

DOI: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2025.3.336383>

УДК 004.932:528.85:519.6

О.Р. Чертов¹, С.Ю. Сахаров^{1*}

¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: sakharov.serhii@iit.kpi.ua

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ ВИЯВЛЕННЯ ЗМІН 3D-СЕРЕДОВИЩА ЗА ЗОБРАЖЕННЯМИ

Проблематика. Автоматизоване виявлення змін у тривимірному (3D) середовищі є критично важливою задачею для створення та підтримки цифрових двійників міської інфраструктури, екологічного моніторингу та забезпечення безпеки об'єктів. Відомі методи часто не враховують невизначеність вимірювань, погано масштабуються на великі обсяги даних і не інтегрують семантичну інформацію. Наявні огляди зосереджуються переважно на технічних аспектах або конкретних застосуваннях, недостатньо повно висвітлюючи особливості математичних методів, що використовуються. Це ускладнює вибір оптимальних алгоритмів для актуалізації цифрових двійників середовища.

Мета дослідження. Систематизація та порівняльний аналіз математичних моделей і методів виявлення змін у тривимірних даних середовища. Формування таксономії методів з визначенням їх переваг, обмежень та областей застосування. Розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних підходів для різних типів задач моніторингу 3D-середовища.

Методика реалізації. Систематичний аналіз класичних геометричних методів реєстрації та порівняння хмар точок, статистичних підходів для оцінювання невизначеності вимірювань і сучасних методів машинного навчання для автоматичної класифікації змін. Формалізація математичних моделей подання 3D-даних, типів змін і метрик їх оцінювання.

Результати дослідження. Розроблено уніфіковану математичну модель для опису різних типів змін у 3D-середовищі, що є основою для автоматизованої актуалізації цифрових двійників. Визначено критерії вибору відповідних методів залежно від характеристик даних і вимог застосування. Показано, що гібридні підходи, які поєднують геометричні методи з машинним навчанням, забезпечують найкращу точність під час збереження інтерпретованості результатів для оновлення цифрових моделей середовища.

Висновки. Запропонована систематизація дозволяє обґрунтовано вибирати методи для конкретних задач виявлення змін. Перспективними напрямками є розроблення адаптивних алгоритмів з автоматичним налаштуванням параметрів та інтеграція семантичної інформації через сучасні архітектури глибокого навчання.

Ключові слова: зміни 3D-середовища; хмари точок; цифровий двійник; комп'ютерний зір; машинне навчання.

Вступ

Виявлення змін у 3D-середовищі становить фундаментальну задачу сучасного геопросторового аналізу, яка набуває критичної важливості у контексті розвитку концепції цифрових двійників і систем моніторингу динамічних середовищ. Розв'язання цієї задачі є невід'ємною складовою підтримки актуального стану цифрового двійника середовища і дослідження еволюції окремих його ділянок, забезпечуючи можливість кількісної оцінки

просторово-часових трансформацій з потрібною точністю.

Автоматизоване виявлення подібних змін має широкий спектр застосувань: від контролю несанкціонованої забудови і моніторингу критичної інфраструктури до оцінювання екологічних процесів і наслідків техногенних катастроф. Сучасні технології тривимірного сканування генерують величезні обсяги просторових даних, проте сама по собі доступність даних не вирішує складної задачі автоматизованого виявлення і класифікації змін, яка вимагає роз-

Пропозиція для цитування цієї статті: О.Р. Чертов, С.Ю. Сахаров, "Аналіз математичних моделей і методів виявлення змін 3D-середовища за зображеннями", *Наукові вісті КПІ*, № 3, с. 14–31, 2025. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2025.3.336383>

Offer a citation for this article: O.R. Chertov, S.Yu. Sakharov, "Analysis of mathematical models and methods for 3D environment change detection from imagery", *KPI Science News*, no. 3, pp. 14–31, 2025. doi: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2025.3.336383>

робки спеціалізованих математичних моделей та обчислювальних методів.

Історично перші підходи ґрунтувалися на простому геометричному порівнянні хмар точок, але виявилися надто чутливими до шуму й похибок реєстрації. З розвитком статистичної теорії обробки даних з'явилися методи, що явно враховують невизначеність вимірювань, серед яких метод МЗС2 [1] став фактичним стандартом для наукових досліджень. Останнє десятиліття ознаменувалося революцією у застосуванні глибинного навчання – архітектури PointNet [2], DGCNN [3], Siamese KPConv [4] продемонстрували здатність автоматично видобувати семантично значущі ознаки з неструктурованих хмар точок.

Попри значний інтерес дослідницької спільноти наявні огляди літератури мають суттєві обмеження. Stilla and Xu (2023) [5] детально проаналізували джерела даних і практичні аспекти, але приділили недостатню увагу математичним основам алгоритмів. Shafique et al. (2022) [6] зосередилися на методах глибинного навчання, обмежившись переважно двовимірними (2D) зображеннями. Qin et al. (2016) [7] надали піонерську роботу із 3D виявлення змін, але з того часу з'явилося багато нових методів, які потребують систематизації. Kharroubi et al. (2022) [8] провели технічний огляд рівнів обробки, не розкривши математичні моделі. Andresen and Schultz-Fellenz (2023) [9] надали огляд застосувань безекіпажних авіаційних систем (unoccupied aerial systems, UAS) для виявлення змін у 3D-середовищах, акцентуючи увагу на технологічних аспектах збору даних і практичних застосуваннях, але також не заглиблюючись у математичні основи методів обробки. Спільною рисою цих оглядів є недостатня увага до математичних моделей і методів, покладених на основу відомих рішень.

Пропонована робота спрямована на заповнення виявленої прогалини шляхом систематичного аналізу математичного апарату методів виявлення змін у 3D-середовищі. Основні цілі включають формалізацію математичних моделей подання даних і типології змін у тривимірному середовищі, аналіз метрик для кількісної оцінки, дослідження задачі реєстрації як оптимізаційної проблеми, порівняння теоретичних властивостей різних категорій методів і визначення критеріїв вибору оптимальних підходів.

Стаття організована таким чином. Розділ 1 подає математичне формулювання задачі,

включаючи формальні визначення й основні метрики. Розділ 2 розглядає задачу реєстрації хмар точок як критичну передумову виявлення змін. Розділ 3 систематизує методи безпосереднього виявлення змін у трьох категоріях: геометричні, на основі сегментації та імовірнісні. Розділ 4 аналізує сучасні методи машинного навчання в контексті розглядуваної задачі. Розділ 5 надає практичні аспекти та експериментальні результати. У висновках підсумовано поточні досягнення й окреслено перспективи майбутніх досліджень.

Постановка задачі

Мета цієї роботи – систематизувати наявні математичні моделі й методи виявлення змін у 3D-середовищі на основі зображень, отриманих у різні моменти часу.

Комплексний аналіз відомих оглядових робіт [5–9] дозволив виявити загальну структуру процесу виявлення змін у тривимірному середовищі за зображеннями. Незалежно від конкретної реалізації та сфери застосування більшість методів дотримуються подібної послідовності етапів обробки даних, що відображає фундаментальну природу задачі.

На рис. 1 зображено узагальнену модель виявлення змін у 3D-середовищі, яка складається з шести основних етапів. Вхідними даними є зображення, отримані в різні моменти часу t та $t + 1$, які можуть походити з різних джерел: аерофотозйомка, супутникові знімки, наземна фотограмметрія або комбінація цих методів. Першим критичним етапом є генерація тривимірних хмар точок із цих зображень за допомогою фотограмметричних методів, зокрема Structure-from-Motion (SfM) для розрідженої реконструкції та Multi-View Stereo (MVS) для отримання щільних хмар точок.

Отримані хмари точок зазвичай містять шум, викиди й систематичні похибки, тому наступним необхідним кроком є попередня обробка даних. Вона включає геометричну корекцію і калібрування для усунення систематичних спотворень, статистичну фільтрацію для видалення точок шуму й викидів, а також нормалізацію даних для забезпечення порівнянності хмар різних епох.

Центральним етапом всього процесу є реєстрація хмар точок – зведення їх до спільної системи координат. Цей етап традиційно поділяють на два підетапи: груба реєстрація, яка використовує методи на основі ознак (FPFH,

SHOT) або геометричних примітивів (4PCS), і точна реєстрація, що застосовує ітеративні алгоритми типу ICP або Point-to-Plane для остаточного вирівнювання.

Після успішної реєстрації виконують безпосереднє виявлення змін, для чого застосовують різні категорії методів: прямі методи порівняння відстаней, методи на основі сегментації об'єктів, імовірнісні підходи з оцінкою невизначеності та сучасні методи глибинного навчання. Завершальним етапом є аналіз виявлених змін, що включає їх класифікацію за типами (геометричні, топологічні, семантичні) й оцінку статистичної значущості з урахуванням невизначеності вимірювань.

