

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

UDC 514.181

I.V. Orianyak¹, <https://orcid.org/0000-0003-4529-0235>,
D.P. Koltsov^{1*}, <https://orcid.org/0000-0002-0396-7255>,
D.Yu. Tavrov¹, <https://orcid.org/0000-0002-3689-2931>

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна, <https://ror.org/00syn5v21>

*Відповідальний автор: koltsovdd@gmail.com

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТОЧОК НА ЗОБРАЖЕННЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА

Проблематика. Пошук кутових точок на зображеннях має велике значення для ідентифікації образів і має багато сфер застосування в комп'ютерному зорі та розпізнаванні образів. Зазвичай для цього використовують геометричний аналіз чорно-білих контурів, до яких потім застосовують гаусівське згладжування для виявлення точок найбільшої кривизни. Потім до цих ділянок застосовують мінімізацію певних функціоналів для визначення величини кута між суміжними ділянками контуру. Недоліком такого підходу є складності у врахуванні артефактів і те, що за більшого згладжування зменшується масштаб (розмір) зображення.

Мета дослідження. Розробити метод визначення кутових точок на оцифрованому сірому зображенні за допомогою методу коротаційного балкового сплайна (КБС).

Методика реалізації. Застосування методу КБС з використанням запропонованих кутових даммі-точок, для яких немає умов неперервності по кутах, а замість неї постулюється нульова кривизна, що приводить до стрибка напрямку дотичної в цій точці.

Результати дослідження. Застосовано метод КБС, який згладжує контур чорно-білого зображення відповідно до довжини ділянки, а не до кількості точок на цій ділянці, зберігаючи загальний масштаб зображення. Запропоновані особливі кутові даммі-точки, які допускають втрату неперервності кута. За значеннями локальних екстремумів за графіком кривизни визначають кандидати в кутові точки. Для кожної точки визначають роботи як квадрат відстані між нею і її відповідником на контурі, помноженим на довжину ділянки, на яку припадає ця точка. Застосовано поняття інтегральної роботи як суми індивідуальних робіт у зоні найбільшої кривизни. Розроблено критерій існування кутової точки на основі аналізу відношення індивідуальних робіт, що отримані за відсутності та наявності кутової даммі-точки.

Висновки. Застосування адаптивного згладжування відповідно до відстані між точками на контурі, які є проєкціями (відповідниками) виміряних точок, дозволяє застосовувати метод до набору даних з різною густиною точок, що покращує якість отриманого контуру. Застосування кутових даммі-точок, які допускають втрату неперервності кута, дозволило більш точно відтворювати заданий контур, а саме різку зміну кута, а застосування відношення індивідуальних робіт, отриманих за відсутності та за наявності даммі-точки, є надійним критерієм визначення кутових точок. Відношення значень роботи показує покращення у 8–30 разів для кутових точок, тоді як для поворотних зон це значення погіршується або залишається майже таким самим.

Ключові слова: балковий коротаційний сплайн; геометричне моделювання; диференціальні рівняння; локальна інтегральна робота; кутові точки; ідентифікація кутів; непараметричне згладжування.

Вступ

Розглянемо метод визначення положення кутових точок і величини стрибка кута в них на зображеннях, отриманих фотографуванням чи скануванням. Використаємо насамперед прак-

тичні дані й методики, запропоновані в роботі [1], де проводилося згладжування і зіставлення кривих для автоматичного укладання безколірного пазла.

Виявлення кутів відіграє ключову роль у сфері комп'ютерного зору, слугуючи осново-

Пропозиція для цитування цієї статті: I.V. Orianyak, D.P. Koltsov, D.Yu. Tavrov, «Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна», *Наукові вісті КНУ*, № 1, с. 19–31, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

Offer a citation for this article: I.V. Orianyak, D.R. Koltsov, D.Yu. Tavrov, “A method for detecting corner points in images using a corotational beam spline”, *KPI Science News*, No. 1, pp. 19–31, 2026. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268>

положним елементом для безлічі завдань обробки зображень і розпізнавання образів [2, 3]. Кутові точки є стійкими і незмінними до таких трансформацій, як обертання і зміна масштабу, тому як стабільні використовують ознаки геометрії з чітко визначеними характеристиками, що робить їх надійними точками інтересу та зіставлення [4–6]. Вони є важливими локальними ознаками у багатьох задачах, таких як 3D-реконструкція будівель та їх геолокація [7, 8], зіставлення зображень і фрагментів пошкоджених манускриптів [9], відстеження рухомих об'єктів [10], для калібрування камери на основі кутів шахової дошки [11], візуально контрольована хірургія [12].

В останні роки алгоритми виявлення кутів отримали широке визнання і практичну значущість в інженерних галузях, включаючи автономну навігацію, робототехніку для одночасної локалізації та картографування SLAM [13], доповнену реальність і системи розпізнавання облич, в автомобілебудуванні, структурний аналіз у цивільному будівництві, особливо щодо тріщин [14], і вилучення ознак в медичній візуалізації [15]. Універсальність і практична корисність алгоритмів виявлення кутів роблять їх незамінними інструментами в сучасній інженерії.

Протягом останніх десятиліть було запропоновано різні аналітичні детектори кутів, які умовно можна поділити на три категорії [16]: детектори на основі моделей і шаблонів; методи на основі інтенсивності зображень, використовуючи зміну інтенсивності пікселів; методи геометричного аналізу контуру, екстрагованого із цифрового зображення.

Детектори на основі моделей виявляють кутові точки, порівнюючи ділянки зображення з попередньо визначеною моделлю кутів та оцінюючи їхню подібність [17]. У статті [18] розроблено алгоритми виявлення кутів на основі шаблонів, враховуючи оптимальні кути з довжиною щонайменше два пікселі на напрямках кутових плечей, що зменшує кількість хибнопозитивних кутів. Такі методи застосовують для швидкої обробки відеозображень.

Підходи на основі інтенсивності ґрунтуються на спостереженні, що між сусідніми пікселями вздовж краю або в однорідній області зображення існує невелика різниця в інтенсивності пікселів. Тим часом у куті спостерігається значна варіація інтенсивності в усіх напрямках [19]. У таких підходах кути можуть безпосередньо виявлятися шляхом генерування функції відгуку кута, яка оцінює значення пікселів зображення таким чи-

ном, що кути розпізнаються як точки з низькою самоподібністю на зображенні [20]. Для визначення самоподібності точок часто використовують суму квадратів різниць між відповідними ділянками зображення із двох зображень. Це основа для багатьох детекторів кутів [21]. Цю ідею надалі вдосконалили шляхом введення додаткового фільтра як на добуток функції знака (в кутовій точці) і гаусівського згладжування [22].

Останнім часом метод на основі контурів стає все більш поширеним завдяки простоті коду та обчислювальній ефективності [23]. Робота детекторів на основі геометричного аналізу контуру складаються із трьох основних кроків: виявлення країв, виділення контурів і класифікація кутів. Визначення країв, тобто бінарну карту країв, звичайно отримують за допомогою алгоритму Канні, який застосовують для сірого зображення [24].

