

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

UDC: 519.6:519.8:536.7

В.С. Волошин<sup>1\*</sup>, <https://orcid.org/0009-0005-6809-6779>

І.А. Ткаленко<sup>2</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-5799-6473>

<sup>1</sup>ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»,  
Дніпро, Україна, <https://ror.org/00e7n9517>

<sup>2</sup>Компанія AMCOM Engineering s., r., o., Prague, Czech Republic

\*Corresponding autor: vsvlshn52@gmail.com

## МЕТОД АНАЛІЗУ ПОЛІКОМПОНЕНТНИХ СКЛАДНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ БАГАТОВИМІРНИХ МАТРИЦЬ СУМІЖНОСТІ ТА ЕНТРОПІЙНИХ ВІДНОШЕНЬ МІЖ КОМПОНЕНТАМИ СИСТЕМИ

**Проблематика.** Відомі методи аналізу полікомпонентних складних систем не завжди ефективно враховують відносну несумісність властивостей системи з конфігураційним, термодинамічним та іншим змістом системи. Невирішеною залишається задача системного аналізу полікомпонентних динамічних складних систем з позиції їх енергетичного і термодинамічного вмісту.

**Мета дослідження.** Розробити метод аналізу полікомпонентних складних систем за їх функціональними, структурними, фізико-хімічними та іншими властивостями на основі термодинамічних та інформаційних характеристик такої системи.

**Методика реалізації.** Запропоновано метод аналізу складних динамічних, нелінійних та енерговмісних адаптивних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно індукованих під конкретну систему матриць суміжності.

**Результати дослідження.** Запропоновано метод аналізу складних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно структурованих під конкретну систему матриць суміжності, змістовна частина яких відповідає опису складної полікомпонентної системи завдяки показникам інтегральної ентропії. Першою суттєвою особливістю моделі, що розроблена на основі методу, є розділення інтегральної ентропії системи на окремі складові у вигляді конфігураційної, структурної, фізико-хімічної, інформаційної та інших видів ентропії відповідно до властивостей системи. Друга суттєва відмінність моделі пов'язана з її багатоплановою природою у межах матриці суміжності. Така модель, на відміну від наявних, дає можливість системно вивчати властивості та здатності систем відповідати наперед заданим дослідницьким вимогам. Придатність використання і перспективи методу доведені впровадженням результатів роботи в матеріалознавстві, екології, медицині.

**Висновки.** Розроблено якісно новий метод дослідження полікомпонентних складних систем за допомогою багатовимірної матриці суміжності, з урахуванням ентропійних відношень між вихідними компонентами, яка описує зв'язки між властивостями системи через її загальну нелінійну ентропію.

**Ключові слова:** складна система; динамічність; полікомпонентність; ентропія; ентропійна структурованість; матриця суміжності; мультишарова мережа взаємодій.

### Вступ

Багатокомпонентні складні динамічні, адаптаційні й подібні системи належать до найбільш різноманітних сфер людської діяльності – від технологічних процесів, пов'язаних з переробкою

сировини за допомогою технічних систем, до соціальних та економічних відношень між групами людей і їх функціональністю [1]. Дослідження таких систем є однією з найскладніших математичних задач. Вони вирізняються особливими структурами, перебувають у багатовимірному інформаційному полі, потребують широкого спек-

**Пропозиція для цитування цієї статті:** В.С. Волошин, І.А. Ткаленко, «Метод аналізу полікомпонентних складних систем на основі багатовимірних матриць суміжності та ентропійних відношень між компонентами системи», *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 32–41, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

**Offer a citation for this article:** V.S. Voloshyn, I.A. Tkachenko, “A method for analyzing multicomponent complex systems based on multidimensional matrices of adjacency and entropy relations between system components”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 32–41, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.350050>

© Автор(и).

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

тру енергетичного впливу і мають непередбачувані результати, які важко прогнозувати відомими екстраполяційними та іншими формалізованими методами. Відомі методи аналізу таких систем [2, 3, 4, 5, 6] мають певні недоліки, які будуть розглянуті у цій роботі. Невирішеними залишаються задачі сталого практично-формалізованого дослідження розвитку складних систем за допомогою математично адаптованого і природно прозорого, за показниками, всебічного аналізу.

### Постановка задачі

Методи аналізу складних систем за їх динамічними, нелінійними, енергетичними адаптивними класами, розглянутими в науковій літературі, потребують уточнення за допомогою узагальнених термодинамічно-інформаційних показників, відповідальних за енергію і динаміку систем. Отже, метою дослідження є створення альтернативного методу максимально суцільного аналізу певних класів полікомпонентних складних систем за їх функціональністю, структурованістю і природними властивостями на основі їх термодинамічних та інформаційних показників.

### Методи дослідження

Запропоновано метод аналізу складних систем за допомогою багатовимірних ентропійно структурованих матриць суміжності як похідної моделі для опису їх полікомпонентності. Тут матриця суміжності стає багатовимірною залежно від кількості поєднань груп компонентів у системі, і кожний елемент матриці описує багатосторонній зв'язок.

Такий підхід розширює традиційну інтерпретацію ентропії, актуалізуючи її не лише як міру термодинамічного безладу, а також як кількісний індикатор багатозначності станів і нелінійності міжкомпонентних взаємодій у структуровано-складних системах, що можна відзначити як актуальне завдання для таких методів аналізу. Така постановка питання є особливо релевантною для моделювання систем, що характеризуються високою топологічною і фізико-хімічною зв'язністю, інформаційними відношеннями, де поведінка цілого визначається не парними, а багатовимірними і незіставними кореляціями між компонентами.

