

DOI: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

УДК 517.2

В.П. Легеза\*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

\*Відповідальний автор: victor.legeza@gmail.com

## ПАРАДОКСАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЇ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ У ЗАДАЧІ ПЕРЕХОПЛЕННЯ ВТІКАЧА НА ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

**Проблематика.** Крива переслідування – це лінія, уздовж якої рухається переслідувач під час переслідування втікача. Розглядається новий підхід до побудови, інтегрування та аналізу диференціального рівняння кривої переслідування у класичній задачі перехоплення втікача на площині. У запропонованому формулюванні він є новим і актуальним із практичної точки зору у таких сферах, як транспорт, логістика, військова справа, спортивні заходи тощо.

**Мета дослідження.** Метою роботи є визначення оптимального кута нахилу прямої, по якій має рухатись втікач, щоб максимально наблизитися до лінії «життя» до його затримання переслідувачем.

**Методика реалізації.** Для досягнення поставленої мети використовувалися класичні методи інтегрування диференціальних рівнянь у параметричній формі, а також графічно-числовий інструментарій, який надає пакет програмного забезпечення MathCad.

**Результати дослідження.** Сформульовано диференціальне рівняння кривої переслідування і встановлено його розв'язок у замкненій параметричній формі. Проведено його числовий аналіз і досліджено вплив параметрів  $\alpha$  (співвідношення швидкостей переслідувача і втікача) та  $k$  на поведінку кривої переслідування. Проаналізовано залежність зміни відстані  $x(0, k, \alpha)$  уздовж горизонтальної осі  $OX$  на момент затримання втікача залежно від величини кутового коефіцієнта  $k$  прямої його руху за фіксованого коефіцієнта  $\alpha$ .

**Висновки.** У результаті дослідження з'ясовано, що якщо коефіцієнт  $\alpha \rightarrow \infty$  (тобто швидкість переслідувача значно перевищує швидкість втікача), то відстань  $x(0, k, \alpha)$ , на якій останнього буде затримано, прямує до нуля. З іншого боку, якщо  $\alpha \rightarrow 1$  (тобто швидкість катерів є однаковою), то зазначена відстань прямує у нескінченність, тобто затримання втікача не відбудеться. Залежність зміни відстані  $x(0, k, \alpha)$  уздовж горизонтальної осі  $OX$  від коефіцієнта  $k$  має чітко виражений локальний максимум за умови  $k \neq 0$ , який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої втечі, який дає можливість втікачу досягти максимального переміщення  $x(0, k, \alpha)$  у бік «лінії життя». Таким чином, спостерігаємо парадоксальне явище: для вдалої втечі стратегія вибору кута нахилу прямої, який дорівнює нулю (тобто рух по найкоротшому відрізьку, що з'єднує дві паралельні лінії), не є правильною.

**Ключові слова:** перехоплення втікача на площині; крива переслідування; катер-переслідувач; катер-втікач; лінія втечі; лінія життя; швидкість катерів; локальний максимум.

### Вступ

Запропонована робота є продовженням попередніх досліджень автора [23–25] у межах різноманітних задач переслідування.

У цій статті розглянуто актуальну задачу побудови математичної моделі процесу переслідування втікача на площині з пошуком оптимального кута нахилу лінії втечі з метою уникнення втікачем захоплення на найдовшому відрізьку у заданому напрямку. Нова постановка задачі дозволяє встановити нові власти-

вості кривої переслідування та отримані з неї характеристики, які впливають на здатність втікача уникнути захоплення у процесі втечі на найдовшій горизонтальній відстані у бік «лінії життя». Як з'ясувалося у процесі дослідження, на основі кількісного та якісного аналізу впливу характеристик кривої переслідування можна оптимально змодельовати стратегію такої втечі, яка є парадоксальною. Математична модель дозволяє підібрати оптимальний кут нахилу лінії втечі, що і забезпечує зазначений вище рух втікача.

**Пропозиція для цитування цієї статті:** В.П. Легеза, “Парадоксальні властивості лінії переслідування у задачі перехоплення втікача на горизонтальній площині”, *Наукові вісті КПІ*, № 1, с. 7–14, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

**Offer a citation for this article:** Viktor Legeza, “Paradoxical properties of the line of pursuit in the problem of intercepting a fugitive on a horizontal plane”, *KPI Science News*, no. 1, pp. 7–14, 2025. doi: 10.20535/kpissn.2025.1.321963

Наведемо стислий огляд літературних джерел і перейдемо до розгорнутої постановки задачі.

### Огляд літературних джерел

Задачі переслідування, ймовірно, виникли і досліджувалися ще з часів Леонардо да Вінчі – саме він був першим вченим, хто дослідив цю задачу у випадку, коли втікач рухався по горизонтальній прямій. Більш загальний випадок досліджував французький вчений П'єр Бугер у 1732 р. [1–4]. Задача полягала у тому, щоби знайти криву переслідування торгового судна піратським кораблем, при цьому припускалося, що значення швидкості двох суден завжди перебувають в однаковому співвідношенні.