Ключовою проблемою в геометричних методах є оцінювання дискретної кривизни кожної цифрової кривої, отриманої з вхідного зображення. Для цього було запропоновано різні міри визначення кривизни, наприклад k -косинус [25], накопичення відстані від хорди до точки [26, 27]. Подібні підходи припускають [23], що на цифровій кривій кожен два сусідні пікселі мають постійну відстань (тобто пікселі розподілені на кривій на рівній відстані). Утім, ця відстань може змінюватися в середньому від 1 до $\sqrt{2}$, що вимагає адаптивного згладжування, особливо при зіставленні двох контурів. Більшість з подібних методів є одномасштабними детекторами і добре працюють, якщо зображення має ознаки подібного розміру, але неефективні в іншому випадку. Як результат або дрібні, або грубі ознаки стають погано сегментованими, що неприйнятно, оскільки природні зображення зазвичай містять обидва типи ознак [28].

Для вирішення цієї проблеми було запропоновано поняття диференціальної кривизни на основі застосування різних рівнів згладжування [29, 30], які використовують техніку багатомасштабного подання (curvature scale space) форми плоских кривих [31]. Хоча він може виявляти ознаки з кількома різними розмірами, алгоритм є обчислювально ресурсомістким через те, що аналіз ознак відбувається у всьому масштабному просторі. Більше того, він виявляє хибні кути на колах [28].

Майже всі відомі методи отримання цифрових кривих оснований на гаусівському згладжуванні точок контуру, що попередньо подають як окремі функції координат $x(t)$, $y(t)$ від парамет-

ра t , який визначають за допомогою окремих спеціальних процедур екстракції контуру з дискретних меж і нумерації точок [32, 33]. Утім, гаусівські ядра стають досить неточними, коли є розмиті чи шумні зображення. Вони стають залежними від кількості та амплітуди шумних точок, включаючи артефакти. Саме тому в усіх підручниках зі статистичного згладжування описано недоліки гаусівських ядер і запропоновано альтернативні підходи, які використовують адаптивні ядра чи сплайни [34]. У деяких роботах з геометричного моделювання, особливо для побудови траєкторій по неточно визначеним точкам [35], запропоновано параметричне згладжування на основі кубічних сплайнів із доцентровою корекцією величини параметра t [36]. Іншим недоліком гаусівського чи параметричного згладжування є те, що масштаб згладженого контуру залежить від параметра згладжування — зі збільшенням згладжування масштаб рисунку прямує до точки.

Коротацийні балкові сплайни є новітньою технологією розв'язання задач інтерполяції, дизайну, апроксимації, і містять цілий ряд переваг, що робить їх універсальним інструментом вирішення інженерних задач у різних галузях [1, 37–40]. Коротацийні балкові сплайни є адаптивними. Вони ґрунтуються на моделі балки на пружній основі, де жорсткість пружини (величина «притягування» контуру до вимірної точки положення) залежить від довжини ділянки, якій відповідає ця точка [37, 39]. Саме тому локальне збільшення густини точок на певній ділянці (наявність артефакту) ніяк не буде відображено на згладженому контурі — у цьому випадку кожна точка автоматично отримує зменшену вагу, що не призведе до локального викривлення контуру. Збільшення рівня згладжування (зменшення коефіцієнта притягання до контуру) приводить до зменшення локальної кривизни, але точки, розміщені по різні сторони від контуру, створюють сили в різних напрямках. Це означає, що масштаб отриманого контуру не зменшується під час наступного згладжування. В КБС ділянки кривих між точками замірів описують клотоїдами, що дає лінійний зв'язок між приростом кривизни і довжини, що робить таку криву енергетично найвигіднішою для всіх можливих траєкторій [41]. Коротацийні балкові сплайни мають великий арсенал інструментів для врахування початкової кривизни ділянок чи початкових кутів між ділянками сплайна [39]; на відміну від усіх інших кубічних сплайнів вони мають можливість враховувати три (а не дві)

граничні умови, що дає можливість розв'язувати C^2 неперервні задачі інтерполяції [40].

Постановка задачі

Основна спрямованість роботи стосується методу визначення положення і величини стрибка кута в зображеннях, отриманих фотографуванням чи скануванням. У статті використано насамперед практичні дані й методики, запропоновані в роботі [1], де описано згладжування і зіставлення кривих для автоматичного укладання безколірного пазла. У цій статті ми введемо дві нові особливості, що збагачують техніку КБС. По-перше, введемо спеціальну куту даммі-точку, що забезпечує можливість різкої зміни напрямку дотичної до контуру. По-друге, введемо поняття інтегральної роботи як локальну характеристику відповідності положенню заміряних точок до згладженого контуру. На основі цього запропонуємо критерій доцільності введення куту даммі-точки як відношення роботи з наявною куту даммі-точкою до роботи без неї.

1. Теоретичні інструменти коротацийних балкових сплайнів для розв'язку поставленої задачі

1.1. Короткий огляд та особливості КБС

Для обробки первинних даних застосовуємо КБС, який неодноразово був описаний у попередніх публікаціях [1, 37, 38, 39, 40]. У цьому розділі коротко розглянемо основні моменти й особливості цього методу.

Як вхідні дані для методу КБС використовуємо неточний набір точок, на основі якого має бути описаний контур вимірюваної фігури. Ці точки будемо позначати як B_i , а розрахункові точки, що лежать на апроксимованому контурі — A_i (рис. 1).

Для побудови початкового контуру з'єднаємо послідовно точки A_i , і в результаті отримаємо напрямлені вектори \vec{l}_i , кожний з яких визначають як вектор $A_i A_{i+1}$. Для кожної ділянки визначають локальну систему координат (t_i, n_i) , пов'язану з точкою A_i як початком i -го відрізка, та відповідні базові вектори — дотичний вектор \vec{t}_i й нормальний вектор \vec{n}_i .

Також важливу роль у побудові згладженого контуру відіграє узгодження кутів між двома сусідніми прямими відрізками, тобто між напрямками \vec{t}_i та \vec{t}_{i+1} . Назвемо ці кути кутами розбіжно-

сті ψ_i , де $-\pi < \psi_i \leq \pi$ (рис. 1). Додатний напрямку кута збігається з рухом годинникової стрілки, його розраховують за формулами скалярного добутку векторів, які потрібні для визначення квадранта, в якому міститься кут ψ_i :

$$\cos(\psi_i) = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i+1}, \tag{1a}$$

$$\sin(\psi_i) = \vec{n}_i \cdot \vec{t}_{i+1}. \tag{1б}$$

Кожний відрізок розглядають як дискретну балку на пружних опорах [1], кожна точка t якої є локальною початковою координатою довжини, яку відраховують від точки початку ділянки. Її описують вектором стану $\vec{Y}(t)$, що характеризується чотирма параметрами:

$$\vec{Y}(t) = \{W(t); \theta(t); M(t); Q(t)\}^T, \tag{1в}$$

де $W(t)$ – переміщення; $\theta(t)$ – деформаційний кут повороту; $M(t)$ – згинальний момент, $Q(t)$ – поперечна сила.

