 tons of fuel built by *GA_S*

Table 6. Route of 7 feeders built by *GA_S*

	Feeder 1	Feeder 2	Feeder 3	Feeder 4	Feeder 5	Feeder 6	Feeder 7
Capacity	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Distance	86,4	90,38	71,33	32,3	63,61	31,12	34,23
Days_ <i>GA</i>	6	6	5	3	4	2	3
Acc_ <i>GA</i>	750	810	500	180	540	100	105
Cons_ <i>GA</i>	144	144	120	72	96	48	72
Speed_ <i>GA_S</i>	13	13	8	8	10	8	8
Days_ <i>GA_S</i>	7	7	9	5	7	4	5
Acc_ <i>GA_S</i>	875	945	900	300	945	200	175
Cons_ <i>GA_S</i>	90,11	90,11	27	15	41,01	12	15
Cons_d	53,88	53,88	93	57	54,98	36	57
CO ₂ _d	167,8	167,8	289,6	177,49	171,22	112,1	177,49

sumption or its optimal control. Firstly, maintaining a larger fleet necessitates ongoing maintenance and the employment of crew members for each feeder. Secondly, despite the reduction in overall average feeder speed, Table 7 indicates that 4 out of the 8 feeders are loaded at only 12 %. This inefficient use of the fleet incurs high costs, both in terms of fuel consumption and feeder maintenance.

Another alternative option considered for constructing optimal delivery routes involves increasing

the capacity of vessels. In the following experiment, 4 feeders are used, each with a larger capacity than those in previous experiments (Fig. 5). If a carrier company possesses a sufficiently diverse fleet of feeders, redistributing them between routes becomes more feasible. Larger feeders facilitate transporting more goods between ports without breaching delivery time constraints. Selecting the optimal fleet composition represents a distinct, complex optimization problem that can be addressed through various

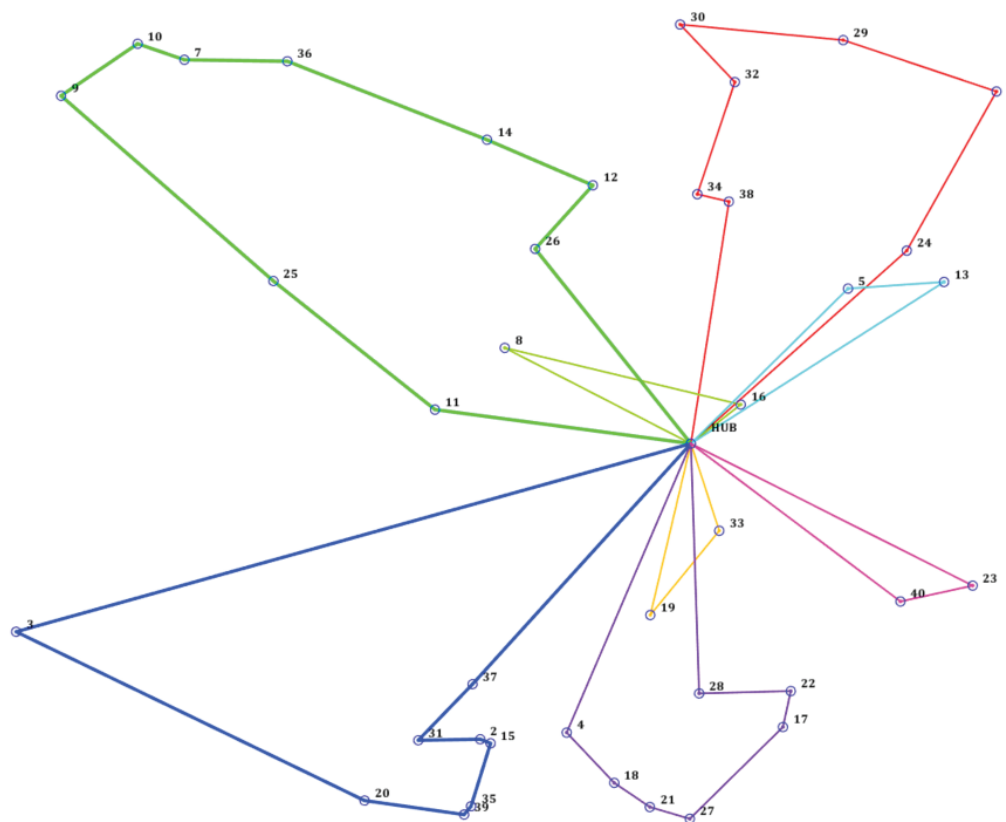


Fig. 4. Route of 8 feeders with a total consumption of 306,81 tons of fuel built by GA_S

Table 7. Route of 8 feeders built by GA_S

	Feeder 1	Feeder 2	Feeder 3	Feeder 4	Feeder 5	Feeder 6	Feeder 7	Feeder 8
Capacity	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Distance	70,23	22,06	26,28	87,1	32,65	90,38	55,6	33,97
Days_ GA	5	2	2	6	3	6	4	3
Acc_ GA	625	80	60	840	75	810	480	75
Cons_ GA	120	48	48	144	72	144	96	72
Speed_ GA_S	11	8	8	13	8	13	8	8
Days_ GA_S	7	3	4	7	5	7	7	5
Acc_ GA_S	875	120	120	980	125	945	840	125
Cons_ GA_S	54,59	9	12	90,11	15	90,11	21	15
Cons_d	65,4	39	36	53,88	57	53,88	75	57
CO ₂ _d	203,68	121,44	112,1	167,8	177,49	167,8	233,55	177,49

methods – ranging from brute force searches to heuristic approaches like genetic algorithms.

As shown in Table 8, feeders with larger capacities effectively deliver goods within the designated 10-day limit, all while maintaining a minimum speed of 9 knots, resulting in the lowest fuel consumption and CO₂ emissions. Optimal utilization of feeder capacity is evident with four feeders operating at 90 % to 93 % capacity, which is highly efficient. This fleet composition does not require further adjustments, as

it effectively handles the delivery of goods. Altering the set of feeders would necessitate redistributing ports, which could increase the average speed of all ships and, consequently, fuel consumption.

Selecting the optimal fleet composition is crucial to meet delivery obligations while minimizing delivery costs. Introducing additional feeders on the route can reduce costs up to a certain threshold, beyond which feeders may operate at minimum speed and with low loads.

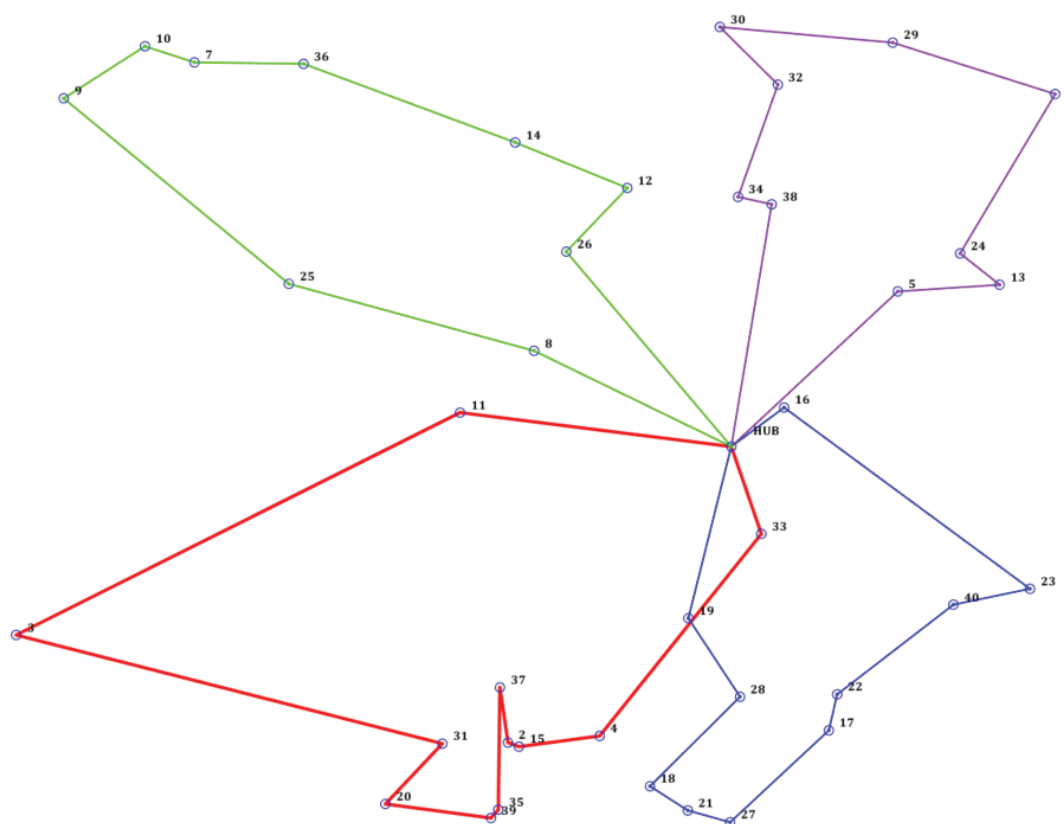


Fig. 5. Route of 4 increased capacity feeders with a total consumption of 303,35 tons of fuel built by *GA_S*

Table 8. Route of 4 increased capacity feeders built by *GA_S*

	Feeder 1	Feeder 2	Feeder 3	Feeder 4
Capacity	1500	1500	1500	1500
Distance	102,95	66,87	73,97	86,14
Days_ <i>GA</i>	7	4	5	6
Acc_ <i>GA</i>	1225	700	750	840
Cons_ <i>GA</i>	280	160	200	240
Speed_ <i>GA_S</i>	13	9	9	9
Days_ <i>GA_S</i>	8	8	9	10
Acc_ <i>GA_S</i>	1400	1400	1350	1400
Cons_ <i>GA_S</i>	143,09	47,48	53,41	59,35
Cons_d	136,9	112,51	146,58	180,64
CO ₂ _d	426,31	350,38	456,45	562,53

Conclusions

The introduction of a speed optimization step within the genetic algorithm framework has proven instrumental in reducing fuel consumption and CO₂ emissions. Comparative analyses indicate that the genetic algorithm with speed optimization consistently achieves superior environmental friendliness performance compared to the standard genetic algorithm, without adding complexity to the algorithm. This finding underscores the viability of incorporating speed optimization in route planning to achieve substantial environmental benefits. By integrating feeder capacity, port cargo accumulation, and maximum route duration, the genetic algorithm's capabilities have been significantly expanded beyond merely finding the shortest route. However, it is important not to dismiss the simplified algorithm without these additional constraints entirely, as there are scenarios where route planning and project management for a single feeder or a few feeders without strict cargo flow or timing restrictions may suffice.

The contribution of this work to the development of algorithms for maritime cargo delivery is evident. Compared to other studies on this topic, such as improvements in 2-point crossovers, tour constraint penalties, and the influence of pseudorandom number generators, this research introduces another effective method for enhancing the practical performance of genetic algorithms, specifically for mTSP.

Furthermore, the study's examination of fleet composition reveals the critical importance of balancing feeder capacities to optimize delivery efficiency and cost-effectiveness. While adding more feeders can initially reduce costs, an excessive number of underutilized feeders can lead to inefficiencies and increased operational expenses. This highlights the necessity of careful project management and strategic planning in fleet composition to prevent such drawbacks.

The research also explores alternative approaches, such as increasing feeder capacities and redistributing feeders across routes. These methods demonstrate the potential to minimize fuel consumption and emissions but require meticulous optimization to ensure overall fleet efficiency. The study's findings suggest that selecting an optimal fleet composition and implementing advanced algorithms can significantly enhance sustainable maritime logistics.

Looking ahead, the integration of advanced technological solutions presents promising opportunities for achieving greener maritime cargo delivery. Future research should focus on refining these algorithms, exploring dynamic adaptations, and further optimizing fleet compositions to adapt to varying operational and environmental conditions. Such efforts will be crucial in aligning economic interests with environmental stewardship, and fostering sustainable practices in the maritime industry.