У роботах [4–7] було розглянуто відому задачу про «переслідування чотирьох мишей». Припустимо, чотири миші розміщені у кожному з чотирьох кутів квадратного столу, і кожна миша біжить до тієї, що праворуч від неї. Потрібно знайти параметричні криві, які описують траєкторію руху кожної миші. Розв'язками цієї задачі будуть спіральні траєкторії, які збігаються до центру столу.

У роботі [8] було розглянуто детерміноване неперервне переслідування, в якому  $n$  мурах женуться одна за одною по колу та мають наперед задані змінні швидкості. Розглядаються також два дискретні аналогі, в яких цвіркун (або жаба) циклічно переслідують іншого цвіркуна (або жабу) з постійною та однаковою швидкістю. Досліджується можлива еволюція цього руху у міру того, як час прямує до нескінченності: зіткнення, граничні точки, стан рівноваги і періодичний рух.

У роботі [9] подано просту математичну модель локальної взаємодії колонії мурах чи інших природних або штучних істот з великим «відчуттям глобальної геометрії» для того, щоб знайти прямий шлях від мурашника до їжі. Ця задача теж розглядалась у межах загальної задачі переслідування  $n$  мурах.

У роботі [10] досліджується рух довільного набору точок (або жуків) на площині, що переслідують одна одну у циклічному переслідуванні. Показано, що для регулярних центрально-симетричних конфігурацій аналітичні рішення легко отримати шляхом переходу до відповідної обертової системи відліку. Обговорено декілька випадків несиметричних конфігурацій. Зокрема, показано, що для трьох жуків у трикутній конфігурації центральнообертової системи координат, відносно якої жуки не мають тангенціальної

швидкості, є точкою колапсу і збігається з однією із двох точок Брокара у трикутнику. Для випадку, коли всі жуки мають однакову швидкість, доведено теорему про те, що щоразу, коли відбувається передчасне (тобто невзаємне) захоплення, зіткнення має бути лобовим. Ця теорема застосовується також до випадку конфігурацій із трьома та чотирма жуками, щоб показати, що ці системи руйнуються до певної точки, тобто захоплення є взаємним. Деякі аспекти цих результатів узагальнено на випадок систем із  $n$  жуками.

У роботі [11] досліджується рух довільної множини точок на площині, що переслідують одна одну, рухаючись по колу. Дано набір позначених точок 1, 2, 3, ...,  $n$  із координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_n, y_n)$ , а точку  $(x_i, y_i)$  вважають точкою-переслідувачем точки-втікача  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  уздовж миттєвої лінії, що їх з'єднує. Щоб замкнути цикл, точка  $(x_n, y_n)$  має переслідувати точку  $(x_1, y_1)$ . Усі точки рухаються з однаковою швидкістю. Описаний у такий спосіб рух називають рухом у «прямому часі». Якщо знак оператора похідної за часом змінено, у результаті чого точка  $(x_1, y_1)$  віддаляється від точки  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , рух називають рухом у «зворотному часі». Рух як у прямому, так і у зворотному часі вивчають за допомогою розробленої комп'ютерної програми. У прямому часі спостерігається, що врешті-решт майже у всіх випробуваних випадках точки стають колінеарними, з великим співвідношенням максимальної відстані до мінімальної незалежно від форми початкової конфігурації. У зворотному часі спостерігається, що точки, зрештою, розміщуються у вигляді зірки, причому кут вершини зірки менший від деякого числа в районі дев'яноста градусів. За допомогою аналізу, основанийого на стійкості рівнянь руху, обчислюється точне значення максимального зоряного кута як функція кількості точок.

У роботі [12] розглядається добре відома проблема, яку сьогодні продовжують аналізувати. Три (чи більше) жуків, які спочатку містяться у вершинах правильного багатокутника, починають циклічно переслідувати один одного, рухаються разом з однаковою швидкістю. Зазвичай потрібно знати відстань, пройдену кожним жуком до взаємного захоплення. Випадок чотирьох жуків є найпростішим. Через симетрію чотири жуки завжди залишаються на чотирьох вершинах квадрата. Оскільки жук-втікач Ж2 завжди рухається під прямим кутом до жука-переслідувача Ж1, швидкість захоплення для цих двох жуків залежить лише від швидкості жука Ж1. Випадок для  $n$  жуків лише трохи складніший. Задача знову

симетрична, оскільки  $n$  жуків розміщені завжди у  $n$  вершинах правильного  $n$ -кутника.

У книзі [13] наведено системні методи гри у диференціальних іграх переслідування та ухилення, досліджується обсяг і застосування ігрових процедур. Численні корисні приклади ілюструють базові й розширені концепції, включаючи захоплення, стратегію та алгебраїчну теорію. Також міститься розгляд як лінійних, так і нелінійних ігор. Розділи книги також включають стробоскопічне та ізохронне захоплення цілі, алгебраїчну теорію і стратегії вибору.

