

DOI: 10.20535/kpissn.2021.4.245103

УДК621.833.16

І. В. Янчевський*, М. В. Нехороших

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*correspondingauthor:i.yanchevskiy@kpi.ua

ВПЛИВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КРИВОШИПНО-ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА НА ЦИКЛОГРАМУ РОБОТИ КОНТАКТНИХ ПАР

Проблематика. Кривошипно-планетарні редуктори (КПР) мають низку переваг: компактність, високу навантажувальну здатність, високу жорсткість конструкції та ін. Водночас немає регламентованої методології їх кінематичного та силового розрахунку, що обмежує їх розроблення та серійне виробництво. Створення ефективних методів розрахунку цих редукторів задля покращення їх експлуатаційних показників на етапі проектування має важливе прикладне значення.

Мета дослідження. Розробити аналітичний метод визначення кута тиску та значення контактної сили в контактних парах “отвір сателіта – цівка вихідної ланки” КПР залежно від кута між кривошипами його колінчастого вала (V-подібної форми), а також від кількості сателітів і цівок вихідної ланки. Застосовуючи розроблений метод, перевірити можливості проектування КПР з довільними значеннями зазначених параметрів і дослідити їх вплив на циклограму роботи контактних пар і максимальне значення контактної сили з урахуванням нелінійності деформування матеріалів.

Методика реалізації. На першому етапі на основі формул аналітичної геометрії показано можливість реалізації КПР із довільним значенням кута між кривошипами колінчастого вала, а також довільною кількістю сателітів і цівок вихідної ланки. Проаналізовано значення кутів тиску в контактних парах “отвір сателіта – цівка вихідної ланки” та побудовано циклограму роботи ведучих контактних пар. На другому етапі з використанням принципу можливих переміщень отримано формулу для розрахунку контактної сили у ведучих контактних парах як функції кута повороту вхідного вала. Під час обчислення контактної сили використано нелінійну модель деформування матеріалу.

Результати дослідження. Розроблено аналітичний метод побудови циклограми роботи контактних пар КПР і розрахунку контактних сил залежно від геометричних параметрів редуктора. Показано можливість реалізації редукторів із довільним значенням кута між кривошипами колінчастого вала, а також довільною кількістю сателітів і цівок вихідної ланки.

Висновки. Отримано значення контактної сили – функцію кута повороту колінчастого вала, кількості сателітів і цівок вихідної ланки. За незмінної кількості одночасно активних ведучих контактних пар і, відповідно, рівномірної передачі навантаження між ними закон зміни контактної сили за цикл подібний до параболічного. В іншому випадку зміна контактної сили за цикл має досить складний характер. Отримані результати можуть бути використані за уточненого розрахунку ККД КПР й ухвалення конструкторських рішень на етапі його проектування.

Ключові слова: кривошипно-планетарний редуктор; геометричні параметри редуктора; циклограма; контактна сила; кут тиску.

Вступ

Механічні редуктори різних типів і розмірів широко застосовують у багатьох машинах. Планетарні редуктори як один із типів механічних

редукторів вирізняються можливістю реалізувати широкий діапазон передатних чисел і мають високий ККД, менші масогабаритні характеристики в порівнянні з рядними передачами [1]. Найбільшого поширення планетарні передачі

Рекомендуємо цитувати цю статтю так: І.В. Янчевський, М.В. Нехороших, “Вплив геометричних параметрів кривошипно-планетарного редуктора на циклограму роботи контактних пар”, *Наукові вісті КПІ*, № 4, с. 83–91, 2021. doi: 10.20535/kpissn.2021.4.245103.

Please cite this article as: I.V. Yanchevskiy, M.V. Niekhoroshykh, “Influence of geometric parameters of crankshaft-planetary reducer on cyclograph of work of contact pairs”, *KPI Science News*, no. 4, pp. 83–91, 2021. doi: 10.20535/kpissn.2021.4.245103.

набули у важконавантажених і відповідальних механічних приводах, у робототехніці та мехатронних системах, де вони практично не мають альтернативи [2], [3].