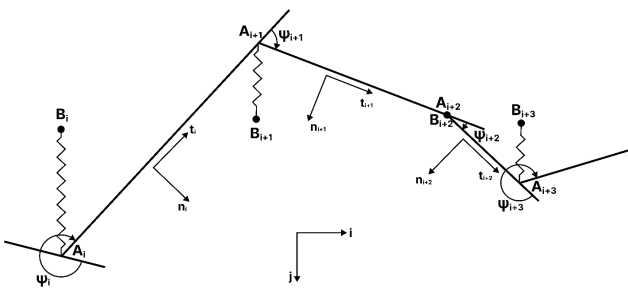


Рис. 1. Модель дискретних балок на пружних опорах

Для кожного відрізка існують алгебраїчні рівняння зв'язку, що описують залежність значення \vec{Y}_i в точці t від значення $\vec{Y}(0)$ у початковій точці відрізка, тобто

$$\vec{Y}(t) = [A(t); \vec{Y}(0)], \tag{1г}$$

де $[A(t)]$ – відома матриця [1]. Введемо поняття невідомих векторів стану на початку і в кінці кожної ділянки i , \vec{Y}_0^i та \vec{Y}_e^i , відповідно, де останній пов'язаний з першим, як слідує з (1г), таким чином:

$$\vec{Y}_e^i = [A(t=l_i)]\vec{Y}_0^i. \tag{1д}$$

Окрім рівнянь зв'язку (1д), у формуванні системи визначальних рівнянь беруть участь рівняння спряження, що дають зв'язок кінця попередньої ділянки з початком наступної. Ці рівняння мають такий вигляд:

$$W_0^{i+1} = W_e^i, \tag{2a}$$

$$\theta_e^{i+1} = \theta_e^i - \psi_i, \tag{2б}$$

$$M_0^{i+1} = M_e^i, \tag{2в}$$

$$Q_0^{i+1} = Q_e^i - \frac{L_i}{h^4}(W_e^i - W_i), \tag{2г}$$

де h – параметр згладжування, що має розмірність довжини; чим більший цей параметр, тим сильніше згладжується контур. Величина L_i – це довжина, на якій діє ця опора, тобто сума половинок відстані до правої опори й відстані до лівої опори [1, 37].

Окремої уваги заслуговує поняття P_i – відстань між опорою (точкою B_i) і найближчою точкою контуру A_i . Пошук P_i й пов'язана з ним перенумерація точок A_i , i , відповідно, B_i на кожній ітерації є важливою складовою методу. Цю процедуру запропоновано в роботі [1], і в цій статті також буде деталізовуватися і застосовуватися.

1.2. Концепція кутової даммі-точки

Для розв'язання задачі визначення кутової точки і мінімізації її впливу на гладкість контуру введемо особливу точку, а саме кутову даммі-точку. В попередніх роботах ми вводили поняття (звичайної) даммі-точки й форсованої даммі-точки [37, 40]. Даммі-точка – це точка, що не пов'язана з реальними точками замірів, її вводять для забезпечення малості розрахованих кутів θ , що приводить до гладкої зміни кривизни. Положення даммі-точок не впливає на вигляд розрахованого контуру, має значення лише їх достатня кількість.

Тут введемо особливу – кутову – даммі-точку, яка і служитиме для ідентифікації як розміщення точок перегину кутів, так і величини стрибка кута (дотичної) в ній. Математична відмінність кутової даммі-точки від інших точок полягає в рівняннях спряження і в наступному розміщенні розрахованих значень $W(t)$ в її околі:

$$M_e^i = 0. \tag{3}$$

Рівняння спряження відрізняються від усіх інших точок тим, що рівняння неперервності дотичних не враховуємо. Замість нього введемо рівняння рівності моменту (кривизни) нулю (3а) у кутовій точці. Пояснимо логіку цієї умови. Поворотів (змін напрямку) на всіх інших ділянках (що не містять кутових точок) наближено досягають за рахунок добутку кривизни на довжину ділянки. Якщо не обмежити моменти, то виникне невизначеність у способі зміни кута. Окрім того, у цій точці немає приросту сили, тобто сили в кінці попередньої ділянки і на початку наступної збігаються (див. рівняння (2г)).

Інша особливість реалізації кутової точки полягає у способі відкладання переміщень $W(t)$ розрахункових точок в околі кутової точки (відрізків, що містять її). Нагадаємо, що однією з особливостей нашого КБС є власне відкладення переміщень $W(t)$ розрахункових точок в околі кутової точки (відрізків, що містять її). Нагадаємо, що однією з особливостей нашого КБС є, власне, відкладання переміщень $W(t)$ по скоректованій нормалі, що забезпечує неперервність функції переміщення і дотичних. Тут задача набагато складніша. Розглянемо ділянку між точками A_i та A_{i+1} , між якими розміщено кутову точку K (рис. 2). Отримуємо дві ділянки замість однієї. Кут між $\vec{A}_i K$ та $\vec{K A}_{i+1}$ позначимо як ψ_k .

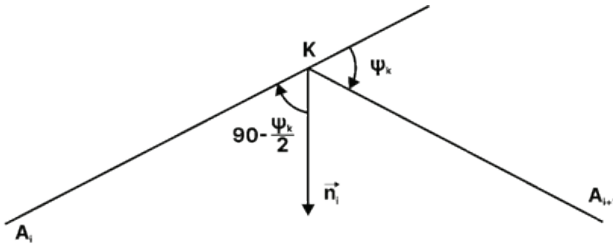


Рис 2. Напрямок нормалі в кутовій точці при нульових значеннях кутів деформування

Щоб обґрунтувати спосіб відкладення $W(t)$, що гарантує гладкість і нерозривність контуру в околі точки K , спочатку розглянемо випадок, коли розрахункові кути в кінці першої ділянки $[\vec{A}_i K]$ і на початку другої ділянки $[\vec{K A}_{i+1}]$ дорівнюють нулю. Тоді для того, щоб уточнені нормальні вектори (за якими відкладають W) збігалися в точці K , треба в цій точці початковий вектор до першої ділянки повернути на кут $\psi_k/2$, а початковий вектор до другої ділянки – на кут $-\psi_k/2$. Очевидно, що напрямок уточненої нормалі уздовж двох прилеглих ділянок не може бути розривним, тому його треба плавно продовжити в обидва кінці до точок A_i та A_{i+1} . Це відбувається за допомогою лінійної апроксимації кутових поправок.

Розрахункові кути деформації на обох ділянках зазвичай не є нульовими. Позначимо їх як $\theta_{i,k}(t)$ та $\theta_{k,i+1}(t)$ для першої і другої ділянок відповідно. Зокрема, в кінці першої ділянки і на початку другої, тобто в точці K , вони такі: $\theta_e^{i,k} = \theta_{i,k}(l_{i,k})$ та $\theta_0^{k,i+1} = \theta_{k,i+1}(0)$ відповідно. Тоді додатково будемо вважати, що в точці K уточнена нормаль має бути повернутою на кут $\Delta\omega_{i,k}(t)$, де

$$\Delta\omega_k(t) = (\theta_0^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})/2. \quad (4a)$$

Тоді повне значення уточнювального кута в точці K буде таким:

$$\omega_e^{i,k} = \frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2} \quad (4б)$$

як кінця відрізка $[\vec{A}_i K]$, та

$$\omega_0^{k,i+1} = -\frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2} \quad (4в)$$

як початку другої ділянки $[\vec{K A}_{i+1}]$.