У роботі [14] запропоновано постановку задачі переслідування на площині з точки зору мультиагентного підходу. Розглядаються розбіжності, які вирізняють пропоновану постановку задачі від постановки такої задачі з точки зору теорії диференціальних ігор. Наведено перелік методів, які потрібно розробити.

У статті [15] розглянуто диференціальні ігри переслідування на площині, в яких для кожного із втікачів створено групу переслідувачів. Сформульовано задачі оптимізації груп переслідування. Побудовано числові методи розв'язання таких задач, проведено числові експерименти та проаналізовано ефективність цих методів.

У статті [16] розглядається задача переслідування із простим рухом для випадку, коли максимальна швидкість гравців однакова, а людина, що втікає, рухається по строго опуклій гладкій  $n$ -вимірній поверхні. Доведено, що завершення переслідування можливе з будь-якої вихідної позиції. Встановлено, що ухилення можливе з деяких вихідних положень, якщо гіперповерхня містить двовимірну плоску частину.

У книзі [17] розглядаються задачі із класичної теорії оптимального керування, в яких визначається оптимальне керування, яке оптимізує критерій, підпорядкований динамічному обмеженню, що виражає еволюцію стану системи під впливом керівних змінних. Якщо цей підхід поширити на випадок кількох контролерів (або гравців) з різними, а іноді й суперечливими критеріями оптимізації (функція гри), можна почати досліджувати диференціальні ігри. Диференціальні ігри з нульовою сумою, які також називають диференціальними іграми переслідування, становлять найбільш розроблену частину диференціальних ігор і ретельно досліджуються. У книзі розроблено повну теорію диференціальних ігор переслідування з повною і частковою інформацією. Розв'язуються численні конкретні ігри переслідування-ухилення (ігри «лінія життя», прості ігри переслідування тощо), а також нові

узгоджені у часі принципи оптимальності в теорії диференціальних ігор  $n$  осіб.

Книга [18] — це відомий підручник із диференціальних ігор. У ньому диференціальні ігри розглядаються як конфліктні ситуації з нескінченною множиною альтернатив, які можна описати за допомогою диференціальних рівнянь. У книзі головну увагу приділено принциповим математичним питанням, методи розв'язання ілюструються великою кількістю цікавих прикладів, які самі по собі є важливими. Запропоновано низку постановок нерозв'язаних задач.

У книзі [19] процес переслідування аналізується з військової точки зору. Як переслідувач можна розглядати ракети, літаки-перехоплювачі (або інші літальні апарати); інтелектуальний пошук військової цілі (наприклад, складів боєприпасів, танків, літаків на аеродромах тощо); підрозділ або окремого солдата, який переслідує і наближається до ворожого підрозділу або окремого солдата; кораблі, що наближаються до інших кораблів, торпеди стеження, які вибухають на ворожих кораблях. У цій роботі процес переслідування розглядався із врахуванням таких припущень: переслідувач рухається з постійною швидкістю, переслідування відбувається в заданому напрямку протягом певного інтервалу часу, і переслідувач завжди бачить втікача (ціль). Моделювання процесу переслідування спочатку виконано для плоского випадку, а потім ця модель узагальнюється на тривимірний випадок. Завдання полягає у тому, щоб визначити криву руху для переслідувача за умови, що розташування цілі є відомим.

У технічному звіті [20] наведено детальний опис впровадження чистого алгоритму стеження за кривою переслідування. Враховуючи загальний успіх алгоритму за останні роки, ймовірно, що його знову використовуватимуть у задачах наземної навігації. Звіт також включає геометричну версію методу, у ньому містяться деякі відомості про ефективність алгоритму як функції його параметрів.

У статті [21] описується переслідування третього порядку — гра в ухилення, в якій обидва гравці мають однакову швидкість і мінімальний радіус повороту. Своєрідна гра спочатку вирішується для бар'єра або оболонки станів, які можна захопити. Коли захоплення можливе, гра на певному рівні вирішується для оптимального контролю двох гравців як функції відносної позиції. Встановлено, що розв'язок задачі включає універсальну поверхню для переслідувача і поверхню розгону для тих, хто ухиляється.

У статті [22] розглядається компланарна проблема ухилення від переслідування, в якій беруть участь два переслідувача  $P_1$  та  $P_2$  та один втікач  $E$ . Втікач  $E$  ухиляється з постійною та більшою, ніж у переслідувачів, швидкістю  $w > 1$ , та має пройти між двома переслідувачами  $P_1$  та  $P_2$  з одиничною швидкістю, виграш – відстань найближчого наближення до будь-якого з переслідувачів. Це є типова задача двох гравців з нульовою сумою з теорії ігор. Керуючими змінними обрано напрямки швидкості  $P_1$ ,  $P_2$  та  $E$ . Отримано замкнений розв'язок через еліптичні функції першого і другого роду. Замкнений розв'язок наведено графічно на кількох діаграмах для різних значень  $w$ .