Важливо зазначити, що у межах цієї роботи ми зосереджуємося виключно на методах обробки вже наявних тривимірних хмар точок.

Методи генерації хмар точок із зображень, хоча й є критично важливими для загального процесу, виходять за межі нашого дослідження. Фотограмметричні методи реконструкції, включаючи Structure-from-Motion, Multi-View Stereo та їх варіанти, розглядаються у спеціалізованих оглядах, наприклад у [10]. Ці методи становлять окрему велику сферу досліджень із власними викликами та рішеннями, які потребують окремого детального розгляду.

Таке обмеження дозволяє нам сконцентруватися на математичних аспектах власне виявлення змін, припускаючи, що вхідні хмари точок вже отримані з достатньою якістю і щільністю. Це дає можливість глибше проаналізувати методи реєстрації, порівняння і класифікації змін, які є ядром задачі моніторингу динаміки тривимірного середовища.

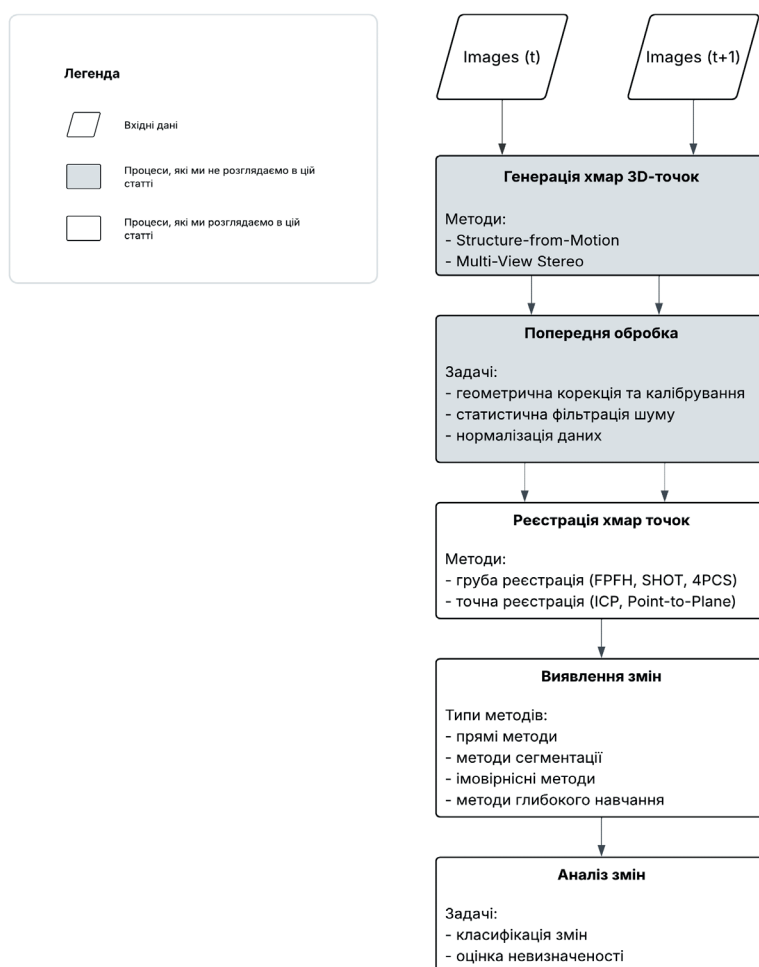


Рис. 1. Узагальнена модель виявлення змін у 3D-середовищі за зображеннями. Модель ілюструє послідовність етапів від вхідних зображень різних епох до кінцевого аналізу змін. На діаграмі позначено як етапи, що є предметом розгляду у цій статті (реєстрація хмар точок, виявлення та аналіз змін), так і ті, що залишаються поза її межами (генерація хмар точок, попередня обробка)

1. Математичне формулювання задачі

1.1. Формальні визначення

Виявлення змін у тривимірному середовищі є фундаментальною задачею комп'ютерного зору та дистанційного зондування, яка полягає у визначенні та аналізі відмінностей між станами об'єктів або сцен, зафіксованих у різні моменти часу. Для формального опису цієї задачі введемо потрібні математичні визначення й позначення.

Нехай $S \subset R^3$ позначає тривимірну сцену в евклідовому просторі. На практиці ми не маємо безпосереднього доступу до неперервної геометрії S , а працюємо з її дискретними поданнями, отриманими за допомогою різних сенсорів. *Хмарою точок* називають скінченну множину точок у тривимірному просторі:

$$P = \{p_i \in R^3 : i = 1, \dots, n\},$$

де n – кількість точок у хмарі. Кожна точка є дискретною вибіркою поверхні об'єктів у сцені. Додатково точки можуть мати асоційовані атрибути:

$$p_i^{ext} = (x_i, y_i, z_i, a_i^1, \dots, a_i^k)^T,$$

де a_i^j – атрибути, такі як інтенсивність відбиття, колір RGB, нормаль до поверхні тощо.

Нехай $t_1, t_2, \dots, t_m$ – дискретні моменти часу. *Часовою послідовністю* хмар точок називають впорядковану множину

$$P = \{P^{(t_1)}, P^{(t_2)}, \dots, P^{(t_m)}\},$$

де $P^{(t_j)}$ – хмара точок, отримана в момент часу t_j .

Для двох хмар точок $P^{(t_1)}$ та $P^{(t_2)}$, отриманих у моменти часу $t_1 < t_2$, *задача виявлення змін* полягає у знаходженні функції

$$\Delta : P^{(t_1)} \times P^{(t_2)} \rightarrow C,$$

де C – простір можливих змін.

Геометричною зміною між двома хмарами точок $P^{(t_1)}$ та $P^{(t_2)}$ називають множину

$$\Delta_g = \{(p, q, d) : p \in P^{(t_1)}, q \in P^{(t_2)}, d = \|p - T(q)\| > \tau\},$$

де $T : R^3 \rightarrow R^3$ – оптимальна трансформація вирівнювання; τ – поріг виявлення змін.

Типологія змін. Типи можливих змін у тривимірному середовищі вже були виділені раніше [5]. Утім, ми дамо їм уніфіковані строгі математичні визначення.

Об'єкт вважають таким, що *з'явився*, якщо існує зв'язна підмножина $Q \subset P^{(t_2)}$, для якої

$$\forall q \in Q : \min_{p \in P^{(t_1)}} \|p - q\| > \tau_{appear}.$$

Об'єкт вважають таким, що *зник*, якщо існує зв'язна підмножина $R \subset P^{(t_1)}$, для якої

$$\forall r \in R : \min_{q \in P^{(t_2)}} \|r - q\| > \tau_{disappear}.$$

Деформацією називають зміну, за якої об'єкт зберігає топологічну зв'язність, але змінює свою геометричну форму. Формально для підмножин $R \subset P^{(t_1)}$ та $Q \subset P^{(t_2)}$, що є одним об'єктом, існує гомеоморфна відповідність $f : R \rightarrow Q$, при цьому для деяких елементів $r \in R$:

$$\|f(r) - r\| > \tau_{deform}.$$

Зміщенням об'єкта називають його переміщення як жорсткого тіла:

$$Q = \{T_{rigid}(r) : r \in R\},$$

де T_{rigid} – жорстке перетворення (композиція обертання і зсуву).

Математична модель невизначеності. Оскільки вимірювання реальних сцен завжди містять похибки, слід враховувати невизначеність у наших моделях. Кожну виміряну точку p_i моделюють як

$$p_i = p_i^{true} + \varepsilon_i,$$

де p_i^{true} – справжнє положення точки; $\varepsilon_i \sim N(0, \Sigma_i)$ – випадковий шум з коваріаційною матрицею Σ_i .

Простір ознак для виявлення змін. Для ефективного виявлення змін точки часто характеризують не лише їх положенням у просторі, але й додатковими ознаками (наприклад, нормаль до поверхні та кривизни, гістограми орієнтацій тощо). *Локальним дескриптором точки* p_i називають вектор ознак

$$\mathbf{f}_i = \phi(p_i, N(p_i)) \in R^d,$$

де $N(p_i) = \{p_j : \|p_i - p_j\| < r\}$ – локальний окіл точки радіуса r ; ϕ – функція видобування ознак.

1.2. Метрики та міри відстані

Центральним елементом задачі виявлення змін є вибір відповідної метрики для кількісної оцінки відмінностей між хмарами точок. Різні метрики мають свої переваги та обмеження залежно від характеру даних і типу змін, які треба виявити.