Тепер залишилося навести вираз для додаткового кута повороту нормалі для кожної із двох ділянок, які б забезпечили прийнятну гладкість сплайна на двох ділянках. Пропонуємо такі вирази:

$$\Delta\omega_{i,k}(t) = \theta_0^{i,k} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \omega_e^{i,k} \frac{t}{l_{i,k}} \quad (5a)$$

для першої ділянки й

$$\Delta\omega_{k,i+1}(t) = \omega_0^{k,i+1} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \theta_e^{k,i+1} \frac{t}{l_{i,k}} \quad (5б)$$

для другої ділянки. Новий напрямок нормалі запишемо такими формулами:

$$n\vec{\theta}_{i,k}(t) = n_{i,k} \cos(\Delta\omega_{i,k}(t)) - t_{i,k} \sin(\Delta\omega_{i,k}(t)) \quad (6a)$$

для першої ділянки, а також:

$$n\vec{\theta}_{k,i+1}(t) = n_{k,i+1} \cos(\Delta\omega_{k,i+1}(t)) - t_{k,i+1} \sin(\Delta\omega_{k,i+1}(t)) \quad (6б)$$

для другої ділянки.

Далі, як і в роботі [1], розглянемо проблему пазлів з наголосом на кутові точки. Знову розглянемо згладжування контуру та отримання кривизни як найбільш характерного параметра ідентифікації.

2. Послідовність визначення кутових точок на пазлі

2.1. Метод побудови наближеного контуру та визначення кандидатів кутових точок

Ідентифікацію починаємо з побудови наближеного контуру. Є набір початкових точок вимірювання, їх кількість для кожного елемента пазла близька до 2300 [1]. Використаємо функцію `findContours` з бібліотеки `OpenCV` для виділення контуру із зображення. Ці точки є більш-менш упорядкованими, але все одно після отримання

послідовності (нумерації) точок контуру вони в певному околі є перемішаними, містять артефакти, тобто існує певна нечіткість щодо порядку їх розміщення. Тому спочатку вибираємо кожну 20-ту точку (точки B_i на рис. 3). На цій першій ітерації вважатимемо, що $A_i = B_i$, тобто початкові $P_i = 0$. Проведемо розрахунок й отримаємо нові положення точок A'_i , а далі застосуємо процедуру розрахунку проміжних точок для побудови повного контуру (рис. 3). Цей контур дає нам початкове наближення, з якого починається більш детальна процедура уточнення контуру.

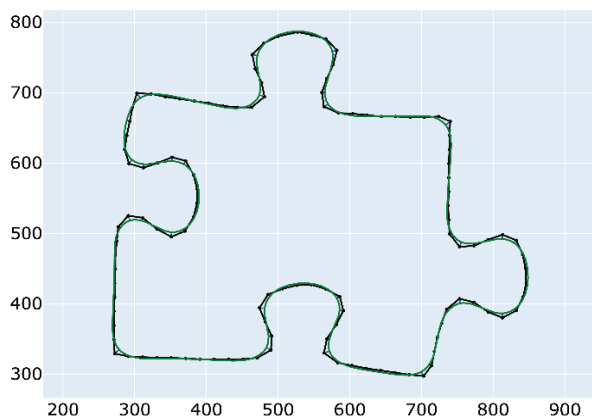


Рис. 3. Кожна 20-та точка вхідного контуру (чорні точки) і початкове наближення для згладженої фігури, утворене за допомогою кожної 20-ї точки вимірювань за $h = 20$

Важливим етапом є знаходження проєкцій усіх точок B_i на отриманий контур. Ці про-

екції є точками локальних мінімумів відстані до контуру. Їх шукають в локальному околі, прив'язаному до розрахункових положень точок A_i як розрахункових відповідників точок B_i . Після знаходження проєкції усіх точок B_i на контур (назвемо ці точки A''), ми (пере)нумеруємо усі точки A'' відповідно до послідовності розміщення їх на контурі (якщо рух відбувається за годинниковою стрілкою). Після цього ми перенумеруємо усі точки B відповідно до нумерації їх відповідників A . Це робимо для того, щоб уникнути петель у вхідних даних під час наступної ітерації. Отримуємо перенумерований набір B_i і їх відповідники A_i .

Проведемо ще декілька ітерацій за цього самого значення $h = 20$, але враховуючи уже всі перенумеровані точки B_i та A_i . Проведення додаткових ітерацій потрібне для стабілізації контуру; експериментальним шляхом було виявлено, що трьох додаткових ітерацій достатньо, щоб контур стабілізувався. Результати розрахунку всього контуру показано на рис. 4, а, і на ньому, на відміну від зображення на рис. 3, враховано усі задані точки B , а не лише кожну 20-ту точку.

Графік кривизни для всього контуру зображено на рис. 5. Очевидно, що за такого згладжування ми не можемо явним чином визначити кутові точки, адже величини екстремальної кривизни є близькими для всіх 20 особливих ділянок, але ми можемо стверджувати, що кутові точки є серед цих 20 особливих точок (рис. 5). Це пояснюється тим, що масштаб згладжування $h = 20$ є співмірним з радіусами заокруглень,

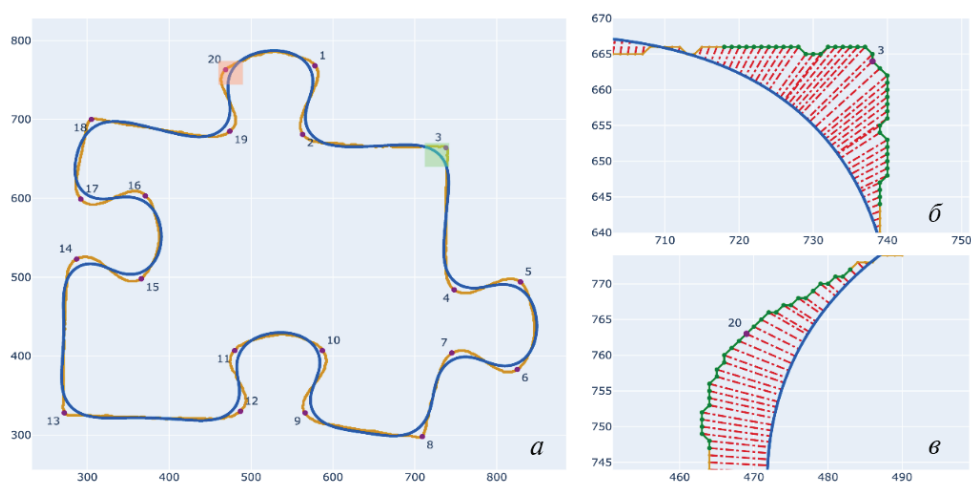


Рис. 4. Згладжений контур пазла за $h = 20$: а – повний контур; б – локальні точки B та їх відповідники A в околі особливої точки 3 на рис. 4, а; в – точки B та A для іншої ділянки в околі кутової точки 20

а кут кутової точки $\sim 90^\circ$ є близьким до кутів повороту на гладких ділянках.