Наведений огляд літературних джерел показав, що запропонована задача є новою і має конкретне практичне значення.

### Постановка задачі

Розглянемо стартову позицію двох рухомих точок, одна з яких переслідує іншу (рис. 1). На одному березі (позначеному на рис. 1 як вісь  $OY$ ) водойми на відстані  $y_0 = 1$  один від одного стоять два катери – катер берегової охорони  $U$  (надалі – катер-переслідувач) і катер-порушник кордону  $V$  (надалі – катер-втікач). Водойма розділяє дві країни як природна межа між ними, при цьому катер-втікач  $V$  намагається якнайшвидше перетнути водойму у напрямку кордону між двома країнами. Назвемо її «лінією життя». Вважатимемо, що ця межа є паралельною береговій лінії старту двох катерів. Катер-переслідувач  $U$  намагається наздогнати катер  $V$  до того моменту, як він досяг би певної точки, яка міститься на «лінії життя».

Отже, у початковий час  $t = 0$  катер-порушник  $V$  починає рухатись уздовж прямої  $\eta = k\xi$  (рис. 1) зі швидкістю  $v$ . Катер-переслідувач  $U$  стартує одночасно з катером  $V$  й у процесі переслідування обирає напрямок руху на поточну точку розміщення катера  $V$  на площині  $OXY$ , при цьому катер  $U$  має швидкість  $u$ , яка в  $\alpha$  разів більша за швидкість катера  $V$ :  $u = \alpha v$ .

Для досягнення поставленої мети потрібно розв'язати такі задачі, знайшовши:

- 1) траєкторію  $L : \{y = y(x)\}$  руху катера  $U$ ;
- 2) час  $T$ , за який він наздожене катер  $V$ ;
- 3) точку на площині  $OXY$ , в якій він наздожене катер  $V$ ;

4) коефіцієнт  $k$ , який забезпечує максимальне переміщення катера  $V$  уздовж осі  $OX$  у напрямку «лінії життя».

Швидкість течії водойми не враховується.

### Побудова диференціального рівняння траєкторії руху переслідувача

Траєкторію  $L$  руху катера  $U$  називатимемо **кривою переслідування**.

Ототожнимо місцеперебування катерів на площині  $OXY$  з точками  $U$  та  $V$ . Позначимо через  $(x, y)$  координати точки  $U$  і через  $(\xi, \eta)$  – координати точки  $V$  у поточний момент часу  $t$ . Проведемо дотичну в точці  $U(x, y)$  до кривої  $L$ , яка з'єднує точки  $U$  та  $V$  й встановимо співвідношення для похідної функції  $y(x)$ :

$$y' = \frac{\eta - y}{\xi - x} \Rightarrow y' = \frac{k\xi - y}{\xi - x}. \quad (1)$$

Виразимо змінну  $\xi$  з рівняння (1):

$$\xi = \frac{xy' - y}{y' - k}. \quad (2)$$

Знайдемо похідну за часом від змінної  $\xi$ :

$$\dot{\xi} = \frac{y - kx}{(y' - k)^2} y'' \dot{x}. \quad (3)$$

Тепер визначимо співвідношення  $\alpha$  для модулів швидкостей катерів, враховуючи, що

$$u = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (y')^2} \dot{x} \quad \text{та} \quad v = \sqrt{1 + k^2} \dot{\xi}.$$

Оскільки відомо, що  $u = \alpha v$ , то тоді можна переписати це саме співвідношення інакше:

$$\alpha = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \dot{x}}{\sqrt{1 + k^2} \dot{\xi}}. \quad (4)$$

Враховуючи (3) та (4), дістанемо рівняння траєкторії  $L : \{y = y(x)\}$ :

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 + k^2}} \frac{(y' - k)^2}{(y - kx)y''}. \quad (5)$$

Перепишемо диференціальне рівняння (5) шуканої кривої інакше:

$$\sqrt{1 + k^2} \alpha y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{(y' - k)^2}{(y - kx)}. \quad (6)$$

Приєднаємо до цього рівняння дві граничні умови:

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = -\infty. \quad (7)$$

Отже, щоб знайти криву переслідування, маємо крайову задачу з диференціальним рівнянням (6) і граничними умовами (7).