Відстань Хаусдорфа

Класичною метрикою для порівняння геометричних множин є відстань Хаусдорфа, яка вимірює максимальну відстань від точок однієї множини до найближчої точки іншої множини.

Визначення 1.2.1 (односпрямована відстань Хаусдорфа). Для двох непорожніх підмножин $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ односпрямовану відстань Хаусдорфа від P до Q визначають як

$$h(P, Q) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \|p - q\|.$$

Визначення 1.2.2 (відстань Хаусдорфа). Відстань Хаусдорфа між множинами P та Q є максимумом двох односпрямованих відстаней:

$$H(P, Q) = \max \{h(P, Q), h(Q, P)\}.$$

Відстань Хаусдорфа чутлива до викидів, оскільки визначається найгіршим випадком. Для практичних застосувань часто використовують модифіковані версії.

Визначення 1.2.3 (усічена відстань Хаусдорфа). Усічену відстань Хаусдорфа на рівні $\alpha \in (0, 1)$ визначають як

$$H_\alpha(P, Q) = \max \{h_\alpha(P, Q), h_\alpha(Q, P)\},$$

де $h_\alpha(P, Q)$ – це α -квантиль розподілу відстаней $\{\min_{q \in Q} \|p - q\| : p \in P\}$.

Статистичні міри відстані

Для стійкого виявлення змін за наявності шуму і неповних даних використовують статистичні міри.

Визначення 1.2.4 (середньоквадратична відстань). Середньоквадратичну відстань між хмарами точок P та Q визначають як

$$d_{RMS}(P, Q) = \sqrt{\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \min_{q \in Q} \|p - q\|^2}.$$

Визначення 1.2.5 (відстань Chamfer). Симетрична відстань Chamfer між хмарами точок P та Q [11]

$$d_{Chamfer}(P, Q) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \min_{q \in Q} \|p - q\|^2 + \frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} \min_{p \in P} \|q - p\|^2.$$

Метрика M3C2

Для врахування локальної геометрії поверхні та невизначеності вимірювань розроблено метрику Multiscale Model to Model Cloud Comparison (M3C2) [1].

Визначення 1.2.6 (M3C2-відстань). Для точки $p_i \in P^{(t_1)}$ з нормаллю $\mathbf{n}_i$ M3C2-відстань визначають як

$$d_{M3C2}(p_i) = \frac{1}{|N_2|} \sum_{q \in N_2} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{|N_1|} \sum_{p \in N_1} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p}),$$

де $N_1 \subset P^{(t_1)}$ та $N_2 \subset P^{(t_2)}$ – локальні околиці радіуса r навколо проекції p_i уздовж нормалі.

Визначення 1.2.7 (довірчий інтервал M3C2). Статистичну значущість зміни оцінюють через довірчий інтервал

$$LOD_{95\%}(d) = \pm 1.96 \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} + \sigma_{reg} \right),$$

де σ_1, σ_2 – стандартні відхилення точок у локальних околицях; n_1, n_2 – кількість точок; σ_{reg} – похибка реєстрації.

Воксельні метрики

Для ефективної обробки великих хмар точок використовують воксельні подання [12].

Визначення 1.2.8 (воксельна сітка). Воксельна сітка – це розбиття простору $\mathbb{R}^3$ на кубічні комірки розміру Δ :

$$V_{ijk} = [i\Delta, (i+1)\Delta) \times [j\Delta, (j+1)\Delta) \times [k\Delta, (k+1)\Delta).$$

Визначення 1.2.9 (воксельна відстань).

Для воксельних подань $\mathcal{V}_P$ та $\mathcal{V}_Q$ хмар точок P та Q

$$d_{\text{voxel}}(P, Q) = \sum_{ijk} |o_{ijk}^P - o_{ijk}^Q|,$$

де $o_{ijk} \in \{0, 1\}$ – індикатор зайнятості вокселя.

Спектральні відстані

Для аналізу глобальних властивостей форми використовують спектральні методи [13].

Визначення 1.2.10 (спектральна відстань).

Нехай $\lambda_1^P \leq \lambda_2^P \leq \dots \leq \lambda_k^P$ та $\lambda_1^Q \leq \lambda_2^Q \leq \dots \leq \lambda_k^Q$ – власні значення матриць Лапласа графів хмар точок P та Q . Спектральну відстань визначають як

$$d_{\text{spectral}}(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\lambda_i^P - \lambda_i^Q)^2}.$$

Вибір метрики

Вибір відповідної метрики залежить від характеристик даних і розв'язуваних задач:

- **відстань Хаусдорфа** – для оцінювання найгіршого випадку деформацій;
- **відстань Chamfer** – для глобального порівняння з урахуванням усіх точок;
- **МЗС2** – для виявлення змін з оцінюванням статистичної значущості;
- **воксельні метрики** – для швидкої обробки великих масивів даних;
- **спектральні відстані** – для порівняння глобальної структури.

2. Задача реєстрації як оптимізація

Реєстрація хмар точок є фундаментальною передумовою для виявлення змін, оскільки порівняння можливе лише у разі правильного суміщення даних різних епох. Задача реєстрації полягає у знаходженні оптимального перетворення, яке вирівнює дві або більше хмар точок у спільній системі координат [14].

2.1. Постановка задачі

Нехай маємо дві хмари точок: вихідну (source) $P = \{p_i \in R^3 : i = 1, \dots, n_p\}$ і цільову (target) $Q = \{q_j \in R^3 : j = 1, \dots, n_q\}$. Задача реєстрації по-

лягає у знаходженні перетворення $T: R^3 \rightarrow R^3$, яке оптимально вирівнює P відносно Q [15].

Визначення 2.1.1 (жорстке перетворення).

Жорстке перетворення визначають як

$$T(p) = Rp + t,$$

де $R \in SO(3)$ – матриця обертання; $t \in R^3$ – вектор зсуву.

Визначення 2.1.2 (афінне перетворення).

Афінне перетворення має вигляд

$$T(p) = Ap + t,$$

де $A \in R^{3 \times 3}$ – невинероджена матриця, що допускає масштабування і зсув.

Оптимальне перетворення знаходять шляхом мінімізації функції втрат, яка вимірює невідповідність між перетвореною вихідною і цільовою хмарами.

Визначення 2.1.3 (функція втрат L2). Стандартна квадратична функція втрат [16]

$$\mathcal{L}_{L2}(T) = \sum_{(p_i, q_i) \in C} \|T(p_i) - q_i\|^2,$$

де C – множина відповідностей між точками.

Визначення 2.1.4 (робастна функція втрат).

Щоб зменшити вплив викидів, використовують робастні функції втрат [17]:

$$\mathcal{L}_{\text{robust}}(T) = \sum_{(p_i, q_i) \in C} \rho(\|T(p_i) - q_i\|),$$

де $\rho: R_+ \rightarrow R_+$ – робастна функція, наприклад:

- функція Хубера [18]:

$$\rho_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & |x| \leq \delta; \\ \delta\left(|x| - \frac{1}{2}\delta\right), & |x| > \delta \end{cases};$$

- функція Тьюкі [19]:

$$\rho_T(x) = \begin{cases} \frac{c^2}{6} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)^3\right), & |x| \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & |x| > c \end{cases}.$$

Для допустимих перетворень вводяться природним чином обмеження на трансформації.

Визначення 2.1.5 (обмеження ортогональності). Для матриці обертання R :

$$R^T R = I_3, \quad \det(R) = 1.$$

Визначення 2.1.6 (обмеження на масштаб).

Для ізотропного масштабування [20]

$$T(p) = sRp + t, \quad s \in [s_{\min}, s_{\max}].$$

Введені вище означення дозволяють поставити задачу реєстрації хмар точок як оптимізаційну задачу.

Формулювання 2.1.1 (загальна задача реєстрації):

$$\arg \min_{T \in \mathcal{T}} (L(T) + \lambda R(T)),$$

де T – простір допустимих перетворень; $R(T)$ – регуляризаційний член; λ – параметр регуляризації [21].

Для жорсткої реєстрації

$$\arg \min_{R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3} \sum_{(p_i, q_i) \in C} \|Rp_i + t - q_i\|^2.$$

За такої постановки задачі ключовою проблемою є встановлення відповідностей C між точками двох хмар [22]. Ці відповідності зазвичай рахують на основі відстані до найближчої точки.

Визначення 2.1.7 (найближча точка). Для точки $p \in P$ її відповідність у Q :

$$q^* = \arg \min_{q \in Q} \|T(p) - q\|.$$

Визначення 2.1.8 (взаємні відповідності).