Спробуємо знайти додаткові аргументи того, чи справді розглянута зона є кутовою (містить кут). На відміну від нашої роботи [1], де було проаналізовано енергію деформації як характеристику добротності (fairness) контуру, тут ми введемо поняття «роботи» як локальної міри відхилення точок згладженого контуру від вимірених точок. У механіці поняття «робота» – це добуток сили на переміщення в точці її прикладання. В установленій геометрії (застосовують незмінне h для двох чи трьох ітерацій уточнення контуру) положення точок A уже не змінюються (розрахункові $W_i \rightarrow 0$), тому переміщення пружини – це Π_i . Тоді сила в опорі дорівнює $D_i \Pi_i$, а робота у точці R_i є такою:

$$R_i = D_i \Pi_i^2. \quad (7a)$$

Оскільки довжина ділянки згладжування (бендвідс) геометричних особливостей для конкретного h становить приблизно $\pm h3/4$, то доцільно обраховувати інтегральну роботу на такій ділянці в околі особливої точки N так:

$$R_{int}(\bar{N}, h) = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} D_i^2 \Pi_i^2 = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} \frac{L_i^2}{h4_i}. \quad (76)$$

Результати розрахунку інтегральної роботи R_{int} наведено у табл. 1. Очевидно, що ці дані не можуть слугувати для визначення ймовірного знаходження кутових точок. Це тому, що реальні довжини зон заокруглень контуру зівставні з вибраною величиною бендвідса h .

Таблиця 1. Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00743	0,00949	0,01136	0,01016	0,00868
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00769	0,00956	0,00918	0,01272	0,00684
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00860	0,01108	0,00985	0,01310	0,00859
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00854	0,01185	0,00851	0,01176	0,00874

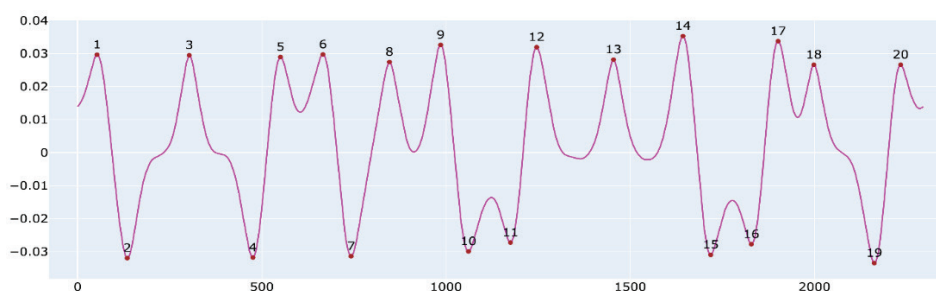


Рис. 5. Графік згладження кривизни контуру пазла за $h = 20$

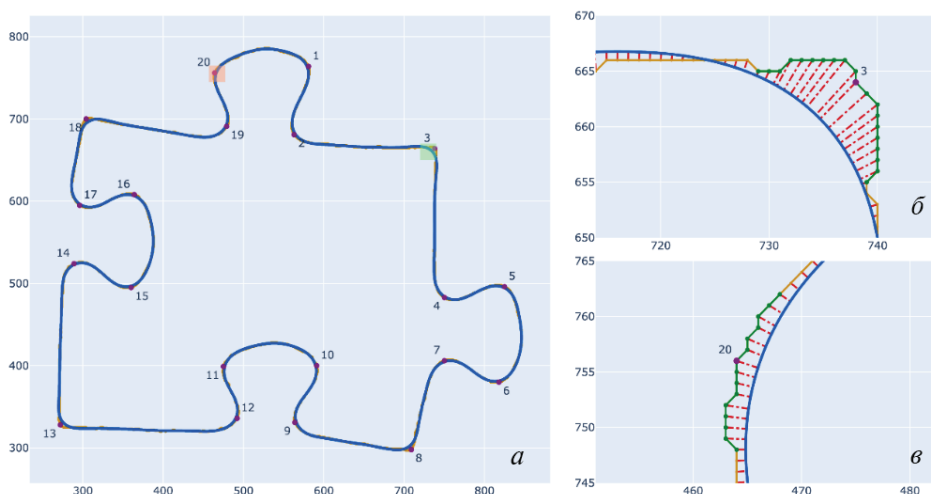
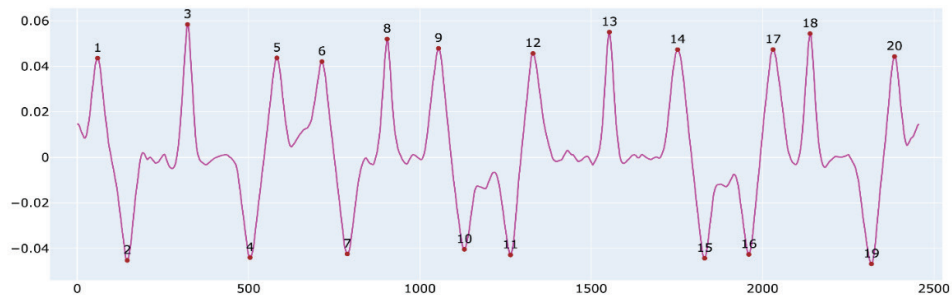


Рис. 6. Згладжений контур пазла за $h = 10$: а – повний контур; б – точки В й точки А в околі кутової точки 3; в – точки В та А в околі поворотної точки 20

Рис. 7. Розрахункова кривизна контуру за $h = 10$

Також розрахуємо контур за $h = 10$, що є нашим робочим значенням згладжування [1]. Таке значення h було обрано для побудови контуру, тому що достатньою мірою згладжується шум і залишається корисна інформація (рис. 6).

Графік кривизни зображено на рис. 7. За такого значення h за графіком кривизни все ще неможливо визначити кутові точки.

Результати розрахунку роботи за $h = 10$ наведено у табл. 2. Тут різниці в роботі є уже дуже помітними і демонструють доцільність застосування такого критерію порівняння для ідентифікації кутів.

Якщо порівняти значення роботи за $h = 20$ та $h = 10$ можна помітити, що значення роботи для точок 3, 8, 13, 18 значно (приблизно у 8–10 разів і більше) перевищують значення роботи в усіх інших (повортних) точках. Із цього ми можемо зробити припущення, що 3, 8, 13, 18 – це кутові точки. Втім, остаточне рішення дик-

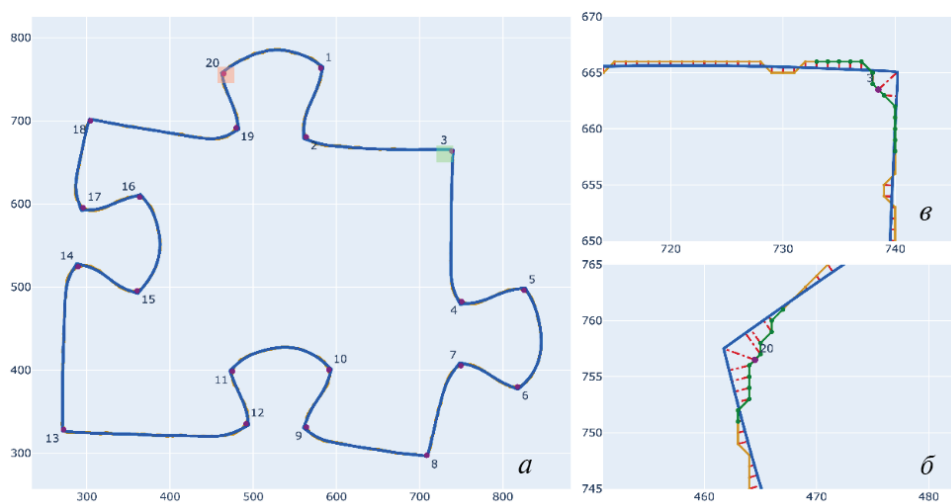
тується ефективністю застосування кутової даммі-точки.