**Розв’язання крайової задачі з пошуку рівняння траєкторії  $L : \{y = y(x)\}$**

У рівнянні (6) зробимо заміну змінної:

$$z = y - kx \Rightarrow z' = y' - k; z'' = y''.$$

У результаті дістанемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot z'' \cdot z = (z')^2 \cdot \sqrt{1 + (z' + k)^2}. \quad (8)$$

Рівняння (8) допускає зниження порядку на одиницю, якщо зробити таку заміну:

$$\frac{dz}{dx} = p(z); \quad \frac{d^2z}{dx^2} = p(z) \cdot \frac{dp}{dz}. \quad (9)$$

У нових змінних рівняння (9) набуде такого вигляду:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot p'_z \cdot p \cdot z = p^2 \cdot \sqrt{1 + (p + k)^2}. \quad (10)$$

У рівнянні (10) скоротимо на множник  $p(z) \neq 0$  й дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{dp}{p \sqrt{1 + (p + k)^2}} = \frac{dz}{z}. \quad (11)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння (11):

$$\begin{aligned} & \alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \int \frac{dp}{p \sqrt{1 + (p + k)^2}} = \\ & = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(u) = p + k; dp = \frac{du}{\cos^2 u} \\ p = \operatorname{tg} u - k \end{array} \right| = \\ & = \alpha \sqrt{1 + k^2} \cdot \int \frac{du}{\sin u - k \cos u} = \\ & = \alpha \int \frac{du}{\sin(u - \operatorname{arctg} k)} = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \frac{u - \operatorname{arctg} k}{2} \right) \right| = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \frac{\operatorname{arctg}(k + p) - \operatorname{arctg} k}{2} \right) \right| = \\ & = -\alpha \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \operatorname{arctg} \left[ \frac{p}{1 + k(p + k)} \right] / 2 \right) \right|. \end{aligned}$$

Отже, отримано диференціальне рівняння першого порядку:

$$\operatorname{tg}^\alpha \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{p}{1 + k(p + k)} \right) / 2 \right) = C_1 \cdot z. \quad (12)$$

Щоб визначити першу сталу у рівнянні (12), використаємо співвідношення  $z = y - kx$  та крайові умови (7):

$$z(p) \Big|_{p \rightarrow -\infty} = 1. \quad (13)$$

У результаті граничного переходу з урахуванням (13) дістанемо

$$C_1 = \operatorname{tg}^\alpha (\operatorname{arctg}(1/k)/2).$$

Запишемо перший інтеграл у такому вигляді:

$$z = \operatorname{ctg}^\alpha \left( \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{k} \right)}{2} \right) \cdot \operatorname{tg}^\alpha \left( \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{p}{1 + k(p + k)} \right)}{2} \right). \quad (14)$$

Виразимо з (14) функцію  $p = z'$  через  $z$ :

$$\begin{aligned} & \frac{p}{1 + k(p + k)} = \\ & = \operatorname{tg} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ z^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{tg} \left( \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{k} \right)}{2} \right) \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Позначимо праву частину співвідношення (15) через  $f(z, k, \alpha)$ . У результаті отримуємо рівняння першого порядку (тут  $p = z'$ ):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z, k, \alpha) \cdot (k^2 + 1)}{1 - f(z, k, \alpha) \cdot k}. \quad (16)$$

Запишемо другий інтеграл, використовуючи (16):

$$x(z, k, \alpha) = \int_1^z \frac{1 - f(z, k, \alpha) \cdot k}{f(z, k, \alpha) \cdot (k^2 + 1)} dz. \quad (17)$$

Доповнимо вираз (17) виразом для  $y(z, k, \alpha)$ , які разом описують траєкторію переслідування  $y(x)$  в параметричній формі у вигляді пари функцій, де змінна  $z$  виступає як параметр, а саме:

$$\begin{cases} x = x(z, k, \alpha); \\ y = z + k \cdot x(z, k, \alpha). \end{cases} \quad (18)$$

**Числовий аналіз траєкторії переслідування та його характеристики**

Отже, два рівняння (18) описують траєкторію  $L : \{y = y(x)\}$  руху катера  $U$ . Наведемо гра-

фік (рис. 1), побудований для випадку процесу переслідування, в якому обрано такі параметри руху:  $k = -2$  та  $\alpha = 2$ . На графіку (рис. 1) крива синього кольору являє собою траєкторію руху катера-втікача  $V$ , а крива червоного кольору – траєкторію руху катера-переслідувача  $U$ .

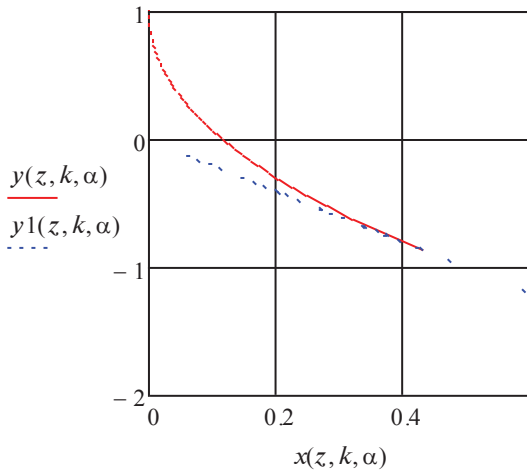


Рис. 1. Графік процесу переслідування катера-втікача  $V$  катером-переслідувачем  $U$