References

- [1] UNCTAD. Review of Maritime Transport, 2024. [Online]. Available: <https://unctad.org/topic/transport-and-trade-logistics/review-of-maritime-transport>
- [2] T.R. Walker *et al.*, "Environmental Effects of Marine Transportation", *World Seas: An Environmental Evaluation*, 2019, Chapter 27, pp. 505–530. DOI: 10.1016/B978-0-12-805052-1.00030-9
- [3] W. Li *et al.* "An updatable and comprehensive global cargo maritime network and strategic seaborne cargo routing model for global containerized and bulk vessel flow estimation", *Maritime Transport Research*, 2021, no. 2, 100038. DOI: 10.1016/j.martra.2021.100038
- [4] UNCTAD. *Review of Maritime Transport 2023*, 2024. [Online]. Available: https://unctad.org/system/files/official-document/rmt2023_en.pdf
- [5] J. Meyer *et al.*, "Slow Steaming in Container Shipping", *Proceedings of the 45th Hawaii International Conference on System Sciences*, 2012, pp. 1306–1314. DOI: 10.1109/HICSS.2012.529
- [6] N. Bushuyeva *et al.*, "Genetic Algorithm for Maritime Route Planning Projects with Improved Constraints". *Proceedings of the 5th International Workshop IT Project Management*, Bratislava, Slovakia, May 22, 2024, pp. 126–140. <https://ceur-ws.org/Vol-3709/paper11.pdf>
- [7] D. Krstev *et al.*, "The Multiple Travelling Salesman Problem and Vehicle Routing Problem for Different Domestic Drinks", *International Scientific Journal Machines. Technologies. Materials*, 2014, no. 8 (4), pp. 17–18. <https://stumejournals.com/journals/mtm/2014/4/17.full.pdf>
- [8] A. Hertz and M. Widmer, "Guidelines for the use of meta-heuristics in combinatorial optimization", *European Journal of Operational Research*, 2003, no. 151 (2), pp. 247–252. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00823-8
- [9] A. Colomi *et al.*, "Heuristics from nature for hard combinatorial optimization problems". *International Transactions in Operational Research*, 1996, no. 3 (1), pp. 1–21. DOI: 10.1016/0969-6016(96)00004-4
- [10] L.D. Chambers, "The Practical Handbook of Genetic Algorithms", Chapman and Hall/CRC, 2000. DOI: 10.1201/9781420035568

- [11] R.L. Haupt and S.E. Haupt, “Practical Genetic Algorithms”. John Wiley & Sons, 2003. DOI: 10.1002/0471671746
- [12] V.V. Romanuke *et al.*, “A genetic algorithm improvement by tour constraint violation penalty discount for maritime cargo delivery”, *System Research and Information Technologies*, 2023, no. 2, pp. 104–126. DOI: 10.20535/srit.2308-8893.2023.2.08
- [13] V.V. Romanuke *et al.*, “Pseudorandom number generator influence on the genetic algorithm performance to minimize maritime cargo delivery route length”, *Scientific Journal of Maritime Research*, 2022, no. 36, pp. 249–262. DOI: 10.31217/p.36.2.9
- [14] V.V. Romanuke *et al.*, “Crossover operators in a genetic algorithm for maritime cargo delivery optimization”, *Journal of ETA Maritime Science*, 2022, no. 10 (4), pp. 223–236. DOI: 10.4274/jems.2022.80958
- [15] B. Gylmez *et al.*, “Multi-objective Optimization for Green Delivery Routing Problems with Flexible Time Windows”, *Applied Artificial Intelligence*, 2024, no. 38 (1). DOI: 10.1080/08839514.2024.2325302
- [16] O. Yüksel and B. Kuşoğlu, “Regression Modelling Estimation of Marine Diesel Generator Fuel Consumption and Emissions”, *Transactions on Maritime Science*, Split, Croatia, 2022, no. 11 (1), pp. 79–94. DOI: 10.7225/toms.v11.n01.w08
- [17] A.Y. Romanov *et al.*, “Maritime Cargo Delivery Optimization for Mediterranean Region Using Ant Colony Algorithm”, *Climate Change and Water Resources in Mediterranean Countries*, 2024. [Online]. Available: DOI: 10.1007/978-3-031-65960-7_23

А.Ю. Романов

АЛГОРИТМ УПРАВЛІННЯ ФЛОТОМ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ЕКОЛОГІЧНОСТІ МОРСЬКИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Проблематика. Морські вантажні перевезення становлять понад 80 % міжнародних транспортних операцій, забезпечуючи економічно ефективний спосіб ведення глобальної торгівлі, особливо важливий для країн, що розвиваються. Утім, морські перевезення сильно залежать від викопного палива, що призводить до значних викидів вуглекислого газу (CO₂) і створює екологічні проблеми для водних ресурсів. Для вирішення цих проблем у цьому дослідженні пропонується рішення для оптимізації проектів планування морських маршрутів доставки, зменшення споживання палива і викидів CO₂.

Мета. Метою є розроблення алгоритму планування маршрутів доставки за оптимальної швидкості руху суден, що складається з генетичного алгоритму і кроку оптимізації швидкості, для скорочення споживання палива й викидів CO₂ під час морського транспортування. Крім того, буде проведено валідацію отриманих результатів і порівняння ефективності розробленого алгоритму зі стандартним генетичним алгоритмом без кроку оптимізації швидкості.

Методика реалізації. У статті пропонується впровадження додаткового кроку оптимізації швидкості руху суден в алгоритм розрахунку маршрутів доставки, що може значно зменшити витрати палива й викидів CO₂ без збільшення складності самого алгоритму. Маршрут обчислюють через розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів.

Результати. Дослідження показує, що застосування кроку оптимізації швидкості в алгоритмі планування маршрутів доставки суттєво зменшує об'єми споживання палива і викидів CO₂. Порівняння результатів експериментів показало, що генетичний алгоритм із кроком оптимізації швидкості перевершує стандартний генетичний алгоритм за об'ємами використаного пального і викидів CO₂. Детальний аналіз різних комбінацій складу флоту підкреслює необхідність балансування місткості суден для досягнення максимальної ефективності доставки вантажів. Хоча залучення більшої кількості суден спочатку знижує загальне споживання палива, надмірне використання флоту з недовантаженими суднами може призвести до зростання експлуатаційних витрат. У дослідженні також розглядаються альтернативні підходи, такі як збільшення місткості й перерозподіл суден між маршрутами, що також впливає на споживання палива і викиди CO₂.

Висновки. Дослідження пропонує удосконалений алгоритм побудови маршрутів морських вантажних перевезень, що використовує генетичний алгоритм із кроком оптимізації швидкості. Алгоритм забезпечує ефективне управління проектами доставки, при цьому значно зменшуючи витрати палива і викиди CO₂ у навколишнє середовище. Також оптимальне керування складом флоту забезпечує скорочення викидів CO₂ за рахунок ефективного використання кожного судна.

Ключові слова: морський транспорт; управління флотом; оптимальне керування; планування маршрутів; оптимізація маршрутів; управління проектами; споживання палива; викиди CO₂; оптимізація швидкості суден; генетичний алгоритм.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
25 жовтня 2024 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.321969

УДК 621.175.845, 621.184.4

Є.В. Новаківський¹, А.В. Неділько^{1*}¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: andreynedilko1@gmail.com

МЕТОД ВИБОРУ РОБОЧОГО ТІЛА ДЛЯ ORC-ЦИКЛІВ УТИЛІЗАЦІЇ ТЕПЛОТИ ДИМОВИХ ГАЗІВ

Проблематика. Актуальність вибору оптимального робочого тіла для конденсаційних теплообмінників, що працюють на основі органічного циклу Ренкіна (Organic Rankine Cycle (ORC)) на газових енергетичних і водогрійних котлах з утилізацією теплоти відхідних газів, пов'язана зі зростаючою потребою в енергоефективних технологіях та необхідністю забезпечити максимальну ефективність систем генерації за мінімальних витрат. Отже, на часі дослідження властивостей різних робочих речовин та специфіки їх оптимального використання з урахуванням умов роботи конкретного обладнання.

Мета дослідження. Обґрунтування вибору робочого тіла для системи утилізації тепла з конденсаційним теплообмінником і турбіною, яка працює на ORC на основі енергетичного котла Е-480-560-140 ГМ.

Методика реалізації. Науковий підхід у цьому дослідженні ґрунтується на порівняльному методі. Цей підхід передбачає порівняння різних варіантів органічних робочих тіл за допомогою огляду наукових джерел і моделюванні їх роботи для наявних умов. Під час огляду літератури аналізувалися підходи, що вже застосовувалися в інших дослідженнях і на практиці. Моделювання роботи робочих тіл дозволило оцінити їх ефективність і придатність для конкретної системи з урахуванням її параметрів та обмежень.

Результати дослідження. Подано перелік ефективних органічних тіл на основі огляду літератури та результатів техніко-економічного і математичного аналізу. Алгоритм вибору робочого тіла ґрунтується на отриманих результатах дослідження і враховує критерії енергетичної ефективності, сумісності з параметрами системи, стійкості до корозії і зношування, а також доступності та вартості робочих речовин. З урахуванням цих критеріїв і висновків дослідження придатними для заданої системи є такі робочі тіла: R717, R245FA, R123, R141B.

Висновки. Для умов заданого проекту аміак (R717) є найбільш оптимальним робочим тілом. Таке рішення може бути застосовано до аналогічних умов проєктів з утилізації теплоти димових газів продуктів згорання природного газу за допомогою ORC-циклів.

Ключові слова: конденсаційний економайзер; органічне робоче тіло; турбіна на органічному циклі Ренкіна; котел; температура; тиск; теплота пароутворення; витрата; ORC.

Вступ

Робоче тіло в ORC має важливу функцію передавання теплоти і перетворення її в роботу. Використання органічних рідин або газів як робочого тіла дозволяє збільшити ефективність системи утилізації теплоти й отримати додаткову роботу із джерел, які іншим чином були б невикористаними. Таким чином, робоче тіло є ключовим компонентом ORC у системах утилізації теплоти, що впливає на ефективність циклу та конструктивні особливості обладнання.

Аналіз вибору робочого тіла проведено для умов роботи конденсаційного теплообмін-

ника, який утилізує теплоту димових газів від енергетичного котла на прикладі котлоагрегату Е-480-560-140 ГМ, що працює на природному газі в діапазоні навантаження від 240 до 480 т/г. Теплота, що відбирається від димових газів, передається робочому тілу, яке перетворюється на пару і надходить на турбіну. Турбіна, що працює за ORC, виробляє додаткову електроенергію.

На відміну від традиційних циклів Ренкіна (паротурбінні енергетичні цикли), які використовують як робоче тіло воду, ORC використовують інші неорганічні та органічні рідини.

Пропозиція для цитування цієї статті: Є.В. Новаківський, А.В. Неділько, “Метод вибору робочого тіла для ORC-циклів утилізації теплоти димових газів”, *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 56–62, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321969

Offer a citation for this article: Ye.V. Novakivskiy, A.V. Nedilko, “Method of selecting the working body for ORC cycles of flue gas heat recovery”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 56–62, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321969

Постановка задачі

Вибір робочого тіла для конденсаційного економайзера у системі з ORC-турбіною залежить від низки факторів з такими характеристиками:

- параметри димових газів котла — склад і температура димових газів впливають на вибір робочого тіла та ефективність системи;

- погодні умови регіону — температура навколишнього середовища, де розміщено установку, впливає на вибір робочого тіла та ефективність всієї установки;

- доступність і вартість робочого тіла — впливають на економічні показники роботи всієї установки;

- геометричні характеристики обладнання — геометричні обмеження конденсаційного економайзера і теплообмінної площі впливають на вибір робочого тіла та ефективність теплообміну;

- екологічні обмеження — впливають на навколишнє середовище і на обслуговуючий персонал, а також на вибір робочого тіла.

Температурний діапазон робочого тіла обмежується температурою димових газів на виході з котла і температурою навколишнього середовища. Температура димових газів визначає максимальну температуру й тиск кипіння робочого тіла у випарнику, який виконує функцію утилізатора теплоти. Температура охолодження робочого тіла визначається температурою навколишнього повітря або охолоджувальної води.

Методи дослідження

Під час вибору оптимального робочого тіла застосовувався математичне моделювання ORC-циклів та їх техніко-економічний аналіз за заданих параметрів верхнього і нижнього джерел теплоти. Також застосовувався технічний аналіз теплофізичних властивостей робочих тіл на придатність використання за заданих параметрів [1].

Результати технічного аналізу

Під час вибору робочого тіла для конкретного застосування ORC треба враховувати теплофізичні параметри робочого тіла (тиск, температура, прихована теплота пароутворення, температура спалаху, питома теплоємність, теплопровідність), а також аспекти безпеки, вартості, доступності, токсичності, хімічної стабільності за високих

температур і тривалого використання, а також впливу на навколишнє середовище. Критична температура і тиск проміжного теплоносія також мають бути враховані щодо температури джерела тепла. Максимальний тиск і температура у циклі мають бути принаймні на 10 °C нижчими за критичні значення робочого тіла.