Таблиця 2. Інтегральна робота в зонах точок інтересу за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00 284	0,00 260	0,02 016	0,00 154	0,00 288
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00 211	0,00 168	0,01 612	0,00 308	0,00 162
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00 289	0,00 239	0,01 658	0,00 146	0,00 253
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00 274	0,00 182	0,01 452	0,00 224	0,00 435

2.2. Метод визначення кутових точок

Після визначення 20 точок-кандидатів потрібно дослідити ефект від розміщення в пев-

Рис. 8. Згладжений контур пазла за $h = 10$ з додаванням кутових даммі-точок: *a* – повний контур; *б* – точки *B* та точки *A* в околі кутової точки 3; *в* – точки *B* та *A* в околі поворотної точки 20

ному місці кутової точки, що дозволяє поворот контуру на певний кут. Математику такого розміщення описано нами у п. 1.2. Тут ми розглянемо конкретні приклади.

Виберемо як характерний параметр згладжування h величину $h = 10$, яка з одного боку є достатньою для видалення всіх артефактів вимірювання, а з другого забезпечує збереження корисної інформації, як ми це продемонстрували для задачі зіставлення кривих [1]. У точці контуру з екстремальною локальною кривизною додамо кутову даммі-точку, що дасть алгоритму можливість самостійно визначити кут, який виникає в цій точці за значення $h = 10$.

Проведемо чотири ітерації після додавання куткових точок, що дозволить контуру стабілізуватися.

Проаналізувавши значення в табл. 3 ми можемо визначити точки, для яких значення роботи є меншим, ніж для інших, ці точки (3, 8, 13, 18) збігаються з виділеними як точки-кандидати в попередньому розділі статті.

Таблиця 3. Інтегральна робота в зонах точок інтересу за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0,00331	0,00449	0,00101	0,00566	0,00391
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0,00391	0,00497	0,00056	0,00434	0,00447
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0,00366	0,00486	0,00203	0,00693	0,00364
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0,00333	0,00600	0,00121	0,00512	0,00306

Тепер порівняємо значення роботи для точок з табл. 2 та 3. Для точок 3, 8, 13, 18 значення роботи покращилось щонайменше у 8 разів, а для всіх інших, окрім 20, погіршилось.

Для точки 20 значення покращилось в 1,4 разу, що є неспівмірним з іншими покращеннями. Таким чином, ми математично продемонстрували, що точки 3, 8, 13 та 18 є кутовими точками. Для наочної демонстрації знайдемо відношення цих характеристик роботи (тобто до (R_{mit}) і після (R_{with}) додавання кутової даммі-точки) й наведемо їх у табл. 4.

Перебудуємо сплайн і порахуємо графік кривизни для всього контуру (рис. 9), де відповідно до умови (3) значення кривизни дорівнює нулю. Зазначимо таке. У цій статті, на відміну від роботи [1], ми вважаємо весь контур неперервним з усіма кутковими точками. У роботі [1] кутові точки спочатку окремо виділялися за іншою процедурою, також виділялися чотири незалежні криві, для яких застосовували граничні умови. В околі куткових точок ці два підходи дають трохи відмінні значення кривизни, втім, різниця є дуже малою.

Таблиця 4. Відношення інтегральних робіт $\alpha = R_{mit}/R_{with}$ в особливих точках до і після додавання кутової даммі-точки за $h = 20$

N	1	2	3	4	5
α	0,85829	0,57850	19,96437	0,27195	0,73571
N	6	7	8	9	10
α	0,53970	0,33808	28,78635	0,70887	0,36235
N	11	12	13	14	15
α	0,79065	0,49221	8,18476	0,21056	0,69459
N	16	17	18	19	20
α	0,82361	0,30340	11,99889	0,43766	1,42378

Дослідимо: ці отримані результати для відношень робіт α не є випадковими хорошими значеннями для $h = 10$, а справжні значення α характеризують реальні кутові точки в певному діапазоні значень h . На рис. 10 показано значення α для всіх 20 точок за трьох

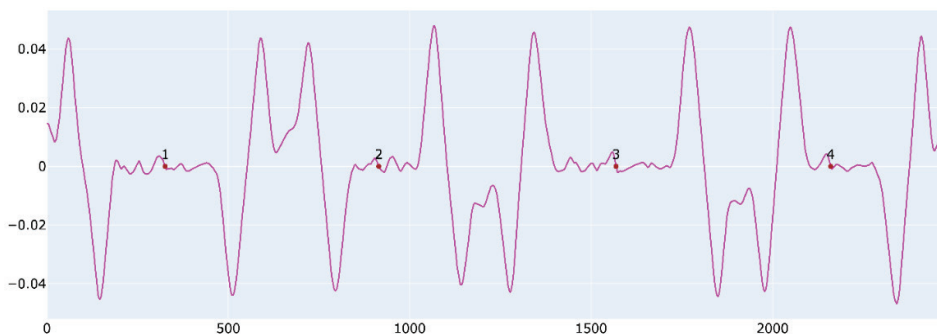


Рис. 9. Розрахункова кривизна контуру за $h = 10$ з кутковими точками

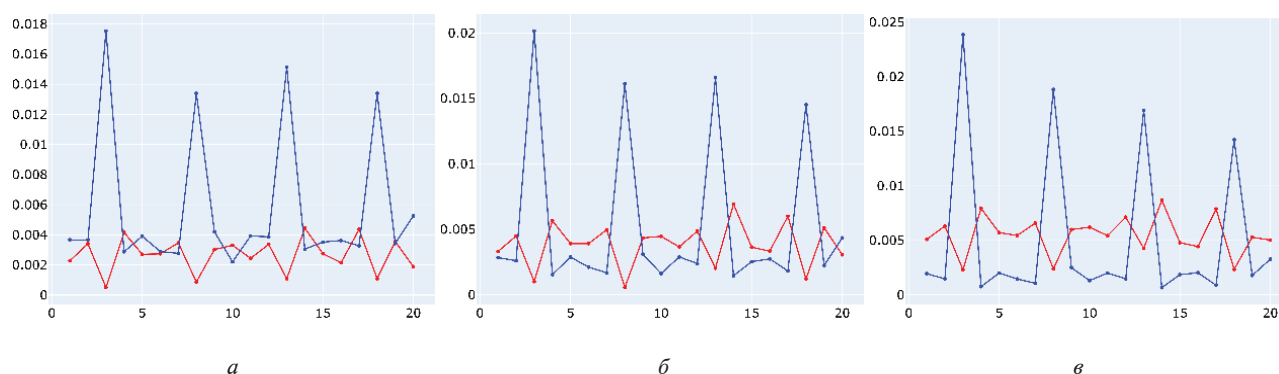


Рис. 10. Відношення α інтегральних робіт до i після вставляння кутової точки в особливих зонах під час роботи з кутовими точками (червона) та без (синя) за різних h : a – згладжування за $h = 8$; b – за $h = 10$; c – за $h = 12$

різних значень h , а саме 8, 10 та 12. Як бачимо, загальна тенденція така, що розміщення кутової даммі-точки значно покращує відношення в точках реальних кутів (від 10 до 30 разів), тоді як для поворотних ділянок це значення майже завжди погіршується (до 2-3 разів) або дуже незначно покращується (на 20 чи 30 %). Усе це свідчить про високу ефективність запропонованого критерію виділення реальної кутової точки.