Кривошипно-планетарні редуктори – один із варіантів конструктивного виконання планетарних редукторів. В основу КПР покладено планетарний механізм типу К-Н-V [4]–[6] із внутрішнім зачепленням з малою різницею чисел зубів сателітів і сонячного колеса. Для більшості конструкцій КПР відмітними особливостями є компактність, висока навантажувальна здатність через брак зовнішнього зачеплення, висока жорсткість конструкції, малий момент інерції валів, низький рівень шуму та вібрації [3]. До основних недоліків КПР, які обмежують обсяги їх серійного виробництва, слід віднести відсутність регламентованої методології їх кінематичного та силового розрахунку, підвищені вимоги до точності виготовлення та монтажу, а також пов'язану з цим остаточну ціну готового виробу. Тому вдосконалення таких редукторів, орієнтоване на зниження вартості їх виробництва, та створення ефективних методів їх розрахунку задля покращення їх експлуатаційних показників на етапі проектування мають важливе прикладне значення.

Класичне виконання КПР [1]–[6] передбачає наявність двох сателітів, які встановлюють на опозитно розташовані проміжні шийки (кривошипи) вхідного колінчастого вала. Водночас таке конструктивне рішення не є єдино можливим. Питання оптимізації геометричних параметрів КПР і їх впливу на експлуатаційні характеристики є відкритим.

Постановка задачі

Розробити аналітичний метод визначення кута тиску та значення контактної сили в контактних парах “отвір сателіта – цівка вихідної ланки” КПР залежно від кута між кривошипами його колінчастого вала (з V-подібною формою), а також кількості сателітів і цівок вихідної ланки. Застосовуючи розроблений метод, перевірити можливості проектування редуктора з довільними значеннями зазначених параметрів і дослідити їх вплив на циклограму роботи контактних пар і максимальне значення контактної сили з урахуванням нелінійності деформування матеріалів.

Розрахункова схема редуктора

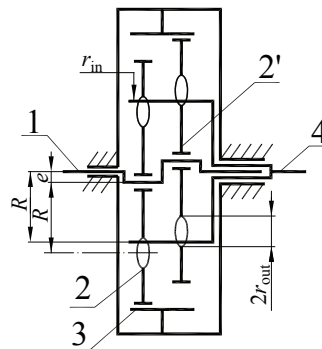


Рис. 1. Структурна схема редуктора: 1 – вхідна ланка; 2, 2' – сателіти; 3 – корпус; 4 – вихідна ланка; e – ексцентриситет; r_{out} – радіус отворів; R – радіус; r_{in} – радіус цівок

Розглянемо КПР, структурну схему якого показано на рис. 1. Ведучою ланкою редуктора є ланка 1, виготовлена як колінчастий вал із кількома кривошипами з ексцентриситетом e . Кількість кривошипів K дорівнює кількості встановлених на них сателітів (позиції 2 та 2'). Кут між кривошипами – α . Загалом значення K й α можуть відрізнятись від класичних ($K = 2$; $\alpha = 180^\circ$). Зубчасті вінця сателітів і корпусу 3 утворюють циліндричні передачі внутрішнього зачеплення. У тілі кожного сателіта є N отворів із радіусом r_{out} , рівномірно розподілених по колу радіусом R . За допомогою поверхонь цих отворів приводиться в обертання вихідна ланка 4 через цівки радіусом r_{in} , які входять в отвори сателітів. Зазначимо, що кількість отворів N у кожному сателіті зазвичай покладають рівною 3 або 4.

Методика розв'язання

Уведемо в розгляд декартові системи координат $A_1x_1y_1$ й $A_1\xi_1\eta_1$, початок яких збігається з центром першого сателіта 2. Уважаємо, що система координат $A_1x_1y_1$ рухається поступально відносно інерціальної системи OXY , вісь Z якої є віссю обертання вхідного (колінчастого) вала 1 і вихідної ланки 4. Інша система координат пов'язана з сателітом, і, відповідно, кут між осями A_1y_1 й $A_1\eta_1$ становитиме φ/u , де φ – кут повороту вхідного вала; u – передатне число редуктора (рис. 2). У початковий момент часу ($\varphi = 0$) осі ординат зазначених вище систем координат збігаються.