Крім того, під час вибору робочого тіла слід враховувати фактори впливу на навколишнє середовище — потенціал руйнування озонного шару (ODP) і потенціал глобального потепління (GWP) [2].

Робочі тіла, використовувані у системах ORC, можна поділити на три основні категорії: сухі, вологі та ізентропічні залежно від їх поведінки під час адіабатичного розширення. Критерій вологості (або сухості) робочого тіла вимірюють величиною, яку визначають як [2]

$$\xi = ds/dT. \quad (1)$$

Таким чином, значення $\xi > 0$ вказує на суху рідину, $\xi \approx 0$ — на ізентропічну рідину, а $\xi < 0$ — на вологу рідину [3].

Сухі рідини — це рідини, в яких всі зміни стану відбуваються без зміни фазового переходу за певних умов циклу (рис. 1). Для виконання дослідження автори використовували програмний комплекс Coolpack [4], який дозволяє відобразити потрібні діаграми для визначених робочих тіл.

Вологі рідини — це рідини, які містять пару і можуть взаємодіяти з додатковими кількостями водяної пари або інших летких компонентів під час випаровування, конденсації або нагрівання. Вологі рідини можуть мати кілька станів пароутворення або конденсації у перебігу циклу (рис. 2) [4].

Ізентропічні рідини — це рідини, для яких процеси у компресорі або турбіні вважають ізентропічними. Це означає, що ентропія залишається константною, і можна розглядати ці процеси у тепловій машині як ідеальне робоче тіло [2] (рис. 3) [4].

Ізентропічні й сухі рідини широко розглядають як найкращі для застосування у субкритичних ORC переважно з метою уникнення утворення крапель рідини. Якщо крива насиченої пари сухої рідини всередині турбіни різко відхиляється, пара може надмірно виходити з турбіни із значним ступенем перегріву, що може викликати зайве збільшення навантаження на охолодження конденсатора. Утім, можна зазначити, що перегріту пару, що виходить із турбіни, можна

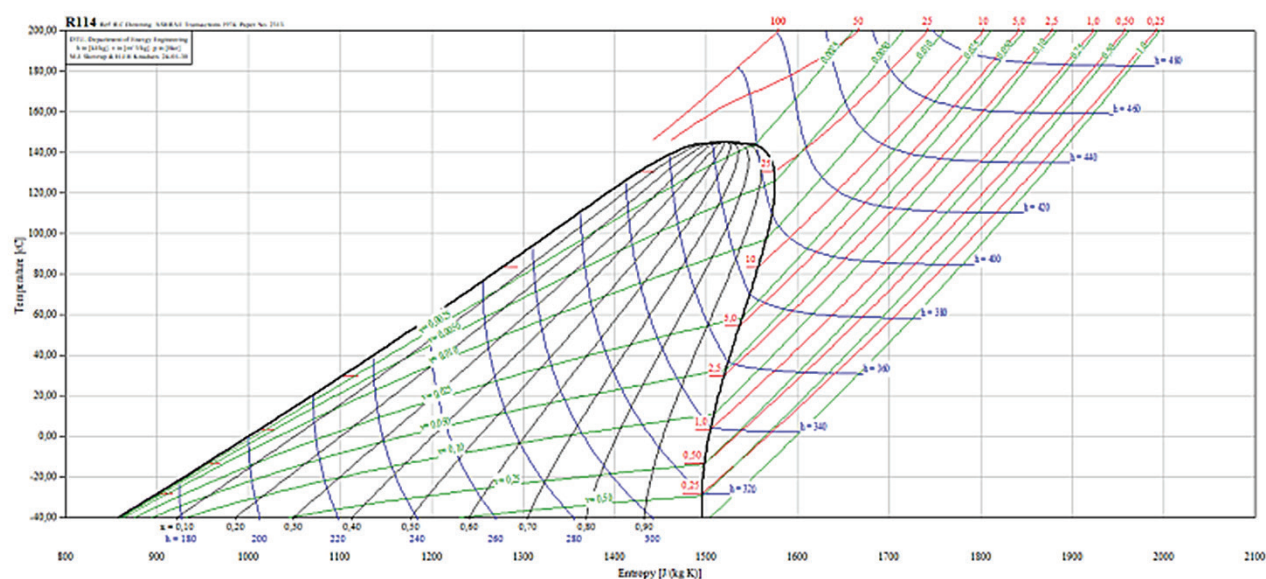


Рис. 1. TS-діаграма сухої рідини (R114)

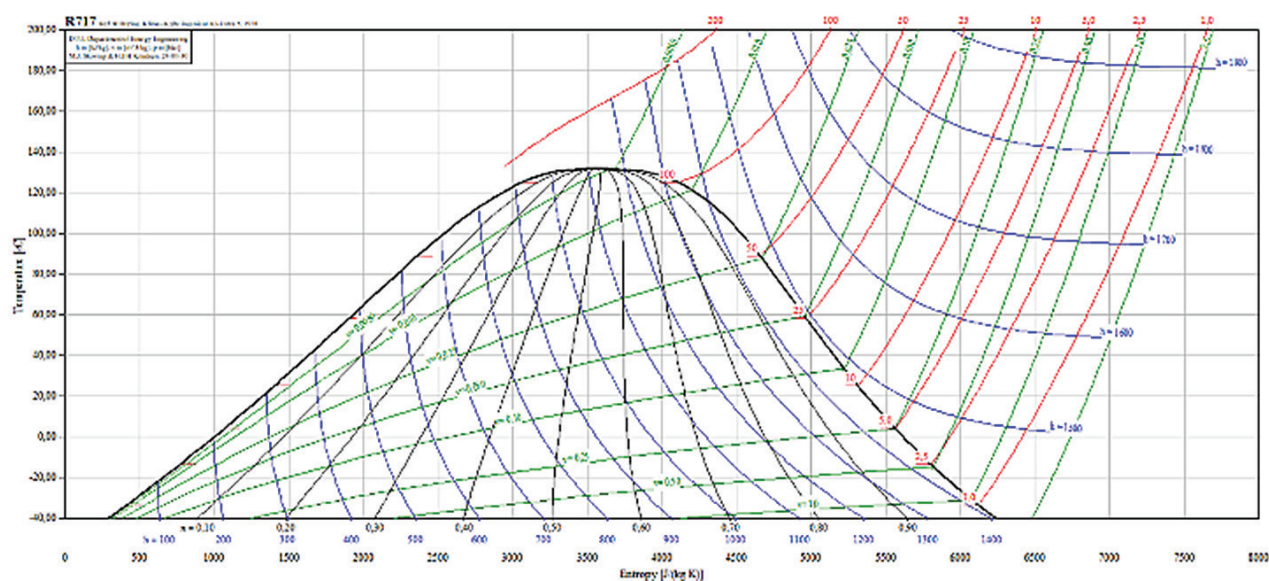


Рис. 2. TS-діаграма вології рідини (R717)

ефективно використовувати, забезпечивши регенерацію між живильним насосом і котлом/випарником – це покращить ефективність системи за рахунок оптимального використання тепла у процесі конденсації димових газів. Оскільки описувана система [1] працює за рахунок фазового переходу рідин, для аналізу використаємо лише вологі рідини, а сухі рідини додамо для порівняння.

Вологі рідини вимагають додаткового перегріву через виникнення водневого зв'язку в молекулах деяких органічних робочих рідин, таких

як вода, аміак та етанол – це вважають потенційною причиною вологоутворення у деяких рідинах через більшу ентальпію пароутворення.

Під час дослідження продуктивності систем ORC було проведено аналіз використання робочих тіл, а саме R-134a, R-245fa, бензолу, метанолу, етанолу, ацетону, пропану (R-290) та аміаку [2]. Ці робочі тіла є найбільш поширеними з-поміж тих, що відповідають критеріям для котла E-480-560-140 ГМ (табл. 1). Дослідження було проведено для температурного діапазону димових газів 107–124 °C. Температуру випаровування

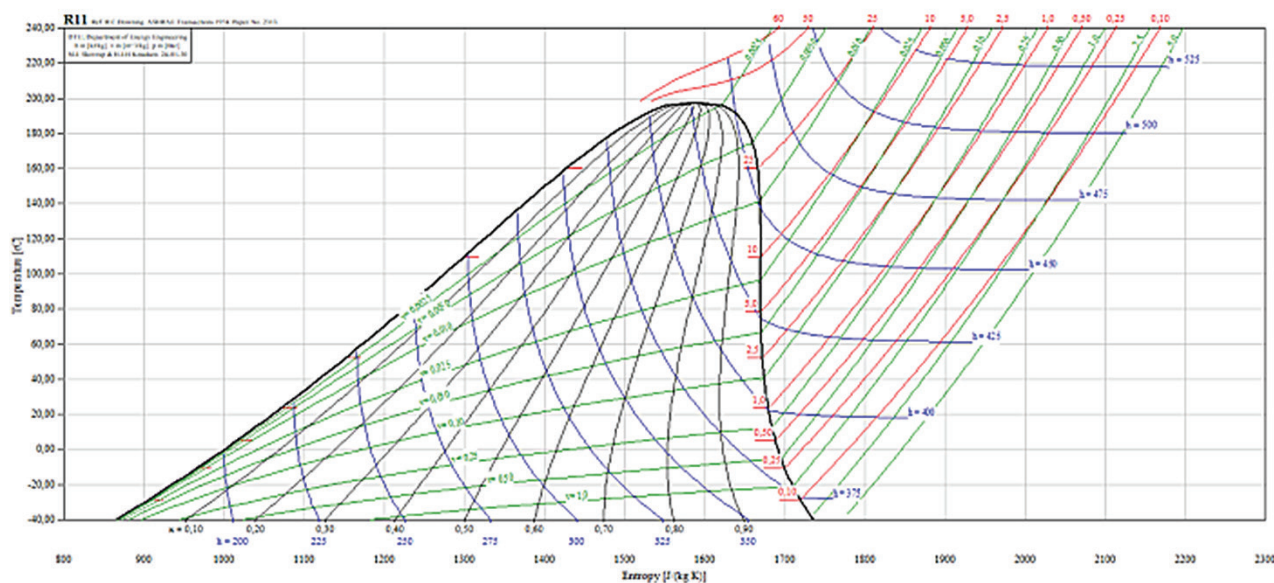


Рис. 3. TS-діаграма ізентропічної рідини (R11)

змінювали, змінюючи тиск робочого тіла. Щоб визначити фізичні властивості робочих тіл, під час моделювання використовували програмне забезпечення CoolProp [6]. Крім того, було розроблено аналітичну модель для оцінювання показників ефективності, включаючи теплову ефективність і питому масову витрату системи ORC для кожного робочого тіла.

Для обладнання, яке розглядається, температура димових газів на виході з димососа становить 107–124 °С залежно від навантаження котла (табл. 1). Така температура обумовлена потребою запобігти конденсації водяної пари з димових газів у газових трактах і в димовій трубі під час роботи котла. Максимальний тиск робочого тіла залежить від температури димових газів на виході з випарника. Залежність становить собою збільшення тиску робочого тіла у разі зменшення температури димових газів.

У процесі дослідження технічних характеристик систем ORC залежно від робочого тіла було використано чисельне моделювання. Температуру й тиск у випарнику змінено, щоб оці-

нити вплив на теплову ефективність і масову витрату на одиницю вихідної потужності ORC за різних робочих умов. У виборі робочого тіла важливими характеристиками є тип робочого тіла, теплота пароутворення, температура пароутворення, критичні температура й тиск, а також потенціал глобального потепління (GWP) з урахуванням 100 років і потенціал руйнування озонового шару (ODP). Такі характеристики наведено у табл. 2.

З огляду на властивості, наведені у табл. 2, сухі робочі тіла, такі як R236EA, R1234ZE та R11, виявляються прийнятними з огляду на їхні критичні характеристики. Зокрема, R11 вирізняється високою температурою кипіння, що дозволяє забезпечити більш низький робочий тиск порівняно з іншими рідинами. Утім, слід враховувати його високий коефіцієнт GWP, що викликає застереження щодо його застосування.