Висновки

Ця робота стосується обробки чорно-білих зображень і суттєво доповнює арсенал можливостей коротаційних балкових сплайнів для розв'язання інтерполяційних і апроксимаційних задач геометричного моделювання кривих. В задачах апроксимації КБС мають дві беззаперечні переваги порівняно з іншими техніками згладжування, які ґрунтуються на параметричному поданні кривих: 1) збереження масштабу малюнка за різних параметрів (бендвідс) згладжування; 2) залежність розрахованого КБС контуру від середньої похибки вимірювання чи, власне, від амплітуди і довжини реальних особливостей контуру, а не від густини точок вимірювання; тобто в КБС автоматично реалізується адаптивне згладжування.

Основним досягненням роботи є розробка методу визначення кутових точок на зображеннях і введення в техніку КБС поняття кутової даммі-точки, яка передбачає розрив напрямку дотичної в цій точці. Для цієї точки застосовують особливі умови спряження, що передбачають нульове значення кривизни в ній, а також змінений напрямок нормалі, по якій відкладають розраховане переміщення. Метод передба-

чає три стадії реалізації:

1. На основі розуміння можливої похибки вимірювання і масштабу артефактів, а також масштабу корисної інформації (радіуси і довжини заокруглень) встановлюють оптимальний бендвідс, що в КБС є параметром згладжування h , і який має бути обов'язково більшим за похибку i , по можливості, меншим від корисної інформації. Запропоновано поняття локальної інтегральної роботи, яку вважають сумою робіт у кожній точці вимірювання, що лежить у межах довжини бендвідс від точки інтересу. Робота в кожній точці пропорційна силі в цій точці, помноженій на відстань до контуру, тобто пропорційна квадрату відстані до контуру і довжині ділянки, яку «представляє» ця точка. Значення роботи в околі реального кута звичайно є значно більшим, ніж інших в точках гладкого повороту.

2. Розроблено алгоритм знаходження кандидатів у кутові точки за допомогою графіка кривизни та уточнення можливого положення кутових точок за допомогою роботи. Введено поняття кутової даммі-точки та умов спряження в ній. Розроблено додаткову процедуру уточнення напрямку відкладання розрахункового переміщення на двох відрізках (між проєкціями на контур реальних точок вимірювання), яка забезпечує гладкість контуру по обидва боки від кутової точки. Це дає можливість знайти кут повороту і перерахувати контур. Окрім того, кутова даммі-точка значно зменшує значення інтегральної роботи і робить її меншою, ніж на ділянках гладкого повороту.

3. Заключною стадією роботи є метод ідентифікації кутової точки на основі аналізу декількох можливих місць її локації на ділянках великої кривизни. Введено поняття локальної роботи, що залежить від суми квадратів відста-

ней від вимірних точок до найближчих точок згладженого контуру, помножених на вагу кожної точки. Знайдено відношення роботи до і після введення кутової даммі-точки. Для реальних кутових точок це відношення є дуже великим (від 8 до 30 разів), а для ділянок швидкого пово-

роту (великої кривизни) це відношення, навпаки, погіршується або залишається приблизно рівним одиниці. Таким чином, відношення роботи є ефективним критерієм наявності реального кута на зображенні.

References

- [1] Д.Р. Кольцов, І.В. Ориняк, “Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротацийного балкового сплайна”, *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2025, № 2, С. 5–32. Режим доступу: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2025.2.01>
- [2] B. Magnier and K. Hayat, “Revisiting mehrotra and nichani’s corner detection method for improvement with truncated anisotropic gaussian filtering”, *Sensors*, 2023, No. 23 (20), pp. 8653. Available: <https://doi.org/10.3390/s23208653>
- [3] A. Andreopoulos and J.K. Tsotsos, “50 years of object recognition: Directions forward”, *Computer vision and image understanding*, 2013, No. 117 (8), pp. 827–891. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2013.04.005>
- [4] F. Mokhtarian and F. Mohanna, “Performance evaluation of corner detectors using consistency and accuracy measures”, *Computer Vision and Image Understanding*, 2006, No. 102 (1), pp. 81–94. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2005.11.001>
- [5] V. Rodehorst and A. Koschan, “Comparison and evaluation of feature point detectors”, *In 5th international symposium Turkish-German joint geodetic days*, Berlin, Germany, 29–31 March 2006.
- [6] J. Jing *et al.*, “ECFRNet: Effective corner feature representations network for image corner detection”, *Expert Systems with Applications*, 2023, No. 211, pp. 118673. Available: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118673>
- [7] W. Song *et al.*, “Building corner detection in aerial images with fully convolutional networks”, *Sensors*, 2019, No. 19 (8), pp. 1915. Available: <https://doi.org/10.3390/s19081915>
- [8] M. Bansal and K. Daniilidis, “Geometric urban geo-localization”, *In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, pp. 3978–3985. Available: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.508>
- [9] Y. Zheng *et al.*, “Reunion helper: an edge matcher for sibling fragment identification of the Dunhuang manuscript”, *Heritage Science*, 2024, No. 12 (1). Available: <https://doi.org/10.1186/s40494-024-01150-3>
- [10] H. Zhang *et al.*, “A novel tracking method based on improved FAST corner detection and pyramid LK optical flow”. *In 2020 Chinese control and decision conference (CCDC)*, 2020, August, pp. 1871–1876. Available: <https://doi.org/10.1109/CCDC49329.2020.9164332>
- [11] Y. Zhang, “A new algorithm for accurate and automatic chessboard corner detection”, *In 2017 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2017, May, pp. 1–4. Available: <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2017.8050637>
- [12] T. Kerstein *et al.*, “Accurate X-corner Fiducial Marker Localization in Image Guided Surgery”. *In Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods*, Angers, France, 6–8 March 2014, pp. 471–478. Available: <https://doi.org/10.5220/0004751904710478>
- [13] Y. Xia *et al.*, “A multi-sensor fusion framework with tight coupling for precise positioning and optimization”, *Signal Processing*, 2024, No. 217, pp. 109343. Available: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109343>
- [14] Y. Tang *et al.*, “Novel visual crack width measurement based on backbone double-scale features for improved detection automation”, *Engineering Structures*, 2023, No. 274, pp. 115158. Available: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115158>
- [15] A. Benam *et al.*, “A CBIR system for locating and retrieving pigment network in dermoscopy images using dermoscopy interest point detection”, *In 2017 IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging*, 2017, April, pp. 122–125. Available: <https://doi.org/10.1109/ISBI.2017.7950483>
- [16] R. Yazdi *et al.*, “Robust Corner Detection Using Local Extrema Differences”, *International Journal of Web Research*, 2024, No. 7 (1), pp. 69–84. Available: <https://doi.org/10.22133/ijwr.2024.458246.1217>
- [17] E. Rosten *et al.*, “Faster and better: A machine learning approach to corner detection”, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2010, No. 32 (1), pp. 105–119. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.275>
- [18] C. Gao *et al.*, “Robust template based corner detection algorithms for robotic vision”, *In 2015 IEEE International Conference on Technologies for Practical Robot Applications*, 2015, May, pp. 1–6. Available: <https://doi.org/10.1109/TePRA.2015.7219683>
- [19] H.P. Morevec, “Towards automatic visual obstacle avoidance”, *In Proceedings of the 5th international joint conference on Artificial intelligence*, 1977, August, Vol. 2, pp. 584–584.
- [20] J. Wang and W. Zhang, “A survey of corner detection methods”, *In 2018 2nd International Conference on Electrical Engineering and Automation, ICEEA 2018*, 2018, March, pp. 214–219. Atlantis Press. Available: <https://doi.org/10.2991/iceea-18.2018.47>