Пара (p, q) є взаємною відповідністю, якщо

$$q = \arg \min_{q' \in Q} \|p - q'\| \quad \text{та} \quad p = \arg \min_{p' \in P} \|p' - q\|.$$

Оскільки відповідності й перетворення взаємозалежні, то для пошуку оптимального перетворення T початкової хмари точок у цільову використовують ітеративний підхід [23].

Алгоритм 2.1.1 (загальна ітеративна схема).

1. Ініціалізація: $T^{(0)} = T_{\text{init}}$.

2. Для $k = 0, 1, 2, \dots$:

а. Знайти відповідності:

$$C^{(k)} = \text{FindCorrespondences}(P, Q, T^{(k)}).$$

б. Оновити перетворення:

$$T^{(k+1)} = \arg \min_T L(T, C^{(k)}).$$

в. Перевірити збіжність: якщо

$$\|T^{(k+1)} - T^{(k)}\| < m, \text{ то зупинитись.}$$

3. Повернути $T^{(k+1)}$.

Ця загальна схема лежить в основі більшості алгоритмів реєстрації, які відрізняються способами пошуку відповідностей та оптимізації перетворення.

2.2. Алгоритми розв'язання

Відомі алгоритми реєстрації хмар точок можна умовно поділити на окремі групи залежно від підходу до встановлення відповідностей між точками двох хмар. Ми розглянемо чотири найпопулярніші із цих груп.

1. Алгоритм Iterative Closest Point (ICP) та його варіанти

Алгоритм ICP є найбільш поширеним методом реєстрації хмар точок [15].

Алгоритм 2.2.1 (класичний ICP).

1. Задати початкове наближення $T^{(0)}$.

2. Повторювати до збіжності:

а. Для кожної точки $p_i \in P$ знайти найближчу точку $q_i \in Q$:

$$q_i = \arg \min_{q \in Q} \|T^{(k)}(p_i) - q\|.$$

б. Обчислити оптимальне перетворення:

$$T^{(k+1)} = \arg \min_{R, t} \sum_{i=1}^n \|Rp_i + t - q_i\|^2.$$

в. Перевірити збіжність:

$$\|T^{(k+1)} - T^{(k)}\| < \epsilon.$$

Теорема 2.2.1 (збіжність ICP). Алгоритм ICP монотонно зменшує функцію помилки і збігається до локального мінімуму [24].

Основні модифікації ICP спрямовані на покращення швидкості збіжності й робастності:

• **Point-to-plane ICP** [25] мінімізує відстань від точки до площини:

$$\mathcal{L}_{p2pl}(R, t) = \sum_{i=1}^n ((Rp_i + t - q_i) \cdot \mathbf{n}_i)^2,$$

де $\mathbf{n}_i$ – нормаль у точці q_i .

• **Симетричний ICP** [26] враховує обидві хмари симетрично:

$$\mathcal{L}_{sym}(R, t) = \sum_{i=1}^n \|Rp_i + t - q_i\|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \|R^{-1}(q_j - t) - p_j\|^2.$$

• **Generalized ICP** [27] об'єднує переваги підходів point-to-point та point-to-plane через імовірнісну модель:

$$\mathcal{L}_{GICP}(T) = \sum_{i=1}^n d_i^T C_i^{-1} d_i,$$

де $d_i = T(p_i) - q_i$, $C_i = C_{p_i} + T \cdot C_{q_i} \cdot T^T$ – комбінована коваріаційна матриця.

II. Методи на основі ознак

Методи на основі ознак видобувають дескриптори з локальних околів точок для встановлення відповідностей [28].

FPFH (Fast Point Feature Histogram)

Визначення 2.2.1 (FPFH дескриптор).

Для точки p_i з нормаллю $\mathbf{n}_i$ та її околу $N(p_i)$ FPFH обчислюють так [29]:

1. Для кожної пари точок (p_i, p_j) обчислити кути Дарбу:

$$\alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_j,$$

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|},$$

$$\theta = \arctan(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_j, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_j),$$

де $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ – локальна система координат.

2. Побудувати спрощену гістограму точкових ознак (SPFH).

3. Обчислити FPFH як зважену суму SPFH:

$$FPFH(p_i) = SPFH(p_i) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\omega_j} \cdot SPFH(p_j).$$

SHOT (Signature of Histograms of Orientations)

Визначення 2.2.2 (SHOT дескриптор). SHOT використовує сферичну систему координат навколо кожної точки [30]:

1. Розбити сферичний окіл на сектори.
2. Для кожного сектора обчислити гістограму кутів між нормаллями.
3. Об'єднати гістограми в єдиний дескриптор.

III. Глобальна реєстрація

Методи глобальної реєстрації шукають оптимальне перетворення без початкового наближення.

RANSAC для реєстрації

Алгоритм 2.2.2 (RANSAC для 3-точкових відповідностей) [31]:

1. Випадково вибрати три пари відповідних точок.

2. Обчислити перетворення T за методом Кабша–Умеями [32].

3. Оцінити кількість точок даних, які відповідають загальній моделі або закономірності:

$$N_{inliers} = \left| \left(p_i, q_j \right) : \|T(p_i) - q_j\| < \tau \right|.$$

4. Повторити k разів і вибрати T з максимальним $N_{inliers}$.

Кількість ітерацій

$$k = \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^3)},$$

де p – бажана ймовірність успіху; w – частка відповідних точок даних.

4PCS (4-Points Congruent Sets)

Алгоритм 4PCS [33] використовує геометричні інваріанти для ефективного пошуку відповідностей.

Визначення 2.2.3 (конгруентна четвірка). Дві четвірки точок (p_1, p_2, p_3, p_4) та (q_1, q_2, q_3, q_4) є конгруентними, якщо

$$\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Алгоритм 2.2.3 (Super 4PCS) [34]:

1. Вибрати базову четвірку в P .
2. Використати геометричні обмеження для швидкого пошуку конгруентних четвірок у Q .
3. Верифікувати кандидатів через підрахунок відповідних точок даних.
4. Вибрати перетворення з максимальною підтримкою.

IV. Методи на основі глибинного навчання

Використовують нейронні мережі для отримання ознак, робастних до шуму і часткових перекриттів [35].

Порівняння методів реєстрації

Таблиця 1. Порівняння методів реєстрації

Метод	Складність	Точність	Вимоги до ініціалізації	Робастність
Методи ICP	Середня-Висока	Висока	Потребує	Низька
FPFH + RANSAC	Висока	Середня	Не потребує	Висока
4PCS	Дуже висока	Висока	Не потребує	Висока
Глибинне навчання	Середня	Висока	Не потребує	Дуже висока

3. Методи виявлення змін

Після успішної реєстрації хмар точок різних епох постає завдання безпосереднього виявлення і класифікації змін. Методи виявлення змін можна поділити на три основні категорії: прямі методи, що ґрунтуються на геометричному порівнянні, методи на основі сегментації, які працюють з об'єктами, та ймовірнісні підходи, що враховують невизначеність вимірювань. Розглянемо кожен метод детально.

3.1. Прямі методи

Прямі методи виявлення змін ґрунтуються на безпосередньому порівнянні геометричних характеристик зареєстрованих хмар точок. Ці методи є найпростішими в реалізації та інтерпретації результатів, але часто чутливі до шуму й неповноти даних.

Порогова обробка відстаней

Найпростіший підхід полягає в обчисленні відстаней між відповідними точками або від точок до найближчих поверхонь і застосуванні порогу для класифікації змін [36].

Визначення 3.1.1 (проста порогова класифікація). Для кожної точки $p_i \in P^{(t_1)}$ визначаємо статус зміни:

$$\text{change}(p_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } d(p_i, Q^{(t_2)}) > \tau \\ 0, & \text{інакше} \end{cases},$$

де $d(p_i, Q^{(t_2)}) = \min_{q \in Q^{(t_2)}} \|p_i - q\|$ – відстань до найближчої точки.

Утім, простий поріг не враховує напрямку зміни. Щоб розрізнити появу і зникнення об'єктів, використовують двонаправлений аналіз.

Алгоритм 3.1.1 (двонаправлене виявлення змін).

1. Для кожної точки $p \in P^{(t_1)}$:
 - якщо $\min_{q \in Q^{(t_2)}} \|p - q\| > \tau$, позначити як «зникнення».
2. Для кожної точки $q \in Q^{(t_2)}$:
 - якщо $\min_{p \in P^{(t_1)}} \|q - p\| > \tau$, позначити як «поява».

Адаптивні пороги

Фіксований поріг не враховує локальних характеристик поверхні та точності вимірювань. Адаптивні методи обчислюють поріг на основі локальних властивостей [37].