У науковому аналізі складних систем застосовують формалізовані підходи, притаманні термодинаміці, статистичній фізиці, теорії графів та інформаційній теорії, зокрема ентропійні

поняття [4, 6]. Утім, ключовий акцент у запропонованій методиці зміщений у бік архітектури взаємного розміщення елементів, характеру та динаміки їхніх термодинамічно опосередкованих зв'язків, а також на наслідкову організацію всієї полікомпонентної мережевої структури.

Основні постулати методології – це ідеї інформаційної ентропії [7, 8], принцип міні-максної ентропії та зв'язок із класичною статистичною механікою [9], підхід до структурно залежних (наприклад, гранулярних, пористих, впорядкованих під конкретне завдання) систем [10], і формалізація мультишарових мереж, щоб показати різномірні типи взаємодії [11].

Структурно модель являє собою тензор суміжності з певними атрибутами (рис. 1), що належать до полікомпонентної складної системи. Позначимо множину базових компонентів як  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ . Визначимо тензор суміжності порядку  $k$  (для багатовимірної вихідної матриці суміжності) як

$$\mathcal{A}^{(k)} = \{\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}\} \quad (1)$$

де кожний елемент  $\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$  – булево-ваговий показник наявності комбінації у системі (чи її інтенсивності). Модель задумана такою, що здатна до розширення залежно від типу і властивостей системи.

Базовим обчислювальним ядром моделі є саме багатовимірна матриця суміжності розміру  $P \times Q \times R \times T \dots$ . Кількість вимірів матриці відповідає кількості функціональних або інших поєднань груп компонентів у системі, тоді як кожний матричний елемент є ентропійно структурованим функціоналом  $\mathcal{S}_{(p,q,r,t,\dots)total}$ , що враховує вклад множинних форм взаємодій  $\mathcal{S}_{(p,q,r,t,\dots)i}$ . Кожному ненульовому елементу матриці відповідає вектор атрибутів термодинамічно-інформаційного характеру

$$\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_k}^{(k)} = (\mathcal{S}_{total}, \Delta\mathcal{S}, \{x_i\}, \sigma, \Xi, \dots), \quad (2)$$

де у базовому наборі  $\mathcal{S}_{total}$  – інтегральна (сумарна) ентропія системи, Дж/К або відн. од.;  $\Delta\mathcal{S}$  – зміна ентропії під час переходу від окремих компонентів до загальної системи;  $\{x_i\}$  – вектор масових показників компонентів у системі;  $F$  – відповідна вільна енергія (наприклад, енергія Гіббса або інша вільна енергія  $A$ , що належить до системи);  $\sigma$  – швидкість вироблення ентропії (entropy production rate), якщо система не перебуває у стані рівноваги;  $\Xi$  – компактність (compactivity) або інші параметри гранулярної статистики.

Для опису локальної моделі ентропії відносно елемента багатовимірної матриці суміжності ( $S_{total}$ ) для довільної комбінації компонентів ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) вводимо адитивний (суперпозиційний) параметр інтегральної ентропії елемента у вигляді екстенсивної форми:

$$S_{total} = \sum (x_i \cdot S_i^{comp}) + \Delta S_{mix} + S_{surf} + S_{conf} + S_{chem} + S_{proc} + \dots \quad (3)$$

Розглянемо кожен з адитивних складових інтегральної ентропії формули (3), яку інтерпретують особливим чином і яка може бути задана чисельно і послідовно.

1. **Термодинамічна (компонентна) складова**  $\sum [x_i \cdot S_i^{comp}(T, p)]$  як звичайна масово-питома сума розрахункових питомих ентропій компонентів системи за зовнішніх вихідних умов, наприклад температура  $S_i^0$ , тиск  $S_i^0(T)$ , табличні значення стандартних або функції для окремого компонента [12]. Це сума окремих ентропій чистих компонентів на одиницю маси, об'єму або на моль, помножена на частку компонента.

2. **Складова ентропії змішування (ідеальна й надлишкова)** розкладається як

$$\Delta S_{mix} = -R \sum (x_i \cdot \ln x_i) + S_{ex}, \quad (4)$$

де перший доданок – ідеальна (ментально-інформаційна) частина ентропії;  $R$  – опосередкована універсальна стала як масштабний коефіцієнт ентропії (множник формальної одиниці ентропії);  $S_{ex}$  – надлишкова ентропія (включає асиметрію системи, неспіврозмірність окремих компонентів, її окремих частин, а також несправжню ідеальність, якщо такі наявні в системі), яку можна модельно виразити через активності або через розширені міх-моделі (Regular solution, Margules тощо). Перший член у формулі (4) узгоджується з інформаційним визначенням ентропії для дискретних композицій [7]. Навіть якщо компоненти не реагують, а просто об'єднуються, ентропія збільшується. Це додає додаткову ентропійну частину  $S_{ex}$  у надмірну ентропію.