Серед вологих робочих рідин, з огляду на теплоту пароутворення, оптимальними є R123, R245fa, R141B й насамперед аміак (R717). Утім, робоче тіло R245fa має значний коефіцієнт GWP,

Таблиця 1. Параметри димових газів

Величина	Розмірність	Показник						
Потужність блока	%	50	58	66	75	83	91	100
Продуктивність котла	т/г	240	280	320	360	400	440	480
Температура продуктів згорання на виході з котла	°С	107	110	113	115	118	121	124
Ентальпія продуктів згорання на виході з котла	кДж/м³	2454	2524	2594	2641	2711	2782	2852

Таблиця 2. Характеристики робочих тіл

Робоче тіло	Тип робочого тіла	Теплота пароутворення (1 бар), кДж/кг	Температура кипіння (1 бар), °C	Молекулярна маса, кг/моль	Критичні властивості		GWP	ODP
					температура, °C	тиск, бар		
Вода	Мокрий	2257	99,61	0,018	373,95	220,64	0	0
R717	Мокрий	1368,46	-33,58	0,017	132,41	113,63	0	0
R141B	Мокрий	236,23	31,67	0,1169	204,35	42,12	630	0,11
R123	Мокрий	227,65	27,46	0,1529	183,68	36,72	77	0,02
R245fa	Мокрий	219,56	14,72	0,134	153,86	36,51	1030	0
R134a	Мокрий	215,05	-26,36	0,102	101,06	40,59	1300	0
R236EA	Сухий	207,2	5,85	0,152	139,29	34,2	710	0
R114	Мокрий	180,45	3,25	0,1709	145,68	32,57	10 000	0
R11	Сухий	180,45	23,34	0,1374	197,91	43,94	4000	1
R1234ZE	Сухий	174,92	-19,27	0,114	109,37	36,35	6	0
R1234YF	Мокрий	163,07	-29,78	0,114	94,7	33,82	4	0

що викликає застереження до його використання. Робочі тіла R245fa, R123 та R141B мають високу температуру кипіння, що робить їх також прийнятними для розгляду. Робоче тіло R114 задовольняє прийняті вимоги, проте має невисоку теплоту пароутворення і низьку температуру кипіння, а також найвищий коефіцієнт GWP, що спонукає відмовитись від вибору такого робочого тіла. Аміак (R717) також має задовільні критичні властивості, але має низьку температуру кипіння, що вимагає значного підвищення тиску. Такі робочі тіла, як R134a та R1234YF, не можуть бути застосовані за прийнятих умов через незадовільні критичні властивості, оскільки критична температура має бути щонайменше на 10 °C вищою, ніж розрахункова температура у випарнику.

Вода, у свою чергу, вирізняється великою теплою пароутворення і критичними параметрами, забезпечуючи ефективність у широкому температурному діапазоні, однак її використання обмежене через необхідність створювати й підтримувати від'ємний тиск у випарнику.

З огляду на вищенаведене можна зробити висновок, що задовільними робочими тілами для досліджуваної системи є аміак (R717), R123, R245fa та R141B.

Відомо, що тепловий ККД системи зростає зі збільшенням тиску у випарнику, але зменшується з підвищенням температури конденсатора [2].

Для оптимізації продуктивності циклу було використано пакет програмного забезпечення PyCharm [7], поєднаний з бібліотекою

CoolProp [6]. Цю оптимізацію проводили через ітераційний процес. У результаті отримано максимальну теоретичну теплову ефективність (ідеальний цикл) і максимальну фактичну теплову ефективність (реальний цикл). Також отримано оптимальний тиск у випарнику для системи ORC, як показано у табл. 3.

Результати математичного моделювання

Моделювання ефективності роботи ORC було проведено за допомогою пакета CoolProp [6] для виявлення оптимальних робочих тіл з огляду на ККД паротурбінного циклу, за заданих умов [1], а саме:

- температура у конденсаторі (t_0) = 20 °C ;
- тиск у конденсаторі (p_0) = $f(t_0)$;
- температура випарника (t_1) = 90 °C ;
- тиск у випарнику (p_1) = $f(t_1)$;
- температура пароперегрівника (t_2) = 120 °C ;
- тиск у пароперегрівнику (p_1) = $f(t_1)$.

Коефіцієнт корисної дії розраховували за формулою [8]

$$\eta = \frac{h_5 - h_6}{h_5 - h_2}, \quad (2)$$

де η – ККД;

h_5 – ентальпія пари на виході з пароперегрівника перед турбіною;

h_6 – ентальпія пари на виході з турбіни;

h_2 – ентальпія пари на виході з конденсатора.

Результати моделювання наведено у табл. 3.

Таблиця 3. Ефективність використання робочих тіл за заданих параметрів

Робоче тіло	Ідеальний цикл, %	Реальний цикл, %	Тиск у випарнику, МПа	Тиск у конденсаторі, МПа	Вартість, грн/кг
R245FA	34,72	34,03	1,01	0,123	1495,00
R123	31,03	30,41	0,62	0,075	4488,00
R141B	27,75	27,19	0,54	0,065	600,00
R717	18,42	18,05	5,12	0,823	22,50

Аналіз отриманих результатів

З-поміж проаналізованих робочих тіл аміак (R717) та R245FA можна вважати найкращими варіантами для багатьох умов експлуатації систем ORC. Варто зазначити, що ці робочі тіла мають свої особливості та вимоги:

1. Аміак (R717):

- вимагає високого робочого тиску (5 МПа), що забезпечується потовщенням стінки труби, а також встановлення більш потужного насосного обладнання;

- має широкий температурний діапазон від -33 до 132 °C, що дозволяє використовувати його в різних умовах;

- має високу теплоту пароутворення, що дозволяє знизити витрату робочого тіла;

- не вимагає ежекторів для забезпечення конденсації;

- дешевий і загальнодоступний.

2. Робоче тіло R245FA:

- потребує незначного збільшення робочого тиску (1 МПа);

- має великий температурний діапазон від 14 до 153 °C;

- не вимагає ежекторів для забезпечення конденсації;

- має низьку теплоту пароутворення, що збільшує витрату робочого тіла;

- має високий коефіцієнт GWP, що може бути підставою для обмеження його застосування.

3. Робоче тіло R123:

- потребує незначного збільшення робочого тиску (0,6 МПа);

- має великий температурний діапазон від 27 до 183 °C;

- вимагає створення від'ємного тиску для забезпечення конденсації;

- має низьку теплоту пароутворення, що збільшує витрату робочого тіла;

- має високий коефіцієнт GWP, через що заборонений для використання у країнах-членах Європейського Союзу [7].

4. Робоче тіло R141B:

- вимагає високого робочого тиску (0,5 МПа), що забезпечується потовщенням стінки труби, а також встановлення більш потужного насосного обладнання;

- має широкий температурний діапазон від 31 до 204 °C, що дозволяє використовувати його в різних умовах;

- має низьку теплоту пароутворення, що збільшує витрату робочого тіла;

- вимагає створення від'ємного тиску для забезпечення конденсації;

- дешеве та загальнодоступне.

Висновки

У роботі описано методику, що ґрунтується на порівняльному методі, у межах якої проведено аналіз наявних органічних робочих тіл відповідно до вимог заданого проекту [1]. З-поміж розглянутих варіантів робочих речовин аміак (R717) виявився найбільш оптимальним з огляду на його ефективність, доцільність і вартість. Обране рішення, а також розроблена методика вибору робочого тіла, можуть бути успішно використані у схожих проектах з утилізацією теплоти димових газів продуктів згорання природного газу за допомогою ORC.

References

- [1] Ye.V. Novakivskyi and A.V. Nedilko, "Zastosuvannia kondensatsiinykh ekonomazeriv na hazovikh enerhetychnykh ta vodohriynykh kotlakh", *Enerhetyka: ekonomika, tekhnolohii, ekolohiia*, № 4 (66), 2021, s. 62–70. DOI: 10.20535/1813-5420.4.2021.257271
- [2] A. Fakeye Babatunde and O. Oyedepo Sunday, "A Review of Working Fluids for Organic Rankine Cycle (ORC) Applications", *IOP conference series: materials science and engineering*. IOP Publishing, vol. 413, 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/413/1/012019
- [3] Yung-Ming Li *et al.*, "Experimental investigation of 3-kW organic Rankine cycle (ORC) system subject to heat source conditions: A new appraisal for assessment", *J. Energy*, 15 February 2021, vol. 217, 119342 p. DOI: 10.1016/j.energy.2020.119342
- [4] "Software complex Coolpack". [Online]. Available: <https://www.ipu.dk/products/coolpack/>

- [5] Ruijie Wang *et al.*, “Experimental Investigation of a 300 kW Organic Rankine Cycle Unit with Radial Turbine for Low-Grade Waste Heat Recovery”, *J. Entropy*, no. 21 (6), 2019, 619 p. DOI: 10.3390/e21060619
- [6] “Software complex CoolProp”. [Online]. Available: <https://www.coolprop.org/>
- [7] “Software complex PyCharm”. [Online]. Available: <https://www.jetbrains.com/ru-ru/pycharm/>
- [8] “REGULATION (EU) No 517/2014 OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL of 16 April 2014 on fluorinated greenhouse gases and repealing Regulation (EC) No 842/2006”, *European Parliament, and Council. Official Journal of the European Union*, 20 May 2014, vol. 57, no. L 150, pp. 195–230. [Online]. Available: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32014R0517&qid=1618313690727&from=ES>
- [9] R.A. Hinrichs and M. Kleinbach, “Heat and Work in Energy: Its Use and the Environment”, 4th ed. Toronto, Ont. Canada: Thomson Brooks/Cole, 2006, ch. 4, sec. E, pp. 115.

Ye.V. Novakivskiy, A.V. Nedilko

METHOD OF SELECTING THE WORKING BODY FOR ORC CYCLES OF FLUE GAS HEAT RECOVERY

Background. The choice of the optimal working fluid for condensing heat exchangers operating based on the organic Rankine cycle on gas-fired power and water boilers with waste gas heat recovery arises due to the growing need for energy-efficient technologies and the need to ensure maximum efficiency of generation systems at minimal costs. This requires studying the properties of various working fluids and their optimal use, taking into account specific operating conditions, and addressing the lack of research for specific equipment conditions.

Objective. The purpose of the paper is to justify the choice of the working fluid for the heat recovery system with a condensing heat exchanger and a turbine operating on the organic Rankine cycle based on the E-480-560-140 GM power boiler.

Methods. The scientific approach in this study is based on the comparative method. This approach involves comparing different options for organic working fluids through a literature review and modelling their operation for existing conditions. During the literature review, approaches that have already been used in other studies and practices were analyzed. Modelling the operation of working fluids made it possible to assess their efficiency and suitability for a specific system, considering its parameters and limitations.

Results. A list of effective organic bodies is presented based on a literature review and the results of technical, economic and mathematical analysis. The algorithm for selecting a working body is based on the obtained research results and takes into account the criteria of energy efficiency, compatibility with system parameters, resistance to corrosion and wear, as well as the availability and cost of working substances. Taking these criteria and research conclusions into account, the following working fluids are suitable for the given system: R717, R245FA, R123, R141B.

Conclusions. For the conditions of the given project, ammonia (R717) is the most optimal working medium. This decision can be applied to similar conditions of projects on heat utilization of flue gas products of natural gas combustion using ORC cycles.

Keywords: condensation economizer; organic working body; turbine on the organic Rankine cycle; boiler; temperature; pressure; heat of vaporization; consumption; ORC.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового інституту атомної та теплової енергетики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
4 листопада 2024 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.309585

UDC 004.056

Oleg Boiko*

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: o.a.boiko@kpi.ua

A METHOD FOR PROTECTING DIGITAL ASSETS FROM PERMANENT LOSS IN THE EVENT OF PRIVATE KEY LOSS

Background. Cryptocurrencies have introduced a decentralized and secure way to transfer value, with private keys playing a crucial role in authorizing transactions and verifying ownership. However, the loss or destruction of private keys leads to permanent asset loss, presenting a significant risk to users and hindering broader adoption.

Objective. This paper presents a smart contract-based method to mitigate the risk of losing digital assets in the event of permanent private key loss, providing an automated recovery procedure without compromising the security of digital assets.

Method. The proposed solution leverages smart contract technology to create an automated recovery process. Key components include a protected address (Address A), a predefined recovery address (Address B), and a specified time interval (Period T). If no outgoing transactions are registered during Period T, the smart contract transfers assets from Address A to Address B.

Results. The proposed method ensures that in the event of private key loss, assets are automatically transferred to a backup address after Period T. This process ensures users maintain full control over their assets, allowing adjustments to Period T and Address B as needed.