Визначення 3.1.2 (адаптивний поріг). Адаптивний поріг визначають як

$$\tau_{\text{adaptive}}(p_i) = k \cdot \sigma_{\text{local}}(p_i) + \tau_{\text{base}},$$

де $\sigma_{\text{local}}(p_i)$ – локальне стандартне відхилення в околі точки; k – коефіцієнт (типово 2-3);

τ_{base} – базовий поріг.

Статистичний аналіз відхилень

Для стійкого виявлення змін за наявності шуму використовують статистичні тести [1]. Метод МЗС2, описаний у підрозд. 1.2, є прикладом такого підходу.

Визначення 3.1.3 (статистичний тест на зміну). Для локального околу точки p_i перевіряють таку гіпотезу:

- H_0 : відстань між поверхнями дорівнює нулю;
- H_1 : відстань між поверхнями значуще відрізняється від нуля.

Тест-статистика:

$$t = \frac{|d_{M3C2}(p_i)|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} + \sigma_{reg}^2}}.$$

Зміну вважають статистично значущою, якщо $t > t_{\alpha/2}$, де $t_{\alpha/2}$ – критичне значення t -розподілу.

Кластеризація змін

Окремі точки, класифіковані як зміни, часто є шумом або викидами. Для виділення значущих областей змін застосовують методи кластеризації.

DBSCAN для виявлення змін

Алгоритм DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) ефективно виділяє щільні кластери змін і фільтрує шум [38].

Алгоритм 3.1.2 (DBSCAN для змін).

Вхід: точки змін $C = \{p : \text{change}(p) = 1\}$,

параметри m (радіус) та minPts (мінімальна кількість точок).

1. Для кожної точки $p \in C$:

– знайти m -окіл:

$$N_m(p) = \{q \in C : \|p - q\| < m\};$$

– якщо $|N_m(p)| \geq \text{minPts}$, позначити p як core point.

2. Об'єднати core points, що містяться в m -околах одне одного.

3. Приєднати border points до найближчих кластерів.

4. Точки, що не належать жодному кластеру, вважати шумом.

Mean Shift для виявлення змін

Mean Shift не вимагає попереднього задання кількості кластерів та автоматично визначає їх форму [39].

Визначення 3.1.4 (Mean Shift вектор).

Для точки x з ядром K і шириною вікна h :

$$m(x) = \frac{\sum_{x_i \in C} K\left(\frac{\|x - x_i\|^2}{h^2}\right) x_i}{\sum_{x_i \in C} K\left(\frac{\|x - x_i\|^2}{h^2}\right)} - x.$$

Алгоритм ітеративно зміщує кожну точку у напрямку збільшення щільності до збіжності.

3.2. Методи на основі сегментації

Методи на основі сегментації працюють не з окремими точками, а з об'єктами чи сегментами, що дозволяє більш надійно виявляти структурні зміни [40].

Математична модель сегментації

Визначення 3.2.1 (сегментація хмари точок).

Сегментація – це розбиття хмари точок P на непересічні підмножини: $P = \bigcup_{i=1}^k S_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ для $i \neq j$, де кожний сегмент S_i відповідає окремому об'єкту або частині поверхні.

Критерії сегментації включають такі вимоги:

- **геометрична однорідність** – точки належать одній площині або примітиву;
- **просторова зв'язність** – точки утворюють зв'язну область;
- **семантична спільність** – точки мають схожі атрибути (колір, інтенсивність).

Порівняння сегментів

Після сегментації обох хмар точок порівнюють відповідні сегменти [41].

Визначення 3.2.2 (відповідність сегментів).

Сегменти $S_i^{(t_1)} \subset P^{(t_1)}$ та $S_j^{(t_2)} \subset Q^{(t_2)}$ вважають відповідними, якщо

$$\text{IoU}(S_i^{(t_1)}, S_j^{(t_2)}) = \frac{|S_i^{(t_1)} \cap S_j^{(t_2)}|}{|S_i^{(t_1)} \cup S_j^{(t_2)}|} > \theta,$$

де IoU – Intersection over Union; θ – поріг (типово 0,5).

Алгоритм 3.2.1 (виявлення змін на основі сегментів).

1. Сегментувати $P^{(t_1)} \rightarrow \{S_1^{(t_1)}, \dots, S_m^{(t_1)}\}$.
2. Сегментувати $Q^{(t_2)} \rightarrow \{S_1^{(t_2)}, \dots, S_n^{(t_2)}\}$.
3. Для кожного сегмента $S_i^{(t_1)}$:
 - знайти найкращу відповідність:

$$j^* = \operatorname{argmax}_j \text{IoU}(S_i^{(t_1)}, S_j^{(t_2)});$$

– якщо $\text{IoU}(S_i^{(t_1)}, S_j^{(t_2)}) < \theta$, позначити як «зниклий»;

– інакше порівняти геометричні властивості для виявлення деформацій.

4. Для кожного незіставленого $S_j^{(t_2)}$ позначити як «новий».

Графові подання і порівняння

Для аналізу топологічних змін використовують графові моделі.

Визначення 3.2.3 (граф сусідства сегментів). Граф

$$G = (V, E),$$

де $V = \{S_1, \dots, S_k\}$ – вершини відповідають сегментам; $E = \{(S_i, S_j) : \text{adjacent}(S_i, S_j)\}$ – ребра з'єднують сусідні сегменти.

Функція сусідства може ґрунтуватися на відстані між центроїдами, спільній межі або семантичних зв'язках.

Алгоритм 3.2.2 (порівняння графів для виявлення змін).

1. Побудувати графи $G^{(t_1)}$ та $G^{(t_2)}$.
2. Знайти ізоморфні підграфи (незмінні структури).
3. Виявити:
 - додані/видалені вершини (об'єкти);
 - змінені ребра (топологічні зміни);
 - модифіковані атрибути вершин (геометричні зміни).

3.3. Імовірнісні підходи

Імовірнісні методи явно моделюють невизначеність вимірювань і надають не лише бінарну класифікацію змін, але й оцінку впевненості.

Байєсівська модель змін

Визначення 3.3.1 (байєсівська модель). Нехай $\mathbf{z}_i^{(t)}$ – спостереження у точці i в момент t , c_i – індикатор зміни.

- Апостеріорна ймовірність зміни:

$$P(c_i = 1 | \mathbf{z}_i^{(t_1)}, \mathbf{z}_i^{(t_2)}) = \frac{P(\mathbf{z}_i^{(t_1)}, \mathbf{z}_i^{(t_2)} | c_i = 1) P(c_i = 1)}{P(\mathbf{z}_i^{(t_1)}, \mathbf{z}_i^{(t_2)})}.$$

- Правдоподібність за умови відсутності змін:

$$P(\mathbf{z}_i^{(t_1)}, \mathbf{z}_i^{(t_2)} | c_i = 0) = N(\mathbf{z}_i^{(t_1)} - \mathbf{z}_i^{(t_2)}; 0, \Sigma_{\text{noise}}).$$

- Правдоподібність за умови зміни:

$$P(\mathbf{z}_i^{(t_1)}, \mathbf{z}_i^{(t_2)} | c_i = 1) = U(\mathbf{z}_i^{(t_1)}) \cdot U(\mathbf{z}_i^{(t_2)}),$$

де U – рівномірний розподіл у просторі спостережень.

Теорія Демпстера–Шефера

Теорія Демпстера–Шефера дозволяє явно моделювати невизначеність і комбінувати свідчення з різних джерел.

Визначення 3.3.2 (функція маси імовірності).

Для гіпотез $\Theta = \{\text{зміна, без змін}\}$ визначають

$$m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1,$$

де $m(A)$ – маса імовірності, приписана підмножині A .

Правило комбінування Демпстера:

$$(m_1 \oplus m_2)(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - K},$$

де $K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$ – міра конфлікту.

Оцінка невизначеності

Для кожного рішення про зміну важливо оцінити рівень впевненості.

Визначення 3.3.3 (ентропія рішення). Невизначеність класифікації у точці

$$H(p_i) = - \sum_{c \in \{0,1\}} P(c_i = c | \mathbf{z}_i) \log P(c_i = c | \mathbf{z}_i).$$

Високі значення ентропії вказують на невпевненість у класифікації.

Методи Монте-Карло для оцінювання невизначеності змін

Щоб врахувати похибки реєстрації та вимірювань, використовують методи Монте-Карло.

Алгоритм 3.3.1 (метод Монте-Карло для оцінювання невизначеності змін).

1. Для $k = 1, \dots, N$:
 - згенерувати збурені версії хмар:

$$\tilde{P}^{(k)} = P + \varepsilon_p^{(k)}, \quad \tilde{Q}^{(k)} = Q + \varepsilon_Q^{(k)};$$

- згенерувати збурення реєстрації:

$$\tilde{T}^{(k)} = T + \delta T^{(k)};$$

- обчислити зміни:

$$P(\text{change}_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}[i \in C^{(k)}].$$

- Оцінити ймовірність зміни:

$$P(\text{change}_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}[i \in C^{(k)}].$$

- Обчислити довірчі інтервали для параметрів змін.