3. У полікомпонентних складних системах є багато інтерфейсів (поверхонь поділу, де змінюються властивості) між різними фазами та окремими компонентами. Термодинамічним показником тут є **поверхнева** або **інтерфейсна складова**  $S_{surf}$  у моделі, її можна виразити як

$$S_{surf} \approx A_{sp} \cdot s_{surf}(T, \theta, \omega), \quad (5)$$

де  $A_{sp}$  – умовна питома поверхня для розвинутої складної системи (наприклад,  $m^2 \cdot kg^{-1}$ ),

$S_{surf} = -(\partial \gamma / \partial E)_{p, \mu}$  – поверхнева питома ентропія на одиницю розвинутої площі (якщо така потрібна у системі), залежна від поверхневих, зовнішніх явищ системи, її відношень із надсистемою. Її можна уявити як енергію, накопичену на поверхні системи у напрямку надсистеми, що може вказувати на взаємний обмін енергією та ентропією згідно з теорією нерівноважних систем Пригожина ( $\gamma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $T$  – температура;  $\mu$  – хімічний потенціал).

4. **Конфігураційна ентропія**  $S_{conf}$  – одна із надважливих складових у моделі, вона вказує на статистичний внесок в ентропію, що відображає щільність компонентної організованості (складових, частин, окремих груп компонентів), її структурність, впорядкованість, фізичну сутність (пористість, фракційність, ...) або аналогічні показники, притаманні конкретній системі. У виразі (3) йдеться про просторове розміщення, геометрію, яка показує, наскільки впорядковані компоненти в системі, її структурну однорідність та обсяг упаковки. Наприклад, кристал має низьку ентропію, аморфний стан речовини – ентропію вищу, рідина, газ – ще вищу. За рахунок  $S_{conf}$  модель показує, наскільки добре все конфігураційно впорядковано, скомпоновано або, навпаки, стратифіковано. Уніфікована формула конфігураційної ентропії має вигляд

$$S_{conf} = k^* \cdot \ln \Omega(\mathcal{E}, \{\xi_i\}), \quad (6)$$

де  $\Omega(\mathcal{E}, \{\xi_i\})$  – кількість доступних макросумісних конфігурацій системи, що задовольняють глобальні макроскопічні обмеження  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m\}$ , наприклад густина пакування, об'єм, енергія, імпульс, компактність, тиск, кількість частинок, структура графа, розподіл компонентів тощо (залежно від потреб системи);  $\{\xi_i\}$  = {типи контактів, матриця суміжності, поля взаємодій, термодинамічні потенціали, закони симетрії};  $k^*$  – універсальна стала ентропійної шкали, для термічних систем  $k^* = k_B$ , для аперіодичних гранулярних систем за Едвардсом  $k^* = k_E$  (стала Едвардса [10] – аналог сталої Больцмана для нерівноважних систем), для інформаційних або дискретних систем  $k^* = 1$  (ентропія у «натах») або  $k^* = \log_e$  (бітова шкала).

Отже,  $\Omega$  – це міра простору конфігурацій, яку визначають типом і структурою системи (гранули, частинки, домени, кластери, вузли графа тощо).

5. **Хімічна складова**  $S_{chem}$  відображає ентропійні зміни, пов'язані з деякими хімічними

перетвореннями, наприклад, під час хімічних реакцій окислювання – відновлювання, дисоціацій, розкладання, утворення нових сполук, корозії, збудженні системи, її нагрівання, спікання, за інших видів енергетичного впливу:

$$S_{chem} = \sum \xi_r \cdot \Delta S_r^0(T) + S_{rxn,neg}, \quad (7)$$

де  $\xi_r$  – чинник ступеня реалізації реакції  $r$ ;  $\Delta S_r^0$  – стандартна ентропійна зміна реакції; додатково можливі нестрогі кінетичні внески ( $S_{rxn,neg}$ ) для нерівноважних переходів. У фізичній хімії, наприклад, це дозволяє врахувати деградацію органіки, окисдування або відновлення металів, утворення нових фаз тощо [12].

6. *Процесна складова*  $S_{proc}$  інтегральної ентропії – зазвичай це процесні та кінетичні ентропійні внески, пов'язані із нестационарними ефектами (у технічних системах – пресування, температурні градієнти), що логічно пов'язати зі швидкістю породження ентропії:

$$S_{proc} = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\sigma}(t) dt, \quad (8)$$

де  $\dot{\sigma}(t)$  – локальна швидкість вироблення ентропії (отримують з лінійних відношень Л. Онсагера за малих відхилень від рівноваги або з рівняння Пригожина для нерівноважних термодинамічних систем). Для технологічного процесу цей член часто домінує під час термічних і механічних впливів на систему, зокрема спікання, пресування [12]. В цілому це ентропія динаміки процесів у системі.

Такі дані, як властивості великої кількості досліджених складних систем, систематизуємо у вигляді параметричного ряду в табл. 1.