Conclusions. The smart contract-based recovery method provides a reliable and user-friendly solution to address the consequences of possible permanent private key loss. It complements existing solutions, offering an additional layer of security and enhancing user confidence in decentralized financial systems. Future research might focus on improving the security and reliability of the backup address.

Keywords: information security; cryptocurrency; private key; smart contract; asset recovery; digital assets.

Introduction

Cryptocurrencies have revolutionized the financial landscape by introducing a decentralized and secure means of transferring value. At the heart of this revolution is the concept of private keys, used for authorizing transactions and verifying ownership within cryptocurrency systems, ensuring that only the rightful owner can access and transfer their assets.

Despite their crucial role, private keys come with inherent risks. The most significant of these is the potential for permanent asset loss if the private key itself is lost or destroyed. Unlike traditional financial systems where numerous recovery methods can be employed to regain access to accounts, the decentralized nature of cryptocurrencies means that once a private key is lost, the corresponding digital assets become irretrievable. This presents a substan-

tial risk to asset holders and poses a barrier to the broader adoption of cryptocurrencies.

A poignant example is the 2018 case of QuadrigaCX, a Canadian cryptocurrency exchange. Its founder, Gerald Cotten, who solely owned the private keys to the exchange's cold wallets, passed away unexpectedly. This leftover \$130 million in assets locked with no way to recover them [1].

Another example is the story of Bitcoin developer Stefan Thomas, who had three backups of his wallet – an encrypted USB stick, a Dropbox account, and a Virtualbox virtual machine. However, he managed to erase two of them and forgot the password to the third, forever losing access to 7,000 BTC (worth \$125,000 at the time) [2].

The most straightforward solution to this user experience problem is to create a custodial service that manages keys and handles transactions. This is the method used by major centralized exchanges

Пропозиція для цитування цієї статті: О.А. Бойко, “Метод захисту цифрових активів від незворотної втрати у випадку втрати приватного ключа”, *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 63–68, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.309585

Offer a citation for this article: Oleg Boiko, “A method for protecting digital assets from permanent loss in the event of private key loss”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 63–68, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.309585

and custodial wallets, allowing for traditional access mechanisms and features like password recovery. However, this approach introduces significant centralization risks and conflicts with one of the fundamental principles of web3/crypto: “Not your keys, not your coins”.

On the non-custodial side, there are some interesting modern solutions and proposals, such as hardware, multi-signature, and social recovery wallets, as well as some biometric authentication ideas. While these solutions offer valuable improvements in user experience and risk reduction, they still have their challenges, described further in this research.

This paper proposes a relatively simple solution, designed to mitigate the risk of losing digital assets in the event of permanent private key loss. The described approach aims to provide an automated smart contract-based recovery procedure without compromising the underlying security of digital assets.

The following sections will explore the problem statement, review recent relevant research and publications, examine existing key management options, and finally present the design of the proposed solution, analysing its potential benefits and drawbacks.

Problem Statement

Securing private keys is a complex and non-trivial problem because it requires balancing two conflicting goals: ensuring uncompromisable non-custodial control of digital assets and minimizing the respective management risks (along with the associated significant emotional pressure) for users, especially those who are not tech-savvy.

The goal of this article is to propose a simple, transparent and user-friendly method that allows cryptocurrency users to have a “Plan B” for the possible scenario of private key loss, without sacrificing the fundamental security of non-custodial ownership of the respective digital assets.

Analysis of Recent Research and Publications

In 2021, the Austrian Institute of Technology (AIT) conducted an online survey to understand the preferences of the general audience regarding the handling of private keys for blockchain-based applications. About 80 % of participants preferred the direct variant, which requires users to store the private key themselves, while around 60 % opted for a hybrid variant where an external manager is responsible for the backup. This indicates that participants value data sovereignty more than the risk of

losing money or other digital assets. Approximately half of the survey participants would prefer to record the access code on paper, while others would store it on their mobile phone, in a password manager, or by printing it [3].

Various methods have been developed to enhance the security and recoverability of private keys. One of the most prominent is **Hardware wallets**, which were thoroughly analyzed in a 2019 research paper by Edinburgh Napier University [4]. Hardware wallets are devices designed to store private keys offline in what is known as “cold storage”. They connect to a computer via USB or Bluetooth for transaction signing, but the keys never leave the device, reducing exposure to internet-based attacks. Although secure against online threats, hardware wallets are vulnerable to physical damage or loss, which, in the context of this paper, is technically equivalent to private key loss.

Another significant concept is **Multi-signature wallets**, which allow multiple configurations of keys to authorize a transaction, thereby reducing the risk of losing one of these keys [5]. One of the main challenges with this approach is reduced usability, as each transaction requires confirmation from at least two different key holders. Therefore, this concept is better suited for businesses, organizations, or group-owned digital assets.

Several recovery mechanisms have been proposed to mitigate the consequences of key loss, including the **Social recovery wallet** concept. This type of digital wallet enables the recovery of private keys and digital assets through a user’s social network, utilizing guardians (trusted individuals or devices) to aid in the recovery process [6]. Under normal circumstances, a social recovery wallet functions like a regular wallet, requiring only a single confirmation click for transactions. If the user loses their signing key, the social recovery feature is activated, allowing the user to request their guardians to sign a transaction that updates the wallet’s signing key to a new one [7]. It’s worth noting that getting a social recovery system right is a complex engineering challenge. Implementing it reliably and transparently can be difficult and poses its own security risks.

Another approach is utilizing **Biometric authentication** to enhance key recovery processes, as explored in a recent (2023) paper from Kharkiv Polytechnic Institute [8]. Biometric authentication is a security process that verifies a person’s identity based on their unique physiological or behavioural traits, such as facial features, fingerprints, or handwriting patterns. The main challenge is processing biometric data accurately across varied conditions and datasets.

Additionally, there is an inherent risk in trusting the numerous actors involved in the design, production, and shipment of the authentication devices.

This paper proposes a method to address these gaps by leveraging simple and transparent smart contract technology to provide a reliable and automated recovery procedure.

Design Principles

The proposed method is based on the following design principles:

Security: Ensure that the respective architecture does not compromise the fundamental security of the digital assets.

Automation: Implement an automated process to minimize human intervention and reduce the risk of errors.

Flexibility: Allow for customizable parameters to address different user needs and preferences.

Transparency: Maintain clear and auditable processes to build trust and accountability.

Simplicity: The less complex the system, the more reliable and resilient it is.

Ergonomics and UX: The system should be intuitive and straightforward and should not require any additional training for any relevant user.

Proposed Solution

The core concept of the proposed protection method is the establishment of an automated, smart contract-based system based on three key components:

Address A – the protected address (the private key for which may be lost).

Backup Address B – a predefined restoration address (explained in detail further below).

Period T – a predefined time interval during which no outgoing transactions (explicitly signed by the owner) are registered in the blockchain. This criterion can serve as a reliable confirmation for the private key loss event.

The idea in a nutshell: the smart contract will send assets from protected Address A to the backup Address B in case of no signed transactions during period T (see Fig. 1).

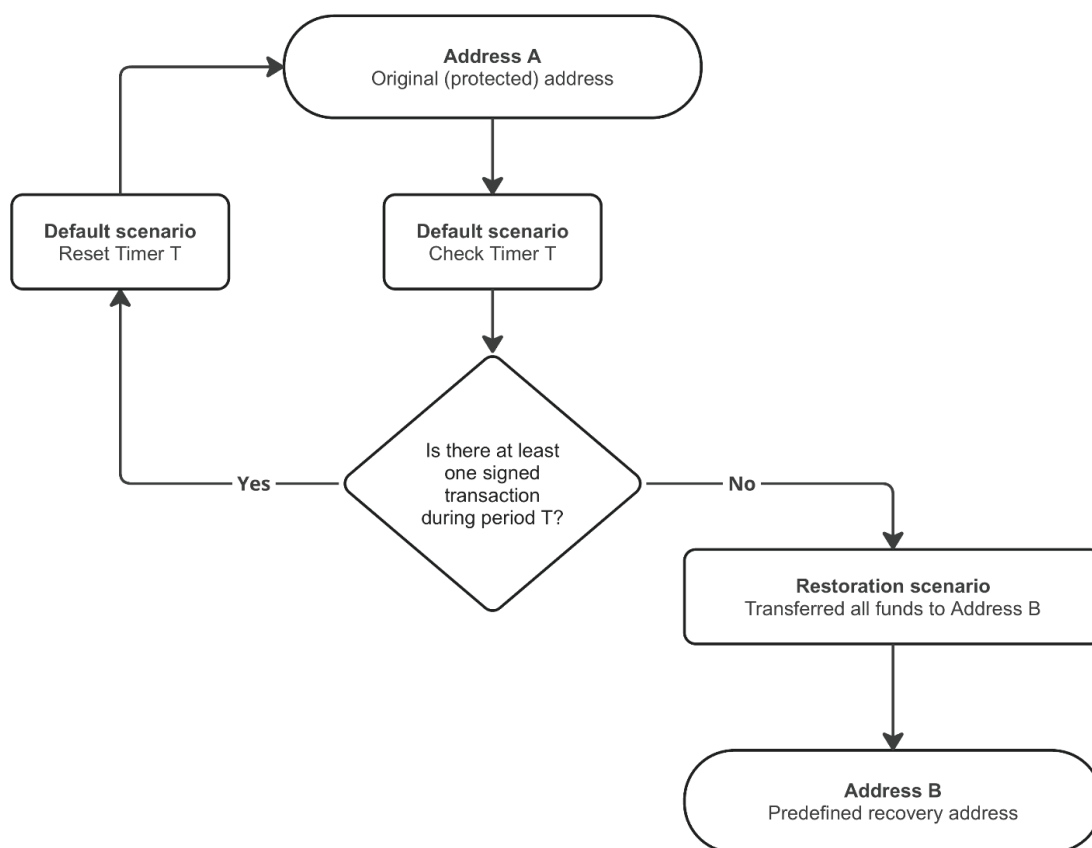


Fig. 1. Principle schema of the proposed solution

Address B can be:

1. **One's own backup storage** with a different private key or different access principle (e.g. custodial or social recovery wallet).
2. **The heir's wallet** (children, grandchildren, spouse, relatives, business partners, etc.) – an automated classical inheritance.
3. **A wallet of a trusted institution**, that upon the event of smart contract execution, will be able to use the positive human factor to perform reliable, rational, and legally transparent verification and transfer of funds to the legitimate addressee.

Any authorized outgoing activity, such as sending funds or any other signed operation, will reset the countdown (timer) of period T. Thus, in the case of regular active Address A usage, the timer will be regularly reset and the funds will stay in place. Also, it should be relatively easy to develop an application that will listen to the relevant blockchain information and send a reminder (e.g. one month before period T ends) with an offer to sign an empty "signal" transaction to reset period T.

The period T itself can be set to any comfortable value, from more dynamic, e.g. 1-2 weeks (for institutions with a lot of operations and a high responsibility level), to more conservative, like 2-5 years (for individual long-term investments). In any case, once the smart protection contract is activated, the owner of the funds (or their heir) might feel significantly better protected from the irretrievable loss of the assets as a result of a wide range of unsuccessful circumstances, such as storage device mechanical damage, loss or destruction of the recovery phrase, death or disappearance of the sole owner, and so on. Obviously, the described method will not be able to protect assets in case of private key theft.

Examples

Scenario 1: "Simple Plan B"

Alice stores some digital coins in her blockchain wallet (Address A) with the private key's mnemonic written down on a piece of paper. She assigns a restoration address (Address B) to her account on the centralized exchange Coinance, which is secured by email-password access. She sets the restoration period (T) to 6 months.

Alice retains full and exclusive control of her funds. However, if she loses access to both her wallet and the private key mnemonic, she simply needs to wait 6 months from the date of the last transaction. The smart contract will then transfer her funds to the Coinance account. In case she forgets or loses her Coinance password, she can

recover it using Coinance's email-based recovery procedure.

Scenario 2: "Digital Will Protection"

Bob stores some digital coins in his blockchain wallet (Address A) with the private key secured in multiple software and hardware storages, but in a way that only Bob can access them. He assigns a restoration address (Address B) to the account of his legal advisory firm Satoshi & Partners, and sets a restoration period (T) to 1 year.