Порівняння методів

Порівняльний аналіз різних категорій методів виявлення змін (табл. 2) ґрунтується на експериментальних результатах і теоретичних характеристиках, описаних у літературі [5, 6, 8].

Переваги й недоліки за такими категоріями:

Прямі методи:

- *Переваги:* простота реалізації, швидкість обчислень, прямий зв'язок з фізичними змінами.

- *Недоліки:* висока чутливість до шуму і похибок реєстрації, складність вибору порогів.

- *Застосування:* попередній аналіз, моніторинг у реальному часі, великі території.

Методи на основі сегментації:

- *Переваги:* робастність до локального шуму, збереження об'єктної структури, можливість семантичного аналізу.

- *Недоліки:* залежність від якості сегментації, втрата дрібних деталей, обчислювальна складність.

- *Застосування:* міські сцени, моніторинг будівель, аналіз інфраструктури.

Імовірнісні підходи:

- *Переваги:* оцінка невизначеності, інтеграція різних джерел даних, статистична обґрунтованість.

- *Недоліки:* висока обчислювальна складність, потреба в калібруванні моделей, складність інтерпретації.

- *Застосування:* критичні об'єкти, наукові дослідження, прийняття рішень з оцінкою ризиків.

Таблиця 2. Порівняння методів виявлення змін

Характеристика	Прямі методи	Методи на основі сегментації	Імовірнісні підходи
Обчислювальна складність	Середня	Висока	Дуже висока
Точність виявлення	Середня	Висока	Висока
Стійкість до шуму	Низька	Середня-висока	Висока
Вимоги до даних	Мінімальні	Потребують якісної сегментації	Потребують статистичних моделей
Інтерпретовність	Висока	Середня	Низька-середня
Час обробки	Швидко (секунди)	Середньо (хвилини)	Повільно (години)

4. Сучасні підходи машинного навчання

Останнє десятиліття ознаменувалося революційними змінами у сфері обробки тривимірних даних завдяки розвитку спеціалізованих архітектур глибокого навчання. На відміну від зображень, хмари точок не мають регулярної структури, що створювало фундаментальні виклики для застосування традиційних згорткових мереж. Розроблення нових архітектур, адаптованих до неструктурованої природи 3D-даних, відкрило нові можливості для автоматизованого виявлення змін із безпрецедентною точністю.

Піонерська робота PointNet [2] вирішила проблему неупорядкованості хмар точок через застосування симетричної функції агрегації.

Архітектура PointNet:

$$f(\{x_1, \dots, x_n\}) = \gamma \circ g(h(x_1), \dots, h(x_n)),$$

де $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$ – поточкова функція (MLP) для видобування локальних ознак; g – симетрична функція (max pooling); γ – фінальна обробка.

Архітектура PointNet++ [42] розширює базову архітектуру ієрархічним підходом за допомогою модуля Set Abstraction, що складається із:

1. Семплювання – вибір N' центроїдів з N точок (Farthest Point Sampling).
2. Групування – формування локальних околів радіуса r .
3. PointNet – обробка кожного локального околу:

$$f_{l+1} = \text{SetAbstraction}(N_l, C_l, f_l) \rightarrow (N_{l+1}, C_{l+1}, f_{l+1}),$$

де N_l – кількість точок; C_l – розмірність ознак; f_l – ознаки на рівні l .

Графові нейронні мережі є альтернативним підходом, вони природним чином моделюють локальну структуру хмар точок [3].

Для хмари P будемо граф $G = (V, E)$:

- $V = P$ – вершини відповідають точкам;
- $E = \{(p_i, p_j) : p_j \in \text{kNN}(p_i)\}$ – ребра

з'єднують k найближчих сусідів.

Тоді операція згортки на графі (GCN) може бути визначена як

$$h_i^{(l+1)} = \sigma \left(\sum_{j \in N(i)} W^{(l)} h_j^{(l)} + b^{(l)} \right),$$

де $h_i^{(l)}$ – ознаки вершини i на шарі l ; $N(i)$ – множина сусідів; $W^{(l)}$, $b^{(l)}$ – параметри, що навчаються.

Dynamic Graph CNN (DGCNN) [3] оновлює граф після кожного шару:

$$h_i^{(l+1)} = \max_{j \in N^{(l)}(i)} \text{MLP}^{(l)}(h_i^{(l)}, h_j^{(l)} - h_i^{(l)}),$$

де $N^{(l)}(i)$ – динамічні сусіди у просторі ознак шару l . Архітектура трансформерів [43] може

бути адаптована для обробки хмар точок, дозволяючи моделювати глобальні залежності.

Point Transformer [44] використовує векторну увагу:

$$y_i = \sum_{j \in N(i)} \rho(\gamma(f_i - f_j + \delta)) \odot (\alpha(f_j) + \delta),$$

де f_i – ознаки точки i ; γ , α – лінійні проєкції; ρ – softmax нормалізація; δ – позиційне кодування.

Трансформери дозволяють моделювати «далекі» залежності, забезпечують паралельну обробку й адаптивну рецептивну область.

Ще одна архітектура – сіамські мережі (Siamese Networks) [4] – ефективна для безпосереднього порівняння двох хмар точок без явної реєстрації. Сіамська мережа складається із:

- двох ідентичних енкoderів зі спільними

вагами: $f_\theta : P \rightarrow \mathbb{R}^d$;

- модуля порівняння: $g_\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$.

Така архітектура забезпечує експериментальні результати, кращі за інші відомі методи:

- на наборі даних URB3DCD – покращення метрики IoU (Intersection over Union) на 27 пунктів порівняно з іншими методами машинного навчання [4];

- SiamPointNet++ на даних Rotterdam – перевага над об'єктними методами, менше гіперпараметрів.

Особливості розглянутих архітектур нейронних мереж для хмар точок зведено у табл. 3.

Іншим аспектом, критичним для ефективного навчання моделей виявлення змін, є правильний вибір функції втрат.

Для задач реконструкції та порівняння хмар точок як функцію втрат зазвичай використовують Chamfer Distance [51]:

Таблиця 3. Порівняння методів виявлення змін

Архітектура	Інваріантність до порядку	Локальний контекст	Глобальний контекст	Складність	Точність
PointNet	✓	✗	✓	Середня	Середня
PointNet++	✓	✓	✓	Висока	Висока
DGCNN	✓	✓	✓	Дуже висока	Висока
Point Transformer	✓	✓	✓	Дуже висока	Дуже висока
Siamese KPConv	✓	✓	✓	Висока	Найвища для змін

$$L_{CD}(P, Q) = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \min_{q \in Q} \|p - q\|^2 + \frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} \min_{p \in P} \|q - p\|^2,$$

або її модифікації – Weighted Chamfer для врахування важливості точок чи Robust Chamfer, де замість L2 використано норму Huber.

5. Практичні аспекти та експерименти

Перехід від теоретичних моделей до практичного застосування методів виявлення змін у 3D-середовищі вимагає враховувати численні фактори, що впливають на ефективність алгоритмів. У цьому розділі опишемо порівняльне дослідження різних методів на реальних наборах даних і метрики оцінювання якості, що дозволяють об'єктивно оцінити продуктивність алгоритмів.

Таблиця 4. Набори даних, використані для тестування методів виявлення змін

Назва	Опис
URB3DCD [45]	П'ять наборів пар анотованих хмар точок міської забудови; дані отримано за допомогою симуляції, завдяки чому відомий також і рівень шуму серед цих даних
AHN-CD [46]	Цифрова карта висот території Нідерландів за чотири часові періоди

Щоб оцінити методи бінарної класифікації змін, використовують метрики на основі матриці помилок (табл. 5) [6].

Таблиця 5. Матриця помилок для виявлення змін

Факт	Передбачення: є зміни	Передбачення: без змін
Є зміни	True Positive (TP)	False Negative (FN)
Без змін	False Positive (FP)	True Negative (TN)

Такими метриками є:

- точність (Precision) – вимірює кількість правильно знайдених результатів:

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP};$$

- повнота (Recall) – вимірює кількість знайдених правильних результатів:

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN};$$

- F1-score – збалансовано комбінує точність і повноту в одне значення:

$$\text{F1-score} = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}};$$

- IoU (Intersection-over-Union) – вимірює перетин між передбаченою областю змін і реальною областю змін, поділений на їх об'єднання:

$$\text{IoU} = \frac{TP}{TP + FP + FN}.$$

У загальному випадку, коли є декілька класів прогнозованих змін, використовують усереднений IoU (mean IoU):

$$\text{mean IoU} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{IoU}_i,$$

де n – кількість класів змін.