Методологічно важливим є такий висновок: абсолютне значення сумарної ентропії  $S_{(p,q,r,t,\dots)total}$  у загальній багатовимірній моделі, що описана виразами (1)–(8), не можна розглядати як одноосібний критерій упорядкованості системи. Інтерпретація стану системи має ґрунтуватися на аналізі спектру ентропійних внесків  $S_{(p,q,r,t,\dots)i}$  та їх домінуючих трендів. Наприклад, зростання  $S_{chem}$  за одночасним зменшенням  $S_{conf}$  може відповідати процесам самоорганізації або формуванню впорядкованих фаз у системі, тому аналітич-

Таблиця 1. Ентропійні складові та їх структурно-термодинамічний зміст

Позначення	Складова	Зміст і фізичне походження	Основні змінні домінування	Можливий напрямок впливу на порядок
$S_{comp}$	Ентропія чистого компонента	Термодинамічна ентропія окремої речовини з урахуванням фазових переходів	Частка компоненти $x_1, x_2, \dots$ ; температура; мольний/масовий базис	Низьке/стале значення → упорядкованість властивостей, але не структури
$\Delta S_{mix}$	Ентропія змішування	Ідеальна та надлишкова складова від міжкомпонентної взаємодії	Кількість компонентів, параметри взаємодії, неідеальність	Зростання може означати як безлад, так і самоорганізовані кореляції
$S_{surf}$	Поверхнева (міжфазна) ентропія	Стани атомів, молекул на інтерфейсах фаз, межах поділу, порах, суспензіях тощо	Питома площа поверхні, пористість, енергія інтерфейсів	Зменшення під час руйнування меж, можлива деградація порядку
$S_{conf}$	Конфігураційна ентропія	Просторове розміщення структурних блоків, фазова однорідність/стратифікація	Тип структури (кристалічна/аморфна), густина пакування	Падіння під час хімічної самозбірки → зростання порядку
$S_{chem}$	Хімічна ентропія реакцій	Ентропійні ефекти реакцій: окиснення, корозія, розклад, утворення нових фаз	Хімічна активність, ступінь перетворень, дефекти реакцій	Зростання може супроводжувати зростання або падіння структурного порядку
$S_{proc}$	Процесна продукція ентропії	Нерівноважні градієнти: $T, \sigma, v, I$ , необоротні процеси	Швидкість нагрівання, механічна деформація, електричні потоки	Різке зростання → тимчасова або стала втрата порядку

на частина моделі спрямована на дослідження мінімакських функцій залежностей кожної ентропійної складової  $S_{(p,q,r,t,...)}$  ( $i \equiv comp, conf, mix, surf, chem, proc, \dots$ ) від інтегральної ентропії  $S_{(p,q,r,t,...)total}$ , що належить заданому елементу багатовимірної матриці суміжності на кожному її вимірі:

$$\min \max \left( \{S_{(p,q),i}, p, q \subseteq \mathcal{I}\}; \{S_{(p,q,r),i}, p, q, r \subseteq \mathcal{I}\}; \{S_{(p,q,r,t),i}, p, q, r, t \subseteq \mathcal{I}\}; \dots \right), \quad (4)$$

$$\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^{P \times Q \times R \times T \times \dots} \quad (5)$$

Вимір  $p, q, r, t, \dots \subseteq \mathcal{I}$  такої умови обирають, виходячи з логічного наповнення складної системи з полікомпонентною структурою і може мати максимальний ранг  $\mathcal{I}$ .

Якщо складна система має виміри глобальності, високої кількості компонентів, наприклад у кліматології, енергетиці чи геофізиці, методика може бути адаптована через додавання специфічних термодинамічних показників, зокрема  $S_{rad}$  – радіаційна ентропія для атмосферних і планетарних оболонок;  $S_{grav}$  – гравітаційні ентропійні зміни у системах стратифікації;  $S_{info}$  – шеннонівська ентропія для інформаційно складних або кіберфізичних систем та ін.

Схематичний вираз моделі (рис. 1) показує об'єкт і предмет дослідження у вигляді полікомпонентної шаруватої складної системи, вміст дослідження якої відображено у вигляді багатовимірної матриці суміжності, індукованої під адитивні показники інтегральної ентропії кожного елемента матриці. Така модель дозволяє аналітично визначати переваги складних систем залежно від їх компонентності, властивостей різного рівня і призначення.

Узагальнено саме характер зміни ентропії доцільно розглядати як індикатор стабільності та функціональної ефективності системи. Для цього визначимо локальну зміну ентропії елемента матриці відносно сумарного складу у вигляді

$$\Delta S_{cell} = S_{total} - \sum (x_i \cdot S_i^{comp}) \quad (11)$$

Величину (9) як похідну можна розбити на вже відомі внески:

$$\Delta S_{cell} = \Delta S_{mix} + \Delta S_{surf} + \Delta S_{conf} + \Delta S_{chem} + \Delta S_{proc} \quad (12)$$

Критерій «термодинамічної корисності» складної системи, наприклад схильності до утворення потрібних термооброблених фаз чи зниження втрат під час переробки, можна задати як функцію від  $\Delta S_{cell}$ , від  $F$  (вільної енергії певного виду) та від  $\sigma$ . Наприклад, мінімум вільної енер-

гії за допустимого (менш порогового)  $\sigma$  і позитивних  $S_{conf}$  може свідчити про бажану фазову стабільність системи.