Bob retains full and exclusive control of his funds. However, in the event of his death, incapacity, or other unforeseen circumstances, his heirs only need to wait 1 year from the date of the last transaction. The smart contract will then transfer the funds to Satoshi & Partners, where the firm can distribute the assets to Bob's heirs, based on legal agreements and/or instructions Bob has provided.

Advantages

1. While maintaining control over the private key, its owner still retains full control over their assets and, at any time, will be able to:
 - a. disable/suspend the execution of the security smart contract;
 - b. sign any transaction (including an empty one) to reset the timer counting the period T;
 - c. change period T;
 - d. Change Address B.
2. In case of private key loss, the assets will not be irretrievably lost. The owner (or the relevant applicant) will only need to wait until the end of period T, after which the assets will be transferred to the reserved address.

Disadvantages

1. The need to occasionally sign at least one transaction to reset the count of the period T.
2. The need to maintain the reliability of Address B and/or redefine this address in case of concerns.

Conclusions

The management of private keys in the cryptocurrency and digital assets ecosystem is one of the critical research areas due to the inherent risks associated with key loss. Existing solutions, such as hardware wallets, multi-signature wallets, social recovery wallets, and biometric authentication, have provided various methods to enhance security and recoverability. However, each of these solutions presents

its own set of challenges, including engineering complexity and reliance on third-party hardware.

This paper proposes a new method that leverages automated smart contract technology to address the consequences of possible event of permanent private key loss. Unlike existing solutions, this approach provides a time-based automated transfer system that activates upon detecting the absence of outgoing transactions over a predefined period. This method offers some valuable advantages, including high transparency, minimal human intervention, and enhanced flexibility in setting recovery parameters. The proposed solution maintains the fundamental security of non-custodial ownership while introducing a practical “Plan B” for asset recovery.

Importantly, the smart contract-based protection method proposed in this paper is not intended to replace existing solutions but to augment and

complement them, by providing an additional layer of backup and problem-solving opportunities.

The proposed solution can be applied in various scenarios, from individual long-term investments to high-responsibility institutional operations. It provides a reliable and transparent method for asset recovery without compromising security. The smart contract-based approach ensures that users or their designated heirs can retrieve assets even in cases of key loss, device damage, or owner incapacity.

Despite its advantages, the proposed solution also identifies new challenges and areas for further research. Perhaps most important is enhancing the security and reliability of the backup address.

The practical implementation of the proposed method will not only mitigate the risk of asset loss but also support the broader adoption and confidence in decentralized financial systems.

References

- [1] N. De and A. Baydakova, “The collapse of QuadrigaCX: What we know (and what we don’t)”, CoinDesk, 2019. [Online]. Retrieved from: <https://www.coindesk.com/markets/2019/02/06/the-collapse-of-quadrigacx-what-we-know-and-what-we-dont/>
- [2] V. Buterin, “Bitcoin Self-Defense, Part I: Wallet Protection”, 2013. [Online]. Retrieved from: <https://bitcoinmagazine.com/culture/bitcoin-self-defense-part-i-wallet-protection-1368758841>
- [3] C. Brunner *et al.*, “Who Stores the Private Key? An Exploratory Study about User Preferences of Key Management for Blockchain-based Applications”, 2021. [Online]. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/349402052_Who_Stores_the_Private_Key_An_Exploratory_Study_about_User_Preferences_of_Key_Management_for_Blockchain-based_Applications. DOI: 10.5220/0010173200230032.
- [4] B. Mackay, “Evaluation of Security in Hardware and Software Cryptocurrency Wallets”, 2019. [Online]. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/338054399_Evaluation_of_Security_in_Hardware_and_Software_Cryptocurrency_Wallets. DOI: 10.13140/RG.2.2.31686.29768.
- [5] Investopedia, “Multi-signature wallets: Definition and use cases”, 2023. [Online]. Retrieved from: <https://www.investopedia.com/multi-signature-wallets-definition-5271193>
- [6] A.B. Pedin IV *et al.*, “Smart Contract-Based Social Recovery Wallet Management Scheme for Digital Assets”, 2023. [Online]. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/371515274_Smart_Contract-Based_Social_Recovery_Wallet_Management_Scheme_for_Digital_Assets. DOI: 10.1145/3564746.3587016.
- [7] V. Buterin, “Why we need wide adoption of social recovery wallets”, Jan 2021. [Online]. Retrieved from: <https://vitalik.eth.limo/general/2021/01/11/recovery.html>
- [8] S. Datsenko and H. Kuchuk, “Biometric Authentication Utilizing Convolutional Neural Networks”, *A.I.S.*, Jun. 2023, vol. 7, no. 2, pp. 87–91. [Online]. DOI: 10.20998/2522-9052.2023.2.12

O.A. Бойко

МЕТОД ЗАХИСТУ ЦИФРОВИХ АКТИВІВ ВІД НЕЗВОРОТНОЇ ВТРАТИ У ВИПАДКУ ВТРАТИ ПРИВАТНОГО КЛЮЧА

Проблематика. Технологія блокчейну і криптовалют запровадила можливість безпечного і децентралізованого передавання цінності, де приватні ключі відіграють ключову роль в авторизації транзакцій і перевірці права власності. Утім, втрата або знищення приватних ключів призводять до незворотної втрати активів, що становить значний ризик для користувачів і заважає ширшому впровадженню технології.

Мета дослідження. У цій статті запропоновано метод на основі смарт-контрактів, що допомагає знизити ризик втрати активів у разі втрати приватного ключа, забезпечуючи автоматизовану процедуру відновлення зі збереженням рівня безпеки цифрових активів.

Методика реалізації. Запропонований метод використовує технологію смарт-контрактів для забезпечення автоматичного відновлення активів. Ключові компоненти включають захищену адресу (Адреса А), заздалегідь визначену адресу відновлення (Адреса В) і визначений часовий інтервал очікування (Період Т). Якщо протягом Періоду Т не зареєстровано вихідних транзакцій, смарт-контракт автоматично переводить активи з Адреси А на Адресу В.

Результати дослідження. Запропонований метод забезпечує автоматичне передавання активів на резервну адресу у випадку втрати приватного ключа після закінчення Періоду Т. Такий підхід зберігає повний контроль користувача над активами і дозволяє гнучке налаштування Періоду Т й Адреси В за потреби.

Висновки. Метод відновлення на основі смарт-контрактів надає надійне і зручне рішення для усунення наслідків можливої втрати приватного ключа. Він доповнює вже відомі рішення, пропонуючи додатковий рівень безпеки, і сприяє підвищенню рівня довіри користувачів до децентралізованих фінансових систем. Майбутні дослідження буде доцільно зосередити на покращенні безпеки й надійності резервної адреси.

Ключові слова: інформаційна безпека; криптовалюта; приватний ключ; смарт-контракт; відновлення активів; цифрові активи.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
25 січня 2025 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.322905

УДК 004.056:519.8

О.М. Новіков^{1*}, М.І. Ільїн¹, І.В. Стьопочкіна¹, М.В. Овчарук¹¹Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

*Відповідальний автор: o.novikov@kpi.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕПОМІТНИХ КІБЕРАТАК НА СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ КРИТИЧНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ

Проблематика. Інтеграція систем промислового контролю із сучасними мережевими технологіями спричиняє виникнення великої кількості атак на критичну інфраструктуру. Методи виявлення і протидії таким атакам ще недостатньо розвинені, є нагальна потреба у розвитку математичного апарату, який дозволяє визначати параметри кібератак на такі системи.

Мета дослідження. Метою роботи є розроблення й дослідження параметрів непомітної атаки (Stealthy attack) на систему керування об'єкта критичної інфраструктури як інструменту тестування систем кіберзахисту, яка обходить стандартний детектор діагностики несправностей.

Методика реалізації. Модель системи промислового контролю розглянуто у вигляді диференціального рівняння. Введено параметри адитивної атаки на керування, а також критерій детектування несправностей. Задачу визначення параметрів розв'язано методами оптимального керування з використанням функціонала Лагранжа та методу градієнтного спуску.

Результати дослідження. Запропоновано новий метод і відповідний алгоритм пошуку шкідливих спотворень керування з використанням варіаційного методу оптимізації та градієнтного методу найшвидшого спуску. Проведено обчислювальний експеримент, який свідчить про працездатність запропонованого алгоритму.

Висновки. Розглянуто кібератаку із класу непомітних атак (Stealthy attacks), спрямовану на модифікацію керуючих сигналів системи керування об'єктами критичної інфраструктури, яка здатна обходити стандартні детектори несправностей. Запропоновані метод та алгоритм можуть бути застосовані під час планування тестів на проникнення для аналізу безпеки автоматизованих систем контролю об'єктів критичної інфраструктури індустріального типу. Працездатність алгоритму перевірено комп'ютерним експериментом.

Ключові слова: теорія керування; кібербезпека; непомітні атаки; визначення параметрів.

Вступ

Останнім часом відбулося значне зростання інтенсивності кібератак на об'єкти критичної інфраструктури, і це загрозливе явище обумовлено насамперед вразливостями, притаманними сучасним автоматизованим системам управління технологічними процесами ((АСУ ТП), чи англ. Industrial Control System (ICS)), системам диспетчерського управління та збору даних (SCADA – Supervisory Control and Data Acquisition), розподіленим системам керування (DCS – Distributed Control System), системам програмованих логічних контролерів (PLC – Programmable Logic Controller).

Сучасні автоматизовані системи все частіше інтегруються в інформаційні мережі, щоб забезпечити гнучкість, продуктивність і віддалений доступ. Утім, ця інтеграція часто відбувається у формі формального кількісного об'єднання підсистем без аналізу умов їх безпечної взаємодії, що створює серйозні загрози безпеки функціонування новостворених систем. Серед таких загроз можна назвати застарілі протоколи окремих підсистем, відсутність шифрування, розширення доступу з боку мереж загального доступу, інтеграцію з Інтернетом речей (IoT). Хоча нині активно впроваджуються сучасні технології, багато використовуваних систем розроблялися десятиліття тому – у них використовуються

Пропозиція для цитування цієї статті: О.М. Новіков, М.І. Ільїн, І.В. Стьопочкіна, М.В. Овчарук, “Визначення параметрів непомітних кібератак на системи керування об'єктів критичної інфраструктури”, *Наукові вісники КПІ*, № 1, с. 69–75, 2024. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.322905

Offer a citation for this article: Oleksii Novikov, Mykola Ilin, Iryna Stopochkina, Mykola Ovcharuk, “Determination of parameters of stealthy cyber attacks on control systems of critical infrastructure objects”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 69–75, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.322905

застарілі протоколи, не враховуються сучасні кіберзагрози. Безпека лише за рахунок організаційних факторів, фізичної ізоляції в сучасних умовах перестає бути достатньою. Типовими випадками є використання незахищених протоколів передачі даних, які роблять можливими атаки типу «людина посередині», загрози перехоплення, повтор і фальсифікації даних, які передаються. Під час підключень таких систем до Інтернету та їх інтеграції із пристроями IoT для виконання завдань моніторингу й управління на хмарному рівні неминуче розширюється поверхня атак і вразливі механізми стають ціллю кібератак зломисників.

У сучасних умовах кіберпростір став середовищем для реалізації різноманітних цілей, зокрема впровадження шкідливих впливів унаслідок політичних мотивів, реалізації економічного протистояння, екологічного хактивізму, тероризму та інших цілей кіберзлочинців. Таким чином, кібератаки роблять можливими ведення гібридної війни, зменшення економічного потенціалу країни або терористичних дій. У відомих прикладах кібератак на об'єкти енергетики використовувались прийом соціальної інженерії разом зі шкідливими програмами-вимагачами (ransomware), деякі установи секторів критичної інфраструктури потерпають від викрадення комерційних таємниць тощо.

Сектори критичної інфраструктури охоплюють майже всі сфери людської діяльності – починаючи з індустрії і завершуючи службами охорони здоров'я. Унаслідок цифровізації суспільства відбувається перехід на роботу з електронними даними, комп'ютеризацію всіх видів діяльності. Серед секторів критичної інфраструктури – енергетика, водопостачання, транспорт, фінансова сфера, хімічна промисловість і важка індустрія, охорона здоров'я, комунікації та інші. Разом зі збільшенням масштабів і взаємозалежностей між різними підприємствами, зростанням складності задіяних у них систем контролю, відкритістю до зовнішніх мереж зростає і кількість кібератак.