Щоб оцінити просторову точність і стабільність реєстрації, у тривимірних даних застосовують спеціалізовану метрику – рівень виявлення (Level of Detection, LoD). Вона дозволяє визначити найменше значущє зміщення, яке може бути достовірно виявлене між двома епохами вимірювань з урахуванням внутрішньої варіації та похибки реєстрації. Згідно з [1] рівень виявлення з 95 % довірчим інтервалом розраховують так:

$$\text{LoD}_{95\%} = \pm 1.96 \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B} + \sigma_{reg}^2},$$

де σ_A^2 , σ_B^2 – дисперсії вимірювань позицій точок в епохах А та В; n_A , n_B – кількість точок; σ_{reg} – похибка реєстрації хмар точок у спільній системі координат.

Порівняння методів

У розглянутій літературі згадується небагато методів виявлення змін, які аналізують без-

посередньо хмари тривимірних точок. З-поміж знайдених звітів фігурують такі методи, як C2C [36], M3C2 [1], Random Forest [47], Unsupervised Siamese KPConv [48], Supervised Siamese KPConv [4]. Числові характеристики їх роботи наведено у табл. 6.

Рекомендації з вибору методу виявлення змін

Експериментальне порівняння методів виявлення змін у 3D-даних демонструє, що немає універсального рішення для всіх застосувань. Вибір оптимального методу залежить від специфіки задачі, характеристик даних та обчислювальних ресурсів. Сучасні методи глибинного навчання показують найкращі результати за точністю, але вимагають значних обчислювальних ресурсів, а у випадку керованого навчання – анованих даних. Геометричні методи залишаються актуальними для задач, де важливі інтерпретовність і швидкість обробки. Отже, перспективним напрямом можна вважати розробку гібридних підходів, які поєднують переваги різних типів методів.

Висновки

Проведений аналіз методів виявлення змін у 3D-середовищі показує поступовий розвиток математичних моделей та алгоритмів. З-поміж помітних результатів можна виділити метрику M3C2 для статистичного порівняння поверхонь, удосконалення методів реєстрації від ICP до алгоритмів глобальної реєстрації та адаптацію архітектури глибинного навчання для обробки хмар точок. Сіамські мережі продемонстрували покращення метрики IoU порівняно із традиційними методами. Розроблені підходи застосовують у моніторингу міської інфраструктури, контролі промислових об'єктів та екологічних дослідженнях.

Водночас є низка нерозв'язаних проблем. Обчислювальна складність більшості методів обмежує їх використання для великих наборів даних. Підтримка моделі цифрового двійника середовища в актуальному стані потребує розробки нових алгоритмів. Неповнота даних через оклюзії та варіативність щільності точок при використанні різних сенсорів та за різно-

Таблиця 6. Порівняння методів виявлення змін

Клас методу→			Distance-based	Distance-based	Distance-based	Machine Learning	Deep Learning	Deep Learning
Метод→							Unsupervised	Supervised
Рік і джерело↓	Набір даних↓	Метрика↓	C2C	M3C2 + 2 класи змін	M3C2 + 3 класи змін	Random Forest	Siamese KPConv transfer	Siamese KPConv
(2021) [45]	URB3DCD	mean IoU	0,5	0,34	0,3	0,64	-	-
(2023) [48]	AHN-CD	mean IoU	0,65	0,43	-	0,67	0,7	0,9
		time	5s	5s	-	3min	25s	25s

го рівня освітлення ускладнюють порівняння. Більшість методів фокусується на геометричних змінах без урахування семантичного контексту.

Можливими напрямками розвитку є комбінування геометричних методів з підходами машинного навчання, використання методів самонавчання для зменшення потреби в анованих даних, інтеграція систем виявлення змін з цифровими моделями середовища і до-

слідження можливостей трансформерів і графових мереж для обробки 3D-даних. Ці підходи можуть частково вирішити наявні обмеження.

Подальший розвиток галузі потребує створення стандартизованих тестових наборів даних для об'єктивного порівняння методів, співпраці між дослідниками з різних груп і доступності програмних реалізацій. Такий підхід сприятиме поступовому вдосконаленню методів виявлення змін у 3D-середовищі.

References

- [1] D. Lague *et al.*, “Accurate 3D comparison of complex topography with terrestrial laser scanner: Application to the Rangitikei canyon (N–Z)”, *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 82, pp. 10–26, Aug. 2013. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2013.04.009.
- [2] R.Q. Charles *et al.*, “PointNet: Deep Learning on Point Sets for 3D Classification and Segmentation”, in *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Honolulu, HI: IEEE, pp. 77–85, July 2017. doi: 10.1109/CVPR.2017.16.
- [3] Y. Wang *et al.*, “Dynamic Graph CNN for Learning on Point Clouds,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 38, no. 5, pp. 1–12, Oct. 2019, doi: 10.1145/3326362.
- [4] I. De Gélis *et al.*, “Siamese KPConv: 3D multiple change detection from raw point clouds using deep learning”, *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 197, pp. 274–291, Mar. 2023. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2023.02.001.
- [5] U. Stilla and Y. Xu, “Change detection of urban objects using 3D point clouds: A review”, *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 197, pp. 228–255, Mar. 2023. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2023.01.010.
- [6] A. Shafique *et al.*, “Deep Learning-Based Change Detection in Remote Sensing Images: A Review,” *Remote Sens.*, vol. 14, no. 4, p. 871, Feb. 2022. doi: 10.3390/rs14040871.
- [7] R. Qin *et al.*, “3D change detection – Approaches and applications” *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 122, pp. 41–56, Dec. 2016. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2016.09.013.
- [8] A. Kharroubi *et al.*, “Three Dimensional Change Detection Using Point Clouds: A Review,” *Geomatics*, vol. 2, no. 4, pp. 457–485, Oct. 2022. doi: 10.3390/geomatics2040025.
- [9] C. Andresen and E. Schultz-Fellenz, “Change Detection Applications in the Earth Sciences Using UAS-Based Sensing: A Review and Future Opportunities”, *Drones*, Apr. 2023. doi: 10.3390/DRONES7040258.
- [10] E.P. Herrera-Granda *et al.*, “Monocular visual SLAM, visual odometry, and structure from motion methods applied to 3D reconstruction: A comprehensive survey”, *Heliyon*, vol. 10, no. 18, p. e37356, Sept. 2024. doi: 10.1016/j.heliyon.2024.e37356.
- [11] H. Fan *et al.*, “A Point Set Generation Network for 3D Object Reconstruction from a Single Image”, in *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Honolulu, HI: IEEE, pp. 2463–2471, July 2017. doi: 10.1109/CVPR.2017.264.
- [12] J. Gehring *et al.*, “A VOXEL-BASED METADATA STRUCTURE FOR CHANGE DETECTION IN POINT CLOUDS OF LARGE-SCALE URBAN AREAS”, *ISPRS Ann. Photogramm. Remote Sens. Spat. Inf. Sci.*, vol. IV-2, pp. 97–104, May 2018. doi: 10.5194/isprs-annals-IV-2-97-2018.
- [13] M.M. Bronstein and I. Kokkinos, “Scale-invariant heat kernel signatures for non-rigid shape recognition”, in *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, CA, USA: IEEE, pp. 1704–1711, June 2010. doi: 10.1109/CVPR.2010.5539838.
- [14] F. Pomerleau *et al.*, “A Review of Point Cloud Registration Algorithms for Mobile Robotics”, *Found. Trends® Robot.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–104, 2015. doi: 10.1561/23000000035.
- [15] P.J. Besl and N.D. McKay, “A method for registration of 3-D shapes”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 14, no. 2, pp. 239–256, Feb. 1992. doi: 10.1109/34.121791.
- [16] Y. Chen and G. Medioni, “Object modelling by registration of multiple range images”, *Image Vis. Comput.*, vol. 10, no. 3, pp. 145–155, Apr. 1992. doi: 10.1016/0262-8856(92)90066-C.
- [17] Q.-Y. Zhou *et al.*, “Fast Global Registration”, in *Computer Vision – ECCV 2016*, vol. 9906, B. Leibe, J. Matas, N. Sebe, and M. Welling, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 766–782. Accessed: July 30, 2025. [Online]. Retrieved from: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-46475-6_47
- [18] P.J. Huber, “Robust Estimation of a Location Parameter”, *Ann. Math. Stat.*, vol. 35, no. 1, pp. 73–101, Mar. 1964, doi: 10.1214/aoms/1177703732.
- [19] A.E. Beaton and J.W. Tukey, “The Fitting of Power Series, Meaning Polynomials, Illustrated on Band-Spectroscopic Data”, *Technometrics*, vol. 16, no. 2, pp. 147–185, May 1974. doi: 10.1080/00401706.1974.10489171.
- [20] B.K.P. Horn *et al.*, “Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 5, no. 7, p. 1127, July 1988. doi: 10.1364/JOSAA.5.001127.
- [21] A. Myronenko and Xubo Song, “Point Set Registration: Coherent Point Drift”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 32, no. 12, pp. 2262–2275, Dec. 2010. doi: 10.1109/TPAMI.2010.46.
- [22] S. Rusinkiewicz and M. Levoy, “Efficient variants of the ICP algorithm”, in *Proceedings Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, Quebec City, Que., Canada: IEEE Comput. Soc, 2001, pp. 145–152. doi: 10.1109/IM.2001.924423.
- [23] G.K.L. Tam *et al.*, “Registration of 3D Point Clouds and Meshes: A Survey from Rigid to Nonrigid”, *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, vol. 19, no. 7, pp. 1199–1217, July 2013. doi: 10.1109/TVCG.2012.310.
- [24] Z. Zhang, “Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces”, *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 13, no. 2, pp. 119–152, Oct. 1994. doi: 10.1007/BF01427149.
- [25] K.-L. Low, “Linear Least-Squares Optimization for Point-to-Plane ICP Surface Registration”.