Важлива суттєва відмінність розглядуваної моделі, пов'язана з її запрограмованою багатозаровою природою, з кореляціями між типами взаємодій у межах матриці суміжності. Подамо різні види взаємодій у системі (фізичні, хімічні, поверхневі, інформаційні, структурні тощо) як шари мультишарової мережі. Кожній матриці (тензору) задаємо свій індекс шару:

$$\ell \in \{phys, chem, surf, info, \dots\} \quad (13)$$

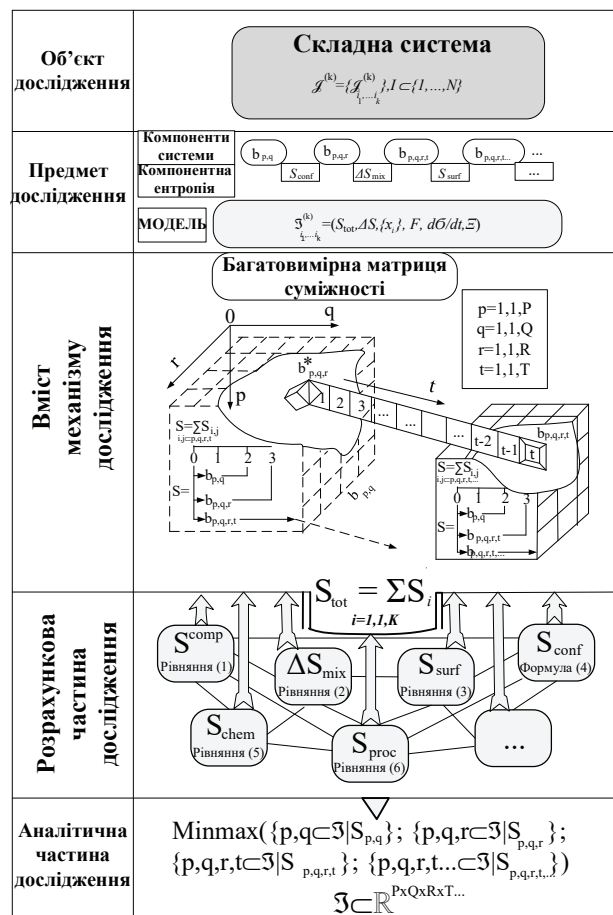


Рис. 1. Матрична модель полікомпонентної складної системи на основі ентропійно структурованої багатовимірної матриці суміжності

Формально мережеві зв'язки одного шару подамо як  $\ell: \mathcal{A}^\ell$ , а cross-шарові зв'язки (взаємозв'язок між впливом одного типу взаємодії на інший) задаємо тензором міжшарових зв'язків між двома індексами  $\mathcal{C}^{(\ell, \ell')}$ .

Мультишарова формалізація дозволяє виявляти, наприклад, наскільки поверхневі влас-

тивості (шар *surf*) впливають на хімічний розвиток фаз (шар *chem*), через cross-коваріації атрибутів вузлів матриці. Така формалізація сумісна із класичними оглядами мультишарових мереж [11].

Актуальним для запропонованої моделі є використання в ній інформаційно-термодинамічної метрики та ідентифікація зв'язків. Для кількісного оцінювання взаємного впливу компонентів і шарів слід використовувати інформаційні міри, зокрема:

– *Shannon*-ентропію для розподілів масових груп компонентів системи або для ймовірностного розподілу конфігурацій:

$$H(X) = - \sum p(x) \cdot \log p(x);$$

– взаємну інформацію шарів для оцінки кореляції між двома видами взаємодій або між двома шарами компонентів матриці [8]:

$$I(X; Y) = \sum [p(x,y) \cdot \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}];$$

– принцип мінімаксної ентропії (*MinMaxEnt*) – для побудови найменш упереджених ймовірнісних моделей щодо невідомих розподілів за заданими обмеженнями (середніми значеннями, енергіями, масами). Це дозволяє інверсно оцінювати обмеженості параметрів моделі порівняно з експериментальними даними [12].

Наведемо аргументацію щодо певної універсальності моделі, що описана виразами (1)–(8), яку можна довести комбінацією формальної (аксіоматичної) постановки, демонстрації зведення до класичних моделей і міждисциплінарних емпіричних тестів. Це, насамперед, модульність шарів – відокремлення типів взаємодій у шарах дає можливість аплікувати модель до різних фізичних систем (металургія, біо- та екологічні системи, матеріалознавство тощо), змінюючи лише інтерпретацію шарів і функцій  $S_{(p,q,r,t,\dots)_i}$ , що узгоджується із сучасними концепціями мультишарових мереж [11].

Інформаційно-ентропійна основа універсальності моделі спирається на формалізм *Shannon/Jaynes*, який забезпечує єдину схему для поєднання статистичних (мікроскопічних) і макроскопічних відомостей; принцип *MinMaxEntr* дозволяє будувати найбільш нейтральні моделі за заданих обмежень – універсальний інструмент для інверсійних задач. Поєднання термодинамічних і кінетичних внесків здійснюють за рахунок комбінації рівноважних ( $S_{chem}$  за рівноваги,  $S_i^{comp}$ ,  $\Delta S_{mix}$ ) і нерівноважних ( $S_{proc}$ ) складових ентропії, що робить їх придатними для великої кількості реальних систем і процесів [12].

Ми не маємо підстав враховувати цю методику абсолютно універсальною, але принаймні для широкого спектру інженерних і технічних систем вона має універсальність.

### Аналіз отриманих результатів

Найбільш переконливим аргументом на користь запропонованого методу аналізу складних систем за допомогою багатовимірних, ентропійно структурованих під конкретну систему, матриць суміжності як похідної моделі для опису полікомпонентних складних систем є його практична реалізація на прикладах створення оптимальних сумішей з металургійних відходів для отримання вторинного продукту – металовмісних брикетів потрібної якості [13], а також функціональний аналіз нового матеріалу – геополімеру для застосування як сучасної речовини полікомпонентного складу для більш ніж 12 видів використання [14].