Оскільки одним із критеріїв віднесення об'єкта до критичної інфраструктури є його потенціальний вплив на людське суспільство, тяжкість наслідків, спричинених припиненням нормального функціонування такого об'єкта, можна стверджувати, що потенціальна шкідливість успішних атак для таких об'єктів є високою й істотною для міст, регіонів або ж усієї країни залежно від рівня критичності такого об'єкта. Унаслідок глобалізації економіки різних країн

є суттєво взаємозалежними, тому успішні атаки на об'єкти критичної інфраструктури є джерелом значних фінансових втрат і порушенням функціонування цілих секторів або дестабілізації економіки цілих країн чи регіонів.

Інтенсивність кібератак на об'єкти критичної інфраструктури зросла через поєднання технологічних, економічних і політичних факторів. Зломисники використовують слабкі місця ICS, SCADA, DCS та PLC для досягнення своїх цілей, що робить завдання забезпечення кіберзахисту критично важливим. Це вимагає від держав та організацій розробляти більш складні системи захисту та постійно вдосконалювати наявні інструменти кібербезпеки.

Захист систем нижнього рівня, зокрема PLC, є ключовим елементом у забезпеченні кібербезпеки критичної інфраструктури. Вразливість PLC робить їх основними цілями атак, наслідки яких можуть бути катастрофічними. Розвиток сучасних систем виявлення атак та адаптивних механізмів захисту має бути пріоритетом для промисловості й держав.

Системи автоматизованого управління технологічними процесами нижнього рівня, які ґрунтуються на PLC, є найбільш вразливими до атак і водночас критично важливими з точки зору наслідків їх ураження. Ці системи відіграють ключову роль у підтриманні основних технологічних параметрів у критичних галузях.

Серед найпоширеніших атак на системи автоматизації нижнього рівня або безпосередньо на програмовані логічні контролери PLC можна виділити атаки відмови в обслуговуванні (DoS attacks), які мають за мету паралізувати роботу PLC через перевантаження комунікаційного каналу або процесора, атаки повторного використання даних (Replay attacks), які повторюють раніше захоплені сигнали, змушуючи PLC виконувати небажані дії, маніпуляції через впровадження фальшивих даних (False data injection attacks), які вводять хибні дані до системи для введення оператора чи алгоритмів в оману. Відомими також є декілька схожих атак: атаки з нульовою динамікою (Zero dynamic attacks), які маніпулюють сигналами так, щоб зміни не впливали на видимі стани системи, приховані атаки (Covert attacks), які залишаються непомітними для системи моніторингу, непомітні атаки (Stealthy attacks), які впроваджують зміни, що не викликають сигналів тривоги у системах моніторингу [1–6].

Рівень загрози таких атак значною мірою залежить від наявності сучасних систем виявлення кібератак у промислових автоматизованих

системах. Нині доступний широкий спектр методів і систем для виявлення атак, які постійно вдосконалюються. Вони варіюються від традиційних підходів діагностики несправностей у програмному забезпеченні до сучасних методів, що ґрунтуються на аналізі поведінкових характеристик, штучному інтелекті, методах обробки даних, що здатні підтримувати швидке реагування на аномалії.

У низці досліджень [7–11] було проаналізовано традиційні підходи до діагностики несправностей, такі як байєсове виявлення з бінарною гіпотезою (Bayesian detection with binary hypothesis), метод зважених найменших квадратів (Weighted least squares), χ^2 -детектори на основі фільтрів Калмана (χ^2 -detector based on Kalman filters), а також техніки виявлення та ізоляції несправностей (Fault Detection and Isolation techniques).

Розвиток методів виявлення атак сприяє підвищенню рівня кіберзахисту. Водночас посилюється потреба вивчати нові та вже відомі кібератаки, які можна використовувати як інструмент для тестування ефективності систем захисту. Зокрема, значний інтерес для наукових досліджень становлять атаки з нульовою динамікою (Zero dynamic attacks), приховані атаки (Covert attacks), непомітні атаки (Stealthy attacks) та інші види, здатні обходити традиційні детектори діагностики.

Постановка задачі

Метою роботи є розроблення і дослідження параметрів непомітної атаки (Stealthy attack) на систему керування об'єкта критичної інфраструктури як інструмента тестування систем кіберзахисту, яка обходить стандартний детектор діагностики несправностей.

Модель атаки на систему керування

Розглянемо модель динамічної системи:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (3)$$

де $x(t)$ — n -вимірний вектор стану фізичної системи; $y(t)$ — l -вимірний вектор вимірювань датчиків вимірювальної системи; A , B та C — відомі матриці коефіцієнтів відповідної розмірності; $u(t)$ — k -вимірний вектор керування

процесом. Співвідношення (1), (2) є моделлю системи, а (3) — модель вимірювальної системи.

Розглянемо задачу оптимального керування станом $x(t)$ лінійної системи (1), (2) за законом керування із зворотним від'ємним зв'язком і квадратичним критерієм якості [12–14]:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt, \quad (4)$$

де Q та R — відомі вагові матриці.

Кінцеві співвідношення оптимального керування системою (1), (2) мають вигляд [14]

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad K(t) = R^{-1}B^T P(t), \quad (5)$$

де матриця $P(t)$ є рішенням нелінійного рівняння Ріккати:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} = & -P(t)A^T - AP(t) + \\ & + P(t)BR^{-1}(t)B^T P(t) - Q, \end{aligned} \quad (6)$$

$$P(t_k) = P_k. \quad (7)$$

Задачі оптимального керування добре проєктуються на проблеми ICS, SCADA, DCS та PLC об'єктів критичної інфраструктури.

Розглянемо кібератаку, спрямовану на автоматичну систему оптимального керування об'єктом критичної інфраструктури (1), (2), (5), (6). Основною метою такої атаки є порушення нормального функціонування системи через спотворення сигналу керування, який є ключовим елементом у процесі прийняття рішень та управління. У цьому аналізі розглянемо сценарій, де злоумисник здатний лише адитивно модифікувати компоненти сигналу керування (рис. 1).

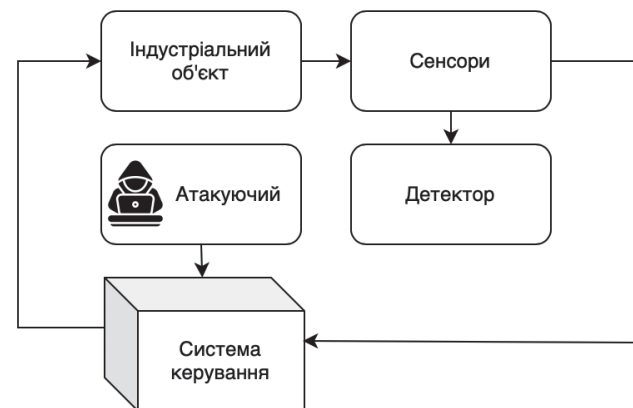


Рис. 1. Атака на керування автоматизованої системи керування

Особливістю досліджуваного випадку є наявність у системі детектора несправностей, який має функцію виявлення аномалій чи втручань у роботу системи. Утім, умовою успішної атаки є її непомітність для цього детектора. Інакше кажучи, зломисник здійснює атаку класу «непомітних атак» (Stealthy attacks), які спеціально розроблені для уникнення виявлення.

Таким чином, реалізація подібної кібератаки спрямована на порушення цілісності інформації, яка циркулює та обробляється у системі. Це створює загрозу для стабільності й безпеки об'єкта критичної інфраструктури, адже порушення інформаційних процесів може призвести до некоректного функціонування всього комплексу автоматизованого керування.

Для реалізації атаки зломисник ретельно аналізує систему захисту інформації, що включає збирання даних про архітектуру і структуру автоматичної системи керування, вивчення принципів її роботи, а також отримання доступу до ключових елементів, таких як програмні коди, логіка алгоритмів керування PLC та детектор несправностей. Особливу увагу зломисник приділяє вивченню методів виявлення несправностей, застосовуваних у системі, щоб обійти їх або залишитися непомітним.

Сформульоване вище дозволяє визначити модель атаки на автоматизовану систему оптимального керування у такому вигляді:

$$a(t) = [\tilde{u}(t)] = h(F, u(t)), \quad (8)$$

де $a(t)$ – вектор атаки; $\tilde{u}(t)$ – спотворене керування, яке перебуває під впливом шкідливих даних; F – показник знань атакуючого щодо об'єкта атаки. Модель керування, яке атаковано, можна записати таким співвідношенням:

$$\tilde{u}(t) = u(t) + u_a(t), \quad (9)$$

де $u_a(t) \in U_{don}$ – параметр непомітної атаки (Stealthy attacks), шкідливі дані, додані до керування системи.

Як було зазначено вище, автоматична система оптимального керування оснащена детектором несправностей (рис. 1), розробленим із застосуванням методу зважених найменших квадратів (Weighted Least Squares) [7–11]:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} [Cx(t) - y(t)]^T S^{-1} [Cx(t) - y(t)] dt, \quad (10)$$

де $y(t)$ – вимірювання процесу, здійснюване детектором несправностей; S – відомий ваговий коефіцієнт.

Такий метод детектування забезпечує точне оцінювання параметрів і високий рівень чутливості до аномалій у роботі системи. Утім, зломисник може використати знання про цей метод для формування атак, які мінімізують ризик виявлення. У такій ситуації безпека системи залежить від ступеня захищеності її архітектури, надійності алгоритмів ідентифікації несправностей, а також від здатності швидко адаптуватися до потенційних загроз.

Пошук шкідливого впливу $u_a(t)$ непомітної атаки (Stealthy attacks), що мінімізують показник детектора несправностей $J(u_a)$

Перепишемо співвідношення детектора несправностей (5) у вигляді

$$J(u_a) = \int_{t_0}^{t_k} [C\tilde{x}(t) - y(t)]^T S^{-1} [C\tilde{x}(t) - y(t)] dt \rightarrow \min_{u_a \in U_{don}}, \quad (11)$$

де $\tilde{x}(t)$ – спотворений стан, який перебуває під впливом шкідливого керування u_a , доданого до керування системи $u(t)$. При цьому лінійну систему (1), (5), яка перебуває під впливом кібератаки (6), (7), (9), запишемо таким чином:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t) + B[-K(t)\tilde{x}(t) + u_a(t)], \quad (12)$$

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad (13)$$

де $K(t)$ визначають співвідношенням (5).

Таким чином, маємо задачу пошуку шкідливого керування $u_a(t) \in U_{don}$ непомітної атаки (Stealthy attacks) на систему (12), (13), яке мінімізує значення й обходить детектор діагностики несправностей (11).

Розв'яжемо задачу пошуку екстремуму функціонала (11) з обмеженнями (12), (13) методом Лагранжа [14]. Щоб врахувати обмеження, використаємо множник Лагранжа $\lambda(t)$, який є вектором того ж розміру, що й $\tilde{x}(t)$, а обмеження на $u_a(t) \in U_{don}$ врахуємо на завершальній стадії алгоритму.

Сформуємо допоміжний функціонал Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}(t), u_a, \lambda) = & \int_{t_0}^{t_k} \left\{ [C\tilde{x}(t) - y(t)]^T S^{-1} [C\tilde{x}(t) - y(t)] + \right. \\ & \left. + \lambda^T(t) \left[A\tilde{x}(t) - B[-K(t)\tilde{x}(t) + u_a(t)] - \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \right] \right\} dt. \quad (14) \end{aligned}$$

Виходячи з варіаційного принципу, за умови $\delta L / \delta \tilde{x} = 0$, отримаємо спряжене рівняння:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -(A^T - K^T B^T)\lambda(t) - 2C^T S^{-1}[C\tilde{x}(t) - y(t)], \quad (15)$$

$$\lambda(t_k) = 0. \quad (16)$$

Необхідні умови оптимальності відносно невідомого параметра $u_a(t) \in U_{don}$ мають вигляд

$$\delta L(u_a) \frac{dL}{du_a} = \delta u_a = 0 \forall u_a(t) \in U_{don}. \quad (17)$$

Умову (17) для $u_a \notin U_{don}$ доповнимо:

$$\frac{dL}{du_a} = 0 \forall u_a(t) \in U_{don}. \quad (18)$$

Варіюючи функціонал (14), можна показати, що

$$\frac{dL}{du_a} = \int_{t_0}^{t_k} K^T \lambda(t). \quad (19)$$

Шкідливе керування $u_a(t)$, яке мінімізує показник детектора несправностей $J(u_a)$, будемо шукати з використанням градієнтного методу найшвидшого спуску:

$$u_a^{i+1} = Pr \left\{ u_a^i - \alpha \frac{dL^i}{du_a} \right\}, \quad (20)$$

де $Pr\{\cdot\}$ — проєкція рішення $u_a^{i+1}(t)$ на область $u_a(t) \in U_{don}$; i — номер, а α — відомий крок градієнтного циклу; u_a^0 також відомо.