Точка площини  $XOY$ , в якій відбувається затримання катера-втікача, має координати  $(0,431; -0,863)$ . Геометрично факт затримання означає, що червона крива дотикається до синьої прямої. Час  $T$ , потрібний для затримання катера-втікача у процесі переслідування, становить

$$T = \frac{\sqrt{0,431^2 + (-0,863)^2}}{v} = \frac{0,965}{v}.$$

Обчислимо відстань  $S$ , яку проходить катер-переслідувач за час переслідування:

$$S = T \cdot u = 0,965 \cdot \alpha = 1,93.$$

На рис. 2 подано криву, яка відображає залежність відстані  $x(0, k, \alpha)$  (по горизонтальній осі  $OX$ ) затримання катера-втікача від величини кутового коефіцієнта  $k$  прямої його руху за фіксованого коефіцієнта  $\alpha$ . Вона має чітко виражений локальний максимум, який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої руху катера-втікача, який дає йому можливість досягти максимального переміщення у бік «лінії життя».

Отже, спостерігаємо певний парадокс: крива на рис. 2 показує, що стратегія вибору кута нахилу прямої, який рівний нулю (тобто рух по найкоротшому відрізьку, що з'єднує дві паралельні

лінії, що було би природно), не є правильною для вдалої втечі. У цьому варіанті розрахунку ( $\alpha = 2, k = -0,393$ ) це переміщення є таким:

$$x(0; -0,393; 2) = 0,733.$$

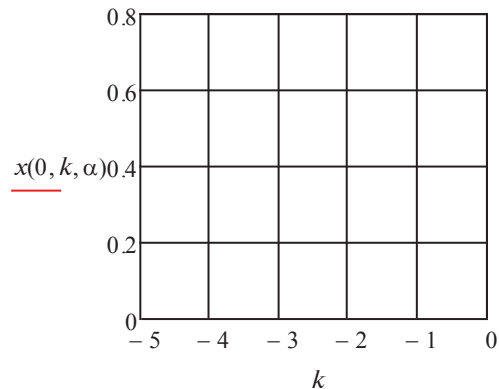


Рис. 2. Графік залежності відстані  $x(0, k, \alpha)$  затримання катера-втікача від величини кутового коефіцієнта  $k$  прямої його руху

З'ясуємо поведінку величини  $x(0, k, \alpha)$  за умови, коли коефіцієнт  $\alpha$  прямує або до нескінченності, або до одиниці. На рис. 3 показано графік залежності величини  $x(0, k, \alpha)$  від коефіцієнта  $\alpha$  за фіксованого значення кутового коефіцієнта  $k = -0,45$ .

З поведінки кривої на рис. 3 випливає, що якщо коефіцієнт  $\alpha \rightarrow \infty$  (тобто швидкість катера-переслідувача значно перевищує швидкість катера-втікача), то відстань  $x(0, k, \alpha)$ , на якій останнього буде затримано, прямує до нуля.

Утім, якщо  $\alpha \rightarrow 1$  (тобто швидкість катерів є однаковою), то зазначена відстань прямує у нескінченність, тобто затримання катера-втікача не відбудеться.

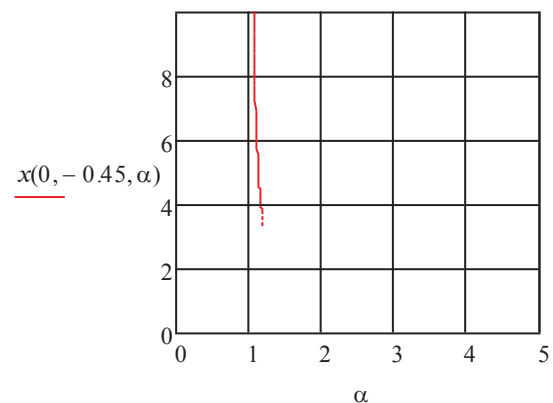


Рис. 3. Графік залежності величини  $x(0, k, \alpha)$  від коефіцієнта  $\alpha$  ( $k = -0,45$ )

Тепер розглянемо вплив коефіцієнта  $\alpha$  на величину кутового коефіцієнта  $k$ , який забезпечує максимально можливе переміщення катера-втікача вздовж осі  $OX$  у бік «лінії життя».

На рис. 4 зображено відповідний графік залежності величини  $k = k(\alpha)$  від коефіцієнта  $\alpha$ , який побудовано для тих кутових коефіцієнтів «лінії втечі», які забезпечують максимуми кривих на графіку на рис. 2.