- [26] S. Rusinkiewicz, “A symmetric objective function for ICP”, *ACM Trans. Graph.*, vol. 38, no. 4, pp. 1–7, Aug. 2019, doi: 10.1145/3306346.3323037.
- [27] A. Segal *et al.*, “Generalized-ICP”, in *Robotics: Science and Systems V, Robotics: Science and Systems Foundation*, June 2009. doi: 10.15607/RSS.2009.V.021.
- [28] Y. Guo *et al.*, “3D Object Recognition in Cluttered Scenes with Local Surface Features: A Survey”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 36, no. 11, pp. 2270–2287, Nov. 2014. doi: 10.1109/TPAMI.2014.2316828.
- [29] R.B. Rusu *et al.*, “Fast Point Feature Histograms (FPFH) for 3D registration”, in *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Kobe: IEEE, pp. 3212–3217, May 2009. doi: 10.1109/ROBOT.2009.5152473.
- [30] D. Hutchison *et al.*, “Unique Signatures of Histograms for Local Surface Description”, in *Computer Vision – ECCV 2010*, vol. 6313, K. Daniilidis, P. Maragos, and N. Paragios, Eds., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 356–369. Accessed: July 30, 2025. [Online]. Retrieved from: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-15558-1_26
- [31] M.A. Fischler and R.C. Bolles, “Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography”, *Commun. ACM*, vol. 24, no. 6, pp. 381–395, June 1981. doi: 10.1145/358669.358692.
- [32] J. Lawrence *et al.*, “A Purely Algebraic Justification of the Kabsch-Umeyama Algorithm”, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, vol. 124, p. 124028, Oct. 2019. doi: 10.6028/jres.124.028.
- [33] D. Aiger *et al.*, “4-points congruent sets for robust pairwise surface registration”, in *ACM SIGGRAPH 2008 papers*, Los Angeles California: ACM, pp. 1–10, Aug. 2008. doi: 10.1145/1399504.1360684.
- [34] N. Mellado *et al.*, “Super 4PCS Fast Global Pointcloud Registration via Smart Indexing”, *Comput. Graph. Forum*, vol. 33, no. 5, pp. 205–215, Aug. 2014. doi: 10.1111/cgf.12446.
- [35] S. Huang *et al.*, “PREDATOR: Registration of 3D Point Clouds with Low Overlap”, in *2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Nashville, TN, USA: IEEE, pp. 4265–4274, June 2021. doi: 10.1109/CVPR46437.2021.00425.
- [36] D. Girardeau-Montaut *et al.*, “CHANGE DETECTION ON POINTS CLOUD DATA ACQUIRED WITH A GROUND LASER SCANNER”, 2005.
- [37] R. Lindenbergh and P. Pietrzyk, “Change detection and deformation analysis using static and mobile laser scanning”, *Appl. Geomat.*, vol. 7, no. 2, pp. 65–74, June 2015. doi: 10.1007/s12518-014-0151-y.
- [38] M. Ester *et al.*, “A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise”.
- [39] D. Comaniciu and P. Meer, “Mean shift: a robust approach toward feature space analysis”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, May 2002. doi: 10.1109/34.1000236.
- [40] G. Vosselman *et al.*, “Contextual segment-based classification of airborne laser scanner data”, *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 128, pp. 354–371, June 2017. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2017.03.010.
- [41] Y. Xu *et al.*, “Pairwise coarse registration of point clouds in urban scenes using voxel-based 4-planes congruent sets”, *ISPRS J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 151, pp. 106–123, May 2019. doi: 10.1016/j.isprsjprs.2019.02.015.
- [42] C.R. Qi *et al.*, “PointNet++: Deep Hierarchical Feature Learning on Point Sets in a Metric Space”, June 07, 2017, arXiv: arXiv:1706.02413. doi: 10.48550/arXiv.1706.02413.
- [43] A. Vaswani *et al.*, “Attention Is All You Need”, 2017, arXiv. doi: 10.48550/ARXIV.1706.03762.
- [44] H. Zhao *et al.*, “Point Transformer”, in *2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Montreal, QC, Canada: IEEE, pp. 16239–16248, Oct. 2021. doi: 10.1109/ICCV48922.2021.01595.
- [45] I. De Gélis *et al.*, “Change Detection in Urban Point Clouds: An Experimental Comparison with Simulated 3D Datasets”, *Remote Sens.*, vol. 13, no. 13, p. 2629, July 2021. doi: 10.3390/rs13132629.
- [46] C.V.D. Sande *et al.*, “Assessment of Relative Accuracy of AHN-2 Laser Scanning Data Using Planar Features”, *Sensors*, vol. 10, no. 9, pp. 8198–8214, Sept. 2010. doi: 10.3390/s100908198.
- [47] T. Tran *et al.*, “Integrated Change Detection and Classification in Urban Areas Based on Airborne Laser Scanning Point Clouds”, *Sensors*, vol. 18, no. 2, p. 448, Feb. 2018. doi: 10.3390/s18020448.
- [48] I. De Gélis *et al.*, “Deep unsupervised learning for 3D ALS point clouds change detection”, *ISPRS Open J. Photogramm. Remote Sens.*, vol. 9, p. 100044, Aug. 2023. doi: 10.1016/j.ophoto.2023.100044.

O.R. Chertov, S.Yu. Sakharov

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS AND METHODS FOR 3D ENVIRONMENT CHANGE DETECTION FROM IMAGERY

Background. Automated detection of changes in threedimensional (3D) environments constitutes a fundamental challenge in the development and maintenance of urban infrastructure digital twins, environmental monitoring systems, and facility security applications. Current methodologies exhibit limitations in uncertainty quantification, computational scalability for extensive datasets, and semantic information integration. Existing reviews predominantly emphasise technical implementations or domain-specific applications, with insufficient

attention to the particularities of the mathematical methods used. This gap impedes the principled selection of algorithms for digital twin actualisation.

Objective. To provide a comprehensive systematisation and comparative analysis of mathematical models and computational methods for three-dimensional environmental change detection. To establish a taxonomic framework that delineates methodological advantages, constraints, and applicability domains. To formulate evidence-based recommendations for method selection across diverse monitoring scenarios of 3D environment.

Methods. We conducted a systematic analysis encompassing classical geometric approaches for point cloud registration and comparison, statistical frameworks for uncertainty quantification, and contemporary machine learning paradigms for automated change classification. Formal mathematical representations were developed for three-dimensional data structures, change typologies, and corresponding evaluation metrics.

Results. The unified mathematical framework for characterising diverse change phenomena in three-dimensional environments was established, providing a theoretical foundation for automated digital twin synchronisation. Method selection criteria were derived based on data properties and application-specific requirements. Empirical evidence demonstrates that hybrid architectures integrating geometric primitives with machine learning techniques achieve superior accuracy while preserving interpretability in digital environment model updates.

Conclusions. The proposed systematic framework facilitates principled method selection for specific change detection applications. Future research directions include the development of self-adaptive algorithms with autonomous parameter optimisation and the incorporation of semantic reasoning through advanced deep learning architectures.

Keywords: 3D environment changes; point clouds; digital twin; computer vision; machine learning.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
22 червня 2025 року

Прийнята до публікації
08 вересня 2025 року