У подібних роботах методика використання ентропійно структурованих багатовимірних матриць суміжності дозволила суттєво розширити номенклатуру кінцевих продуктів у технологіях рециклінгу металургійних відходів за рахунок більш ретельного використання властивостей окремих компонентів з таких відходів на користь нової товарної продукції.

У роботі [13] дослідженню підлягають складні системи у вигляді сумішей з металургійних відходів з матричними формулами складу  $b_{2,5,1,9} = b_2 + b_5 + b_1 + b_9$  (конвертерний шлак + електросталеплавильний пил + доменний шлак + електросталеплавильна окалина) та  $b_{2,3,1,10} = b_2 + b_3 + b_1 + b_{10}$  (конвертерний шлак + доменний пил + доменний шлак + конвертерна окалина). Система, що складається із 12 вихідних компонентів ( $b_i$ ,  $i = 1, 1, 12$ ) кожний з яких являє собою промисловий відхід, завдяки чотиривимірній матриці суміжності надає можливості виділити з майже 20 тисяч варіантів сумішей ті з них, які в області елементів матриці мають оптимальні для конкретної системи складові сумарної ентропії, близькі до свого мінімаксного значення, і за рахунок цього показують на дві позиції, які визначають суміші зі вказаними вище формулами. Зокрема, чотиривимірна матриця суміжності порівняно із дво- і тривимірними ентропійно-вмісними матричними системами підтверджує можливість створення як стандартно відомого брикета (*benchmark*), за формулою  $b_{2,5,3,12} =$

$= b_2 + b_5 + b_3 + b_{12}$  (конвертерний шлам + електросталеплавильний пил + доменний пил + прокатна окалина) з невисокою механічною міцністю на стиск ( $\ll 200$  кг на брикет), термостійкістю (до  $800^\circ\text{C}$ ) і хімічним складом (Fe 50–60 %, C 10–15 %), що описано в роботі [15]. Вона ж надає альтернативні комбінації за формулами  $b_{2,5,1,9}$  та  $b_{2,3,1,10}$ , які раніше не використовували у промисловості, але здатні забезпечити кращі системні властивості, ніж у брикетів, які вважають «стандартними».

Посилаючись на розрахункові дані показано, що суміш  $b_{2,5,1,9}$  має значення  $S_{chem}^{2,5,9,1} = 0,031 \cdot S_{chem}^{benchmark}$ ,  $S_{proc}^{2,5,9,1} = 0,391 \cdot S_{proc}^{benchmark}$  та  $S_{conf}^{2,5,9,1} = 0,145 \cdot S_{conf}^{benchmark}$  за  $S_{tot}^{2,5,9,1} \approx S_{tot}^{benchmark}$ . Отже, при зовнішній ентропійній рівнозначності нова суміш  $b_{2,5,1,9}$  за рахунок менших значень термодинамічної та конфігураційної рівноваги, а також хімічної впорядкованості, проявляє кращі властивості та схильність до хімічної взаємодії, і тому стає найбільш ефективною для використання в агломераційному виробництві.

Запропонована суміш за формулою  $b_{2,3,1,10}$ , якщо порівняти із *benchmark*, характеризується складовими значеннями ентропії  $S_{chem}^{2,3,1,10} = 0,416 \times S_{chem}^{benchmark}$  та  $S_{conf}^{2,3,1,10} = 0,254 \cdot S_{conf}^{benchmark}$ . Попри те, що для неї  $S_{tot}^{2,3,1,10} \approx 1,633 \cdot S_{tot}^{benchmark}$ , нова суміш за рахунок більшої щільності та схильності до хімічних взаємодій має особливі властивості як продукт брикетування, для технологій плавлення і відновлювання заліза. Це робить їх цілком ефективними як альтернативу для застосування в доменній печі чи як самовідновлювані вторинні сировинні матеріали в електросталеплавильному виробництві [13].

Багатофункціональність геополімерних матеріалів з відходів металургійного виробництва обумовлена їх унікальними властивостями, що дозволяє їм знаходити застосування в багатьох технологічних процесах. Використання ентропійно-вмісних багатовимірних матриць суміжності дозволило виявити нові формули для цієї речовини, які стали спроможними проявити себе в нових для геополімерів областях: 3D-друку, біомедичних дослідженнях на кісткових тканинах [14].

Як підсумок досліджень [14] порівняння розрахованих результатів, отриманих за допомогою запропонованого методу, з експериментальними і практичними даними, опублікованими, наприклад у [16], дає чітко позитивні висновки про його ефективність.

Доречним тут буде зіставлення запропонованої методики з відомими і найбільш використовуваними методами дослідження та аналізу складних систем, що надає нам література. Зокрема, мова може йти про широкий спектр суміжних методів: спектральна кластеризація графів [2], мультишарова матрична статистична модель [3], випадкова матрична теорія шуму [4], використання марковських випадкових полів [5], розклад багатовимірних тензорів [6]. Їх результати можна використати як *бенчмарки* відносно запропонованої методики (табл. 2).

З викладеного можна зробити висновок про те, що запропонований метод перебуває на рівні наявних за універсальністю, обчислювальною складністю за математичним та ентропійно-інформаційним забезпеченням і, щонайменше, не гірше за них, а за прикладним сенсом і чутливістю до реальних структурних змін дещо перевершує розглянуті методи.