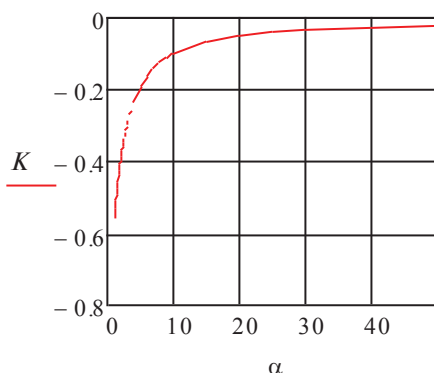


Рис. 4. Графік залежності величини  $k = k(\alpha)$  від коефіцієнта  $\alpha$

Якщо коефіцієнт  $\alpha \rightarrow \infty$ , то кутовий коефіцієнт  $k \rightarrow 0$ , тобто найкраща для втечі пряма у цьому разі наближається до осі  $OX$ . З рівняння (14) знайдемо кутовий коефіцієнт  $k$  за умов  $z = 0$  та  $\alpha \rightarrow 1$ :  $k \rightarrow -\infty$ .

Отримані рівняння (18) кривої переслідування дають ще одну корисну можливість: встановити, за якого параметра  $\alpha$  катер-переслідувач  $U$  не дасть можливості катеру-втікачу  $V$  досягти «лінії життя».

Отже, нехай  $k = -0,45$ , тобто катер-втікач рухається уздовж прямої  $y = -0,45x$ , і «лінія життя» перебуває на відстані  $X_{\max} = 1,0$  від точки старту

(уздовж осі  $OX$ ). Обчислимо величину коефіцієнта  $\alpha$ , за якої катер  $U$  зможе затримати втікача  $V$  до перетину ним межі між двома країнами. Сформулюємо відповідне трансцендентне рівняння відносно коефіцієнта  $\alpha$ :

$$x(0, -0,45, \alpha) = 1.$$

У результаті його числового розв'язання дістанемо потрібну величину співвідношення швидкостей катерів:  $\alpha \approx 1,714$ .

### Висновки

У роботі розглянуто класичну задачу переслідування, в якій катер-втікач рухається по похилій кривій  $y = kx$ . Отримано рівняння кривої переслідування у параметричній формі. Проведено його числовий аналіз, досліджено вплив параметрів  $\alpha$  та  $k$  на поведінку кривої. Встановлено залежність зміни відстані  $x(0, k, \alpha)$  (по горизонтальній осі  $OX$ ) затримання катера-втікача залежно від величини кутового коефіцієнта  $k$  прямої його руху за фіксованого коефіцієнта  $\alpha$ . Вона має чітко виражений локальний максимум, який вказує на те, що існує певний ненульовий кут нахилу прямої руху катера-втікача, який дає йому можливість досягти максимального переміщення у бік «лінії життя».

Таким чином, для вдалої втечі **стратегія вибору** кута нахилу прямої рівним нулю (тобто рух по найкоротшому відрізку, що з'єднає дві паралельні лінії), є **неправильною**.

Результати числового експерименту дають підстави рекомендувати запропоновану модель для практичного використання у таких галузях, як логістика, воєнна справа, спортивні заходи тощо.

### References

- [1] A. Bernhart, "Curves of pursuit", *Scripta Math*, no. 20, pp. 125–141, 1954.
- [2] A. Bernhart, "Curves of pursuit-II", *Scripta Math*, no. 23, pp. 49–65, 1957.
- [3] A. Bernhart, "Polygons of pursuit", *Scripta Math*, no. 24, pp. 23–50, 1959.
- [4] A. Bernhart, "Curves of general pursuit", *Scripta Math*, no. 24, pp. 189–206, 1959.
- [5] J.C. Clapham, "Playful mice", *Recreat. Math. Mag.*, August 1962, pp. 6–7.
- [6] Zuzana Malacká, "Pursuit Curves and Ordinary Differential Equations", *University of Žilina, Komunikacie*, no. 14 (1), pp. 66–68, March 2012. DOI: 10.26552/com.C.2012.1.66-68
- [7] P.J. Nahin, "Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion", Princeton-New Jersey: Princeton Puzzlers, 2012, 272 p.
- [8] A.M. Bruckstein *et al.*, "Ants, crickets and frogs in cyclic pursuit", Preprint, *Techion CIS Report*, July 1991, no. 9105.
- [9] A.M. Bruckstein, "Why the ant trails look so straight and nice", *Math. Intelligencer*, no. 15 (2), pp. 59–62, 1993.
- [10] F. Behroozi and R. Gagnon, "Cyclic pursuit in a plane", *J. Math. Phys.*, no. 20, pp. 2212–2216, November 1979.
- [11] F. Behroozi and R. Gagnon, "A computer-assisted study of pursuit in a plane", *Amer. Math. Monthly*, pp. 804–812, October 1975.
- [12] M.S. Klamkin and D.J. Newman, "Cyclic pursuit or "The Three Bugs Problem", *Amer. Math. Monthly*, pp. 631–639, June 1971. DOI: <https://www.jstor.org/stable/2316570>