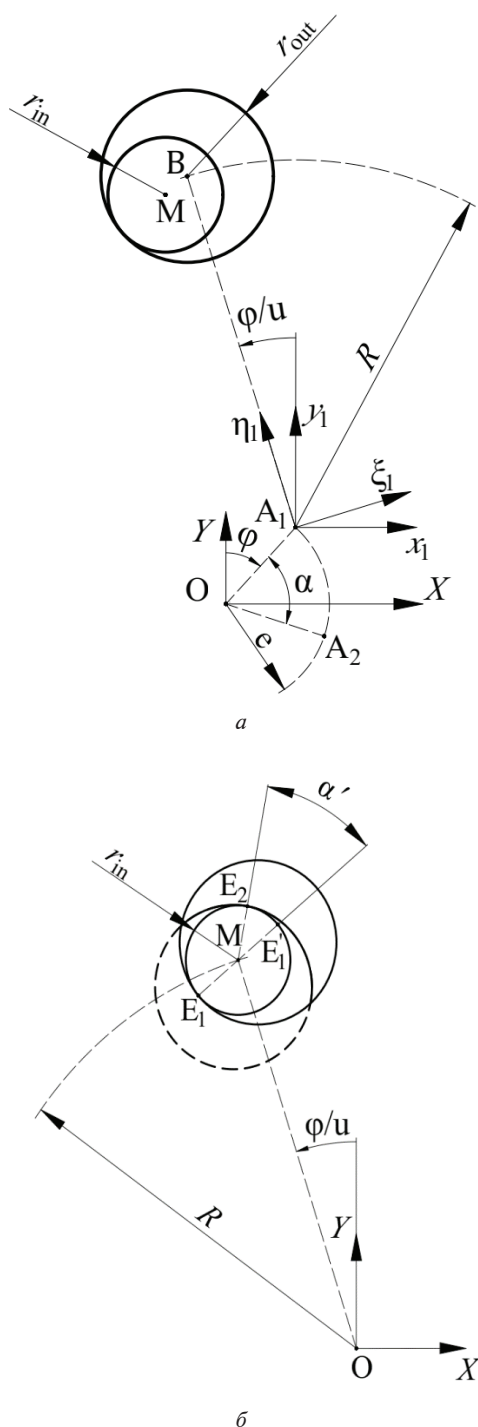


Рис. 2. Системи координат

Положення першого сателіта 2 задамо так, що координата центра одного з його отворів у системі координат $A_1\xi_1\eta_1$ дорівнює $(\xi_{1B}; \eta_{1B}) = (0, R)$. Тоді в системі $A_1x_1y_1$ координати цього ж центру визначають за допомогою матриці повороту систем координат [8]:

$$\begin{bmatrix} x_{1B} \\ y_{1B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi/u) & -\sin(\varphi/u) \\ \sin(\varphi/u) & \cos(\varphi/u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{1B} \\ \eta_{1B} \end{bmatrix}.$$

Так само можна знайти координати центра цього отвору в нерухомій системі координат OXY :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e \cdot \sin(\varphi) \\ e \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1B} \\ y_{1B} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e \cdot \sin(\varphi) - R \cdot \sin(\varphi/u) \\ e \cdot \cos(\varphi) + R \cdot \cos(\varphi/u) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де e – ексцентриситет вхідного вала ($e = OA_1$).

З урахуванням того, що передатне число від вхідного вала до сателітів дорівнює u , координати точки E_1 (точки дотику цівки вихідної ланки та відповідного отвору першого сателіта (рис. 2, б)) отримуємо з такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (X_{E_1} - X_B)^2 + (Y_{E_1} - Y_B)^2 = r_{out}^2; \\ (X_{E_1} + R \cdot \sin(\varphi/u))^2 + (Y_{E_1} - R \cdot \cos(\varphi/u))^2 = r_{in}^2, \end{cases}$$

де r_{in} , r_{out} – радіуси цівок вихідної ланки редуктора та отвору сателіта (див. рис. 2).