## Висновки

1. Запропоновано якісно новий метод до вивчення полікомпонентних складних систем за допомогою багатовимірної ентропійно індукованої матриці суміжності, в якій взаємозв'язки вихідних компонентів описують через структуру незалежних складових інтегральної ентропії кожного елемента матриці. Такий розклад дозволяє системно поєднувати в аналітичному дослідженні властивості компонентів, міх-процеси, інформаційні, структурні, конфігураційні, хімічні, динамічні та інші чинники через складові повної ентропії кожного елемента матриці суміжності. Показано, що зміна балансу ентропійних внесків може суттєво впливати на інтерпретацію впорядкованості системи навіть за передбачуваної зміни її інтегральної ентропії.

2. Мультишарова архітектура моделі дозволяє гнучко відокремлювати різні види міжкомпонентних кореляцій всередині системи, визначати взаємозв'язок відповідних домінуючих ентропійних трендів і побудову критеріїв термодинамічно-інформаційної доцільності функціонування системи. Використання принципу мінімаксної ентропії та інформаційних заходів дають змогу інверсного визначення неявних розподілів і незбіжних параметрів у таких взаємодіях.

3. Результати використання запропонованого методу і створеної на його основі моделі ентропійно індукованої багатовимірної матриці суміжності з механізмами структурованості параметрів ентропії для дослідження склад-

Таблиця 2. Порівняльні результати зіставлення різних методів оцінки полікомпонентних складних систем\*

Критерій оцінювання	Ентропійно-топологічний метод	Спектральна кластеризація графів	Мультишарова матрична модель	Випадкова матрична теорія шуму	Марковські випадкові поля	Розклад багатовимірних тензорів
Математична основа	Ентропійні багатовимірні матриці суміжності	Власний спектр матриці суміжності	Багатошарові матриці, тензор міжзв'язності	Статистика власних значень випадкових матриць	Граф залежностей + енергетичні потенціали	Латентні фактори багатомодальних даних
Інформаційно-ентропійна інтерпретація	Ентропія компонентів і зв'язків висока	Слабка	Структурна ентропія шарів	Ентропія спектра, шум	Термодинамічна ентропія станів	Ентропія тензора, багатовимірний баланс
Масштабна інваріантність (агрегація вузлів/компонентів)	Висока	Частково висока	Висока	Висока	Частково висока	Висока
Чутливість до реальних структурних змін	Висока (залежить від розмірності тензора)	Середня (залежить від спектру матриці)	Висока	Низька	Середня	Висока
Обчислювальна складність	Середня	Середня	Висока	Середня	Висока	Висока
Фізичний та прикладний сенс параметрів	Багатовимірність матриць з одночасністю міжшарових взаємодій	Лапласіан кодує інтенсивність взаємодій між компонентами	Окремі матриці відображають різні типи взаємодій	Розмірність матриці задає рівень статистичних флуктуацій	Потенціали вузлів описують імовірнісні взаємодії між елементами	Ранг розкладу параметрів визначає кількість прихованих факторів
Універсальність моделі	Дуже висока	Середня	Висока	Висока	Висока	Дуже висока

\*За даними джерел [2, 3, 4, 5, 6].

них систем отримали прикладне підтвердження і практичну значущість в технологіях рециклінгу багатоконпонентних металургійних сумішей, у проектуванні та оптимізації нових складних матеріалів на прикладі геополімерів, а також під час зіставлення з відомими прикладними методами-аналогами.

4. Розроблений метод дозволяє перейти від емпіричного аналізу властивостей полікомпонентних систем до науково обґрунтованого їх проектування, створення складних систем із за-

даними властивостями. Це забезпечує значне зниження обчислювальної складності зі збереженням високої масштабності та інваріантності аналізу, що робить метод універсальним інструментом для прикладних задач екології, металургії та кібернетики.

5. Метод можна класифікувати як уніфікований для класів динамічних, нелінійних та адаптивних, енерговмісних, складних систем; сфери їх застосування в інженерних системах доведено, вони можуть мати подальший розвиток.