- [13] O. Hajek, "Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion", New York: Academic Press, 1975.
- [14] A.L. Yalovets, "On the formulation of the pursuit problem on the plane", *Programming problems*, no. 2, pp. 95–100, 2013.
- [15] S.V. Pashko and A.L. Yalovets, "Numerical methods for solving pursuit optimization problems", *Problems of programming*, no. 4, pp. 74–85, 2013.
- [16] A.S. Kuchkarov, B.B. Rikhsiev, "A Pursuit Problem under Phase Constraints", *Automation and Remote Control*, no. 62 (8), pp. 1259–1262, 2001. DOI: 10.1023/A:1010297326898
- [17] L.A. Petrosyan, "Differential Games of Pursuit", World Scientific Publisher, Singapore, London, 340 p., 1993. DOI: 10.1142/1670
- [18] Isaacs R., "Differential Games, John Wiley and Sons", New York, 1965, p. 384.
- [19] David C. Arney, "The Chase Problem", Part 1, pp. 109–128.
- [20] R. Craig Conlter, "Implementation of the Pure Pursuit Path Tracking Algorithm", CMU-RI-TR-92-01, *The Robotics Institute Carnegie Mellon University*, Pittsburgh, Pennsylvania 15213, January 1992.
- [21] A. Merz, "The game of two identical cars", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 9, pp. 324–343, 1972. DOI: 10.1007/BF00932932
- [22] P. Hagedorn, J.V. Breakwell, "A Differential Game with Two Pursuers and One Evader", *Multicriteria Decision Making and Differential Games*, pp. 443–457, 1976. DOI: 10.1007/978-1-4615-8768-2\_27
- [23] V.P. Legeza, O.M. Neshchadym, "The problem of fugitive interception on a plane in the one-dimensional vector field of a moving fluid", *Scientific Notes of the V.I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences*, vol. 34 (73), no. 3, pp. 168–174, 2023. DOI: 10.32782/2663-5941/2023.3.1/27
- [24] V. Legeza and L. Oleshchenko, "Paradoxical Properties Research of the Pursuit Curve in the Intercepting a Fugitive Problem", ICCSEE 2023, LNDECT 181, pp. 670–681, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-36118-0\_60
- [25] V.P. Legeza, "The technique of applying the Laplace transform in the pursuit of the "Four mice", *Applied mathematics and computing AMC'2023*, a collection of abstracts of reports of the Sixteenth Conference of Master's and Postgraduate Students, Ukraine, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, pp. 502–506, 28–30 November, 2023.

Viktor Legeza

#### PARADOXICAL PROPERTIES OF THE LINE OF PURSUIT IN THE PROBLEM OF INTERCEPTING A FUGITIVE ON A HORIZONTAL PLANE

**Background.** A new approach to the construction, integration and analysis of the differential equation of the pursuit curve in the classical problem of intercepting a fugitive on the plane is considered. In the proposed wording, it is new and relevant from a practical point of view in such areas as transport, logistics, military affairs, sports events, etc.

**Objective.** The purpose of the work is to determine the optimal angle of inclination of the straight line along which the fugitive should move in order to get as close as possible to the "life" line before being caught by the pursuer.

**Methods.** To achieve the goal, classical methods of integrating differential equations in parametric form were used, as well as graphic and numerical tools provided by the MathCad software package.

**Results.** The differential equation of the pursuit curve is formulated and its solution in closed parametric form is established. Its numerical analysis was carried out and the influence of the parameters  $\alpha$  (ratio of speeds of the pursuer and the fugitive) and  $k$  on the behaviour of the pursuit curve was investigated. The dependence of the change in the distance  $x(0, k, \alpha)$  along the horizontal axis  $OX$  at the moment of apprehension of the fugitive, depending on the magnitude of the angular coefficient  $k$  of the straight line of his movement at a fixed coefficient  $\alpha$ , was analysed.

**Conclusions.** As a result of the research, it was found that if the coefficient  $\alpha \rightarrow \infty$  (that is, the speed of the pursuer significantly exceeds the speed of the fugitive), then the distance  $x(0, k, \alpha)$  at which the latter will be detained goes to zero. On the other hand, if  $\alpha \rightarrow 1$  (that is, the speeds of the boats are equal), then the specified distance goes to infinity, that is, the fugitive will not be apprehended. The dependence of the change of the distance  $x(0, k, \alpha)$  along the horizontal axis  $OX$  on the coefficient  $k$  has a well-defined local maximum under the condition  $k \neq 0$ , which indicates that there is a certain non-zero angle of inclination of the direct flight, which enables the fugitive to achieve the maximum movement  $x(0, k, \alpha)$  towards the border between the two countries. Thus, we observe a paradoxical phenomenon: for a successful escape, the strategy of choosing an angle of inclination of a straight line equal to zero (that is, moving along the shortest segment connecting two parallel lines) is not correct.

**Keywords:** interception of a fugitive on the flat surface; line of pursuit; chase boat; runaway boat; escape line; life line; speed of boats; local maximum.

Рекомендована Радою  
факультету прикладної математики  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
30 листопада 2023 року

Прийнята до публікації  
10 лютого 2025 року