Пошук невідомої змінної u_a на основі градієнтної процедури (20) закінчується за умови виконання критерію

$$|J^i - J^{i+1}| / J^i \leq \varepsilon, \quad (21)$$

де ε — відома похибка.

Алгоритм пошуку шкідливого керування, що мінімізує показник детектора несправностей

Об'єднуючи співвідношення (12), (13), (15)–(16) із (17)–(21), сформулюємо алгоритм пошуку шкідливого керування u_a , що мінімізує показник детектора несправностей $J(u_a)$:

1. Для $i = 0$, де i — номер кроку градієнтного циклу, надаємо стартове значення u_a^0 та значення кроку градієнтної процедури α .

2. Для кроку $i + 1$ за співвідношеннями (17)–(19) розраховуємо dL / du_a , де множник Лагранжа $\lambda(t)$ та спотворена оцінка стану $\tilde{x}(t)$, яка перебуває під впливом шкідливого керування u_a , визначені, відповідно, співвідношеннями (15), (16) та (12), (13).

3. Використовуючи (20), визначаємо $u_a^{i+1}(t)$.

4. Розраховуємо (11) і перевіряємо (21). Якщо умова виконується, то завершуємо алгоритм, інакше переходимо до п. 2.

3 метою аналізу працездатності розроблених методу та алгоритму визначення параметрів кібератаки на автоматизовану систему об'єкта критичної інфраструктури розглянемо приклад.

Аналіз результатів обчислювального експерименту

Наведемо результати обчислювального експерименту з дослідження розроблених вище методу та алгоритму. Розглянемо технічну систему, яку описують співвідношеннями (1), (2). Треба розв'язати задачу пошуку параметрів непомітної атаки (Stealthy attacks) на систему керування, яка обходить стандартний детектор діагностики несправностей. Для розв'язання задачі використано алгоритм, наведений вище, співвідношення (8)–(21) та вихідні дані, наведені у табл. 1.

Функція Ріккати, а також вектор-стовпець вимірювань $y(t)$ розраховано окремо, поза градієнтною процедурою пошуку.

Результати експерименту показано на рис. 2 та 3. На рис. 2 подано критерій якості $J(u_a)$, який зменшується і з кожним кроком процедури наближається до нуля. Поведінку шкідливих даних, доданих до керування u_a під час градієнтної процедури, які зловмисник визначає і вводить так, щоб мінімізувати критерій детектора та зробити його дії непомітними для системи моніторингу, зображено на рис. 3.

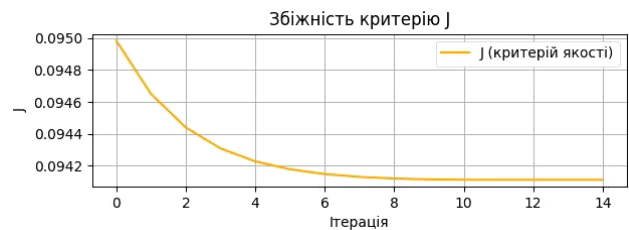


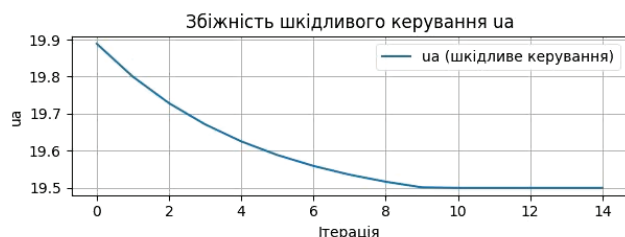
Рис. 2. Збіжність критерію J у процесі ітераційної процедури

Аналізуючи результати обчислювального експерименту можна побачити, що ітераційна градієнтна процедура пошуку шкідливих даних,

Таблиця 1. Вихідні дані обчислювального експерименту пошуку параметрів кібератаки на систему керування

Параметр	Позначення	Значення
Розмірність матриць	A, C, K, P, Q, R, S	2×2
Розмірність векторів-стовпців	$x(t), \tilde{x}(t), \lambda(t), y(t), u_a(t)$	2×1
Матриця коефіцієнтів моделі	A	0; 1; -6; -5
Матриця керування	B	0; 1; 0; 0
Матриця вимірювань	C	1; 0; 0; 1
Вагові матриці критерію системи оптимального керування	Q	1; 0; 0; 1
	R	1; 0; 0; 1
Вагова матриця фільтра й детектора несправностей	S	1; 0; 0; 1
Початкові умови моделі	$x(0)$	0; 1
Кінцеві умови спряженого рівняння	$\lambda(t_k)$	0; 0
Період дослідження і крок дискретизації у часі	$t_0, t_k, \Delta t$	0; 6; 0,01
Розмір і кількість кроків градієнтної процедури	α, N	15,0; 15
Стартове значення параметра пошуку	u_a^0	20,0
Мінімальне допустиме значення шкідливого керування	$u_{a \min}$	19,5

доданих до керування збігається до рішення u_a . Останнє надає можливість робити висновок про працездатність запропонованого методу та алгоритму.

Рис. 3. Збіжність спотворених даних керування u_a

Висновки

Розглянуто кібератаку із класу непомітних атак (Stealthy attacks), спрямовану на модифікацію керуючих сигналів системи керування

об'єктами критичної інфраструктури, яка здатна обходити стандартні детектори несправностей. Запропоновано новий метод і відповідний алгоритм пошуку шкідливих спотворень керування з використанням варіаційного методу оптимізації та градієнтного методу найшвидшого спуску.

Проведено обчислювальний експеримент, отримано й проаналізовано кількісні характеристики алгоритму. Аналіз результатів підтвердив працездатність розроблених методу та алгоритму.

Отримані у роботі розв'язки можуть бути застосовані під час планування тестів на проникнення для аналізу безпеки автоматизованих систем контролю об'єктів критичної інфраструктури індустріального типу.

Перспективою наступних досліджень є поширення підходу на основі варіаційних методів оптимізації на інші класи атак, зокрема на атаки, пов'язані із введенням затримок, що належать до класу «відмова в обслуговуванні».

References

- [1] Y. Hu *et al.*, "Detecting stealthy attacks against industrial control systems based on residual skewness analysis", *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2019, no. 74, pp. 1–14. DOI: 10.1186/s13638-019-1389-1
- [2] Y. Wang *et al.*, "Cyber-physical systems in industrial process control", *ACM Sigbed Review*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 1–2. DOI: 10.1145/1366283.1366295
- [3] A.M. Mohan *et al.*, "A Comprehensive Review of the Cyber-Attacks and Cyber-Security on Load Frequency Control of Power Systems", *MDPI Energies*, 2020, vol. 13, no. 3860, pp. 1–33. <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/15/3860>
- [4] H.S. Sánchez *et al.*, "Bibliographical review on cyber attacks from a control oriented perspective", *Annual Reviews in Control*, 2019, vol. 48, pp. 103–128. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2019.08.002
- [5] O. Novikov *et al.*, "Cyber Attacks Simulation for Modern Energy Facilities", *CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the XXIII International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Security"*, 2023, vol. 3887, pp. 35–49. <https://ceur-ws.org/Vol-3887/>
- [6] L. Alekseichuk *et al.*, "Cyber Security Logical and Probabilistic Model of a Critical Infrastructure Facility in the Electric Energy Industry", *Theoretical and Applied Cybersecurity*, 2023, vol. 5, no. 1, pp. 61–66. DOI: 10.20535/tacs.2664-29132023.1.287365

- [7] M. Syfert *et al.*, “Integrated Approach to Diagnostics of Failures and Cyber-Attacks in Industrial Control Systems”, *MDPI Energies*, 2022, vol. 15, no. 17, pp. 1–24. DOI: 10.3390/en15176212
- [8] A.A. Cardenas *et al.*, “Challenges for Securing Cyber Physical Systems”, *DHS*, 23 лип. 2009. <https://ptolemy.berkeley.edu/projects/chess/pubs/601.html>
- [9] Y. Mo and B. Sinopoli, “Secure Control Against Replay Attacks”, *47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, 2009, 30 верес. — 2 жовт. *IEEE Xplore*, pp. 911–918. DOI: 10.1109/Allerton16076.2009
- [10] A. Cooper *et al.*, “Anomaly Detection in Power System State Estimation: Review and New Directions”, *MDPI Energies*, 2023, vol. 16, no. 18, pp. 1–15. <https://www.mdpi.com/1996-1073/16/18/6678>
- [11] A. Szyber-Betley *et al.*, “Controller Cyber-Attack Detection and Isolation”, *MDPI Sensors*, 2023, vol. 23, no. 5, pp. 1–27. DOI: 10.3390/s23052778
- [12] D.E. Kirk *et al.*, “Optimal Control Theory”, An Introduction, Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2004, 443 с. https://books.google.com.ua/books?id=fCh2SAtWIdwC&printsec=copyright&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- [13] Ray W. Harmon, “Advanced Process Control”, New York: McGraw-Hill Book Company, 1981, 376 с. https://books.google.com.ua/books/about/Advanced_Process_Control.html?id=-7tTAAAMAAJ&redir_esc=y
- [14] A.P. Sage and C.C. White, III. “Optimum Systems Control”, New Jersey: Prentice-Hall, 1977, 413 с. <https://www.semanticscholar.org/paper/Optimum-systems-control%3A-by-A.-P.-Sage-and-C.-C.-Eslami/83d44a3e6cd41f834a99209a671a248dfef12634#citing-papers>

Oleksii Novikov, Mykola Ilin, Iryna Stopochkina, Mykola Ovcharuk

DETERMINATION OF PARAMETERS OF STEALTHY CYBER ATTACKS ON CONTROL SYSTEMS OF CRITICAL INFRASTRUCTURE OBJECTS

Background. Integrating industrial control systems with modern network technologies has significantly increased cyber attacks targeting critical infrastructure. Detection and mitigation methods for such attacks remain underdeveloped, necessitating the advancement of mathematical frameworks capable of identifying attack parameters in such systems.

Objective. The purpose of the paper is to develop and investigate the parameters of a stealthy attack on a critical infrastructure control system. The attack serves as a testing tool for cybersecurity systems by evading standard fault detection mechanisms.

Methods. The industrial control system model is represented as a differential equation. Parameters of an additive attack on the control system are introduced. A fault detection criterion is defined. The problem of determining attack parameters is addressed using optimal state control methods, employing the Lagrange functional and the gradient descent method.

Results. A new method and corresponding algorithm for identifying malicious control distortions using variational optimization and the fast gradient descent method are proposed. A computational experiment confirms the effectiveness of the proposed algorithm.

Conclusions. The paper examines a stealthy attack capable of bypassing standard fault detectors aimed at modifying control signals in critical infrastructure management systems. The proposed method and algorithm can be utilized in penetration testing to assess the security of automated control systems in industrial critical infrastructure. The algorithm's functionality has been validated through computational experiments.

Keywords: control theory; cybersecurity; stealthy attacks; parameter identification.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового фізико-технічного інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
30 грудня 2024 року

Прийнята до публікації
10 лютого 2025 року

АВТОРИ НОМЕРА

Бойко Олег Анатолійович
ORCID: 0009-0002-3424-8234

Вербицька Тетяна Іванівна
ORCID: 0009-0008-4352-7992

Ільїн Микола Іванович
ORCID: 0000-0002-1065-6500

Левчук Леонід Сергійович
ORCID: 0009-0007-8086-5758

Легеза Віктор Петрович
ORCID: 0000-0003-0403-6142

Макогон Юрій Миколайович
ORCID: 0000-0002-1508-0686

Неділько Андрій Володимирович
ORCID: 0000-0002-4030-2332

Новаківський Євген Валерійович
ORCID: 0000-0001-5988-3352

Новіков Олексій Миколайович
ORCID: 0000-0001-5988-3352

Овчарук Микола Васильович
ORCID: 0009-0000-5791-3925

Романов Андрій Юрійович
ORCID: 0000-0002-1714-3310

Романюк Вадим Васильович
ORCID: 0000-0001-9638-9572

Стьопочкіна Ірина Валеріївна
ORCID: 0000-0002-0346-0390

Шкарбань Руслан Анатолійович
ORCID: 0000-0003-4754-9693