## References

- [1] M. Mitchell, "Complexity: A Guided Tour", New York/Oxford, Oxford University Press, 2009, 368 p. Available: <https://doi.org/10.1093/oso/9780195124415.001.0001>
- [2] M. Newman, "Networks: An Introduction", New York/Oxford, Oxford University Press, 2010, pp. 371–412. Available: <https://global.oup.com/academic/product/networks-9780198805090>
- [3] M. Kivelä *et al.*, "Multilayer Networks", *Journal of Complex Networks*, 2014, pp. 203–248. Available: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016>
- [4] L. Laloux *et al.*, "Random Matrix Theory and Financial Correlations", *Random Matrix Theory*, Hamburg, 2013, pp. 1–32. Available: <https://doi.org/10.1142/S0219024900000255>
- [5] R. Kindermann and J.L. Snell, "Markov Random Fields and Their Applications", *American Mathematical Society*, Providence, 1980, pp. 39–82. Available: <https://books.google.com/books?id=Px9QAQAIAAJ>
- [6] A. Cichocki, *et al.*, "Tensor Decompositions for Signal Processing Applications", *IEEE Signal Processing Magazine*, 2015, pp. 145–163. Available: <https://arxiv.org/abs/1403.4462>
- [7] C.E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, 1948, Vol. 27, pp. 379–423<sup>1</sup>, 623–656<sup>2</sup>. Available: <https://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf>
- [8] T.M. Cover and J.A. Thomas, "Elements of Information Theory", John Wiley & Sons (2nd ed.), 2006, 461 p. Available: <https://search.worldcat.org/de/title/Elements-of-information-theory/oclc/70862892>
- [9] E.T. Jaynes, "Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics", *Kluwer Academic Publishers/Springer*, Dordrecht, Netherlands, 1989, Vol. 158, 458 p. Available: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-017-1577-3>
- [10] S.F. Edwards and R.B.S. Oakeshott, "Theory of Powders", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1989, Vol. 157, pp. 1080–1090. Available: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(89\)90035-6](https://doi.org/10.1016/0378-4371(89)90035-6)
- [11] M. Kivelä *et al.*, "Multilayer Networks", *Journal of Complex Networks*, 2014, pp. 258–274. Available: <https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016>
- [12] E.T. Jaynes, "Probability Theory: The Logic of Science", *Cambridge University Press*, Cambridge, United Kingdom, 2003, 727 p. Available: <https://www.cambridge.org/core/books/probability-theory/0A76DBF47F7C3D3657174B0A322BE86F>
- [13] V.S. Voloshyn and I.V. Tkalenko, "Metodyka otsinky vzaemodii metalurhiinykh vidkhodiv pry yikh retsyklinhu", *Methodology for Assessing the Interaction of Metallurgical Wastes during Their Recycling*, Vcheni zapysky Tavriiskoho universytetu im. V.I. Vernadskoho, 2025, Chap. 1, Vol. 36 (75), No. 4, pp. 191–199. Available: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.4.1/24>
- [14] V.S. Voloshyn, "Vykorystannia metalurhiinykh vidkhodiv dlia vyrobnytstva heopolimeriv", *Use of metallurgical waste for the production of geopolymers, Ekolohichna bezpeka: problemy i shliakhy vyrishennia*. Zb. nauk. statei UkrNDIEP, Kharkiv, 2025, pp. 109–115. Available: [http://www.niiep.kharkov.ua/sites/default/files/sbornik\\_konf\\_2025.pdf](http://www.niiep.kharkov.ua/sites/default/files/sbornik_konf_2025.pdf)
- [15] O. Vitikka *et al.*, "Effect of Biocarbon Addition on Metallurgical Properties of Mill Scale-Based Auger Pressing Briquettes", *ISIJ International*. The Iron and Steel Institute of Japan, 2024, Vol. 64, No 6, pp. 964–977. Available: <https://doi.org/10.2355/isijinternational.ISIJINT-2024-0266>
- [16] Shuo Li *et al.*, "One-Part Geopolymer in Stabilizing High-Water-Content Soft Clay: Towards an Eco-Friendly and Cost-Effective Solution", *Buildings*, Chap. 5, Vol. 3, 2025, pp. 477–501. Available: <https://doi.org/10.3390/buildings15040289>

V.S. Voloshyn, I.A. Tkalenko

### A METHOD FOR ANALYZING MULTICOMPONENT COMPLEX SYSTEMS BASED ON MULTIDIMENSIONAL MATRICES OF ADJACENCY AND ENTROPY RELATIONS BETWEEN SYSTEM COMPONENTS

**Background.** Current approaches to the analysis of multicomponent complex systems do not consistently consider the relative incompatibility of system properties with the configurational, thermodynamic, and other aspects of the system. The challenge of analysing multicomponent dynamic complex systems in terms of their energy and thermodynamic content continues to be unresolved.

**Objective.** The paper aims to develop a method for the analysis of multicomponent complex systems through their functional, structural, physicochemical, and additional properties, utilising the thermodynamic and informational characteristics inherent to such systems.

**Methods.** A technique is introduced for the analysis of intricate dynamic, nonlinear, and energy-containing adaptive systems, utilising multidimensional, entropy-induced adjacency matrices tailored for a particular system.

**Results.** A novel approach for the analysis of complex systems is introduced, utilising multidimensional, entropy-structured specifically tailored adjacency matrices, substantive part of which aligns with the characterisation of a complex multicomponent system through integral entropy indicators. A primary distinguishing characteristic of the model, which is founded on this method, is the decomposition of the system's integral entropy into distinct components, including configurational, structural, physicochemical, informational, and various other entropy types, reflecting the system's inherent properties. Another notable distinction of the model pertains to its multilayered structure within the adjacency matrix. This model, in contrast to existing alternatives, facilitates a comprehensive examination of the

properties and capabilities of systems to fulfil specified research objectives. The effectiveness and potential of this method are validated through its application in fields such as materials science, ecology, and medicine.

**Conclusion.** A novel approach has been established for the examination of multicomponent complex systems through the utilisation of a multidimensional adjacency matrix. This method considers the entropic relationships among the initial components, effectively illustrating the interconnections between the system's properties via its overall nonlinear entropy.

**Keywords:** complex system; multicomponent nature; entropy; adjacency matrix; multilayer structure; entropy structuring.

Рекомендована Радою  
факультету прикладної математики  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
11 грудня 2025 року

Прийнята до публікації  
09 березня 2026 року

Опубліковано  
30 березня 2026 року