- [21] C. Harris and M. Stephens, "A combined corner and edge detector", *In Alvey vision conference*, 1988, August, Vol. 15, No. 50, pp. 10–5244. Available: <https://doi.org/10.5244/C.2.23>
- [22] M. Wang *et al.*, "Efficient corner detection based on corner enhancement filters", *Digital Signal Processing*, 2022, No. 122, pp. 103364. Available: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103364>
- [23] X. Sun and B. Zhong, "A rotation-invariant corner detector based on the median of subpixelized triangle", *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 2023, No. 35 (8), pp. 101645. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2023.101645>
- [24] J. Canny, "A Computational Approach to Edge Detection", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, No. 8 (6), pp. 679–698 Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851>
- [25] S. Zhang *et al.*, "Robust corner finding based on multi-scale k-cosine angle detection", *IEEE Access*, 2020, No. 8, pp. 66741–66748. Available: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2984566>
- [26] J.H. Han and T. Poston, "Chord-to-point distance accumulation and planar curvature: a new approach to discrete curvature", *Pattern Recognition Letters*, 2001, No. 22 (10), pp. 1133–1144. Available: [https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(01\)00063-0](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(01)00063-0)
- [27] M. Awrangjeb and G. Lu, "Robust image corner detection based on the chord-to-point distance accumulation technique", *IEEE transactions on multimedia*, 2008, No. 10 (6), pp. 1059–1072. Available: <https://doi.org/10.1109/TMM.2008.2001384>
- [28] X. Chen He and N.H. Yung, "Corner detector based on global and local curvature properties", *Optical engineering*, 2008, No. 47 (5), 057008-057008-12. Available: <https://doi.org/10.1117/1.2931681>
- [29] A. Rattarangsi and R.T. Chin, "Scale-Based Detection of Corners of Planar Curves", *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 1992, No. 14 (04), pp. 430–449. Available: <https://doi.org/10.1109/34.126805>
- [30] B. Zhong *et al.*, "Scale-space behavior of planar-curve corners", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2008, No. 31 (8), pp. 1517–1524. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.295>
- [31] F. Mokhtarian and A.K. Mackworth, "Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes", *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1986, No. 1, pp. 34–43. Available: <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767750>
- [32] F. Mokhtarian and A.K. Mackworth, "A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves", *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1992, No. 14 (8), pp. 789–805. Available: <https://doi.org/10.1109/34.149591>
- [33] S. Ohrhallinger and M. Wimmer, "Stretchdenoise: Parametric curve reconstruction with guarantees by separating connectivity from residual uncertainty of samples", 2018. arXiv preprint arXiv:1808.07778. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1808.07778>
- [34] R.L. Eubank, "Nonparametric regression and splines smoothing", *CRC press*, 1999. Available: <https://doi.org/10.1201/9781482273144>
- [35] E. Bertolazzi *et al.*, "Point data reconstruction and smoothing using cubic splines and clusterization", *Mathematics and Computers in Simulation*, 2020, No. 176, pp. 36–56. Available: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.04.002>
- [36] E.T. Lee, "Choosing nodes in parametric curve interpolation", *Computer-Aided Design*, 1989, No. 21 (6), pp. 363–370. Available: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(89\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0010-4485(89)90003-1)
- [37] I. Orynyak *et al.*, "Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points", *System Research and Information Technologies*, 2022, No. 4, pp. 119–140. Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10>
- [38] I. Orynyak *et al.*, "Fairness of 2D corotational beam spline as compared with Geometrically nonlinear elastic beam", *System Research and Information Technologies*, 2024, No. 3, pp. 119–140 Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2024.3.07>
- [39] I. Orynyak *et al.*, "Controllable Curvature Smoothing of the Pipeline Positions by 2D Corotational Beam Spline", *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 2025, No. 16 (3), pp. 04025047. Available: <https://doi.org/10.1061/JPSEA2.PSENG-1739>
- [40] I. Orynyak *et al.*, "Efficient construction of clothoidal splines using corotational beam splines", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2026, pp. 117318. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.117318>
- [41] J.H. Ahlberg *et al.*, "The theory of splines and their applications", New York: Academic Press, 1967.
- [42] R. Levien and C.H. Sequin, "Interpolating splines: Which is the fairest of them all?" *Computer-Aided Design and Applications*, 2009, No. 6 (1), pp. 91–102. Available: <https://doi.org/10.3722/cadaps.2009.91-102>

I.V. Orynyak, D.R. Koltsov, D.Y. Tavrov

A METHOD FOR DETECTING CORNER POINTS IN IMAGES USING A COROTATIONAL BEAM SPLINE

Background. The detection of corner points in images is of great importance for object identification and has numerous applications in computer vision and pattern recognition. Typically, this task is performed using geometric analysis of black-and-white contours, to which

Gaussian smoothing is subsequently applied in order to identify points of maximum curvature. Functional minimisation is then applied to these regions to determine the angle magnitude between adjacent contour segments. A drawback of this approach lies in the difficulty of accounting for artifacts, as well as in the fact that increased smoothing leads to a reduction in the effective scale (size) of the image.

Objective. The paper aims to develop a method for detecting corner points in a digitised grayscale image using the corotational beam spline (CBS) method.

Methods. Application of the CBS method using the proposed corner dummy points, for which the angular continuity condition is not satisfied; instead, zero curvature is postulated, resulting in a discontinuity (jump) in the tangent direction at that point.

Results. The CBS method is applied to smooth the contour of a black-and-white image according to the length of a contour segment rather than the number of points on that segment, thereby preserving the overall image scale. Special corner dummy points are proposed that allow for a loss of angular continuity. Candidates for corner points are identified based on the local extrema of the curvature graph. For each point, the work is defined as the square of the distance between the point and its corresponding location on the contour, multiplied by the length of the segment associated with that point. The concept of integral work is introduced as the sum of individual works within the region of maximum curvature. A criterion for the existence of a corner point is developed based on the analysis of the ratio of individual works obtained in the absence and in the presence of a corner dummy point.

Conclusions. The application of adaptive smoothing according to the distance between points on the contour, which are projections (correspondences) of the measured points, enables the method to be applied to datasets with varying point densities, thereby improving the quality of the reconstructed contour. The use of corner dummy points that allow for a loss of angular continuity makes it possible to more accurately reproduce the target contour, in particular, sharp angle changes. Furthermore, the use of the ratio of individual works obtained in the absence and in the presence of a dummy point serves as a reliable criterion for corner point detection. The ratio of work values demonstrates an improvement by a factor of 8–30 for corner points, whereas for curved regions, this value deteriorates or remains nearly unchanged.

Keywords: corotational beam spline; geometric modeling; differential equations; local integral work; corner points; corner identification; nonparametric smoothing.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
12 грудня 2025 року

Прийнята до публікації
09 березня 2026 року

Опубліковано
30 березня 2026 року