За допомогою координат точок E_1 і M визначимо координати точки E_2 – точки дотику цієї ж цівки до другого сателіта в нерухомій системі координат:

$$\begin{bmatrix} X_{E_2} \\ Y_{E_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix} + \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} X_M - X_{E_1} \\ Y_M - Y_{E_1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де $\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin(\varphi/u) \\ R \cos(\varphi/u) \end{bmatrix}$ – координати точки M

(див. рис. 2, б); \mathbf{L} – лінійний оператор повороту $\overline{ME_1}' = \overline{E_1M}$ на кут $\alpha' = \angle E_2ME_1'$ (див. рис. 2, б) проти годинникової стрілки:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha') & -\sin(\alpha') \\ \sin(\alpha') & \cos(\alpha') \end{bmatrix}.$$

Загалом точка E_2 не буде діаметрально протилежною до E_1 відносно точки M ($-\pi < \alpha' < \pi$).

Знаючи координати точки E_2 як функцію кута повороту вхідного вала φ , на цьому етапі можна параметризувати рівняння руху отвору другого сателіта задля визначення форми його профілю. Для цього необхідно перейти від системи координат OXY до системи $A_2\xi_2\eta_2$, жорстко пов'язаної з центром іншого сателіта (рис. 3).

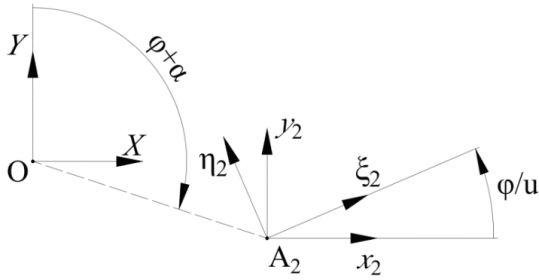


Рис. 3. Перехід до системи координат у центрі другого сателіта

Цей перехід можливий через використання системи координат $A_2x_2y_2$, визначення координат точки E_2 в якій відбувається за законом [8]:

$$\begin{bmatrix} x_{2E_2} \\ y_{2E_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{E_2} \\ Y_{E_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \alpha) & \sin(\varphi + \alpha) \\ -\sin(\varphi + \alpha) & \cos(\varphi + \alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -e \end{bmatrix}.$$

Слід зазначити, що система координат $A_2x_2y_2$ (див. рис. 3), як і $A_1x_1y_1$, рухається поступально відносно інерціальної OXY , однак їх центри збігаються з центрами різних сателітів.

Отже, маючи координати (x_{2E_2}, y_{2E_2}) можна записати параметричне рівняння руху отвору другого сателіта в рухомій системі координат $A_2\xi_2\eta_2$. Ці координати за допомогою класичних тригонометричних співвідношень і матриці повороту

$$\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi/u) & \sin(\varphi/u) \\ -\sin(\varphi/u) & \cos(\varphi/u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

можна подати як

$$\begin{cases} \xi_{2E_2} = -e \cdot \sin(C_3\varphi + \alpha) + \\ + C_1 \cos(C_3\varphi - \alpha') + C_2 \sin(C_3\varphi - \alpha'); \\ \eta_{2E_2} = R - e \cdot \cos(C_3\varphi + \alpha) + \\ + C_2 \cos(C_3\varphi - \alpha') - C_1 \sin(C_3\varphi - \alpha'); \end{cases} \quad (2)$$

де $C_1 = \frac{1}{2e} \sqrt{2e^2 r_{out}^2 + 2e^2 r_{in}^2 + 2r_{out}^2 r_{in}^2 - e^4 - r_{in}^4 - r_{out}^4}$;

$$C_2 = \frac{r_{out}^2 - r_{in}^2 - e^2}{2e}; \quad C_3 = 1 + \frac{1}{u}.$$

Якщо використати рівність $r_{out} = r_{in} + e$, то система рівнянь (2) суттєво спрощується:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = r_{in}; \quad C_3 = 1 + 1/u;$$

$$\xi_{2E_2} = -e \cdot \sin(C_3 \cdot \varphi + \alpha) + r_{in} \cdot \sin(C_3 \cdot \varphi - \alpha'); \quad (3)$$

$$\eta_{2E_2} = R - e \cdot \cos(C_3 \cdot \varphi + \alpha) + r_{in} \cdot \cos(C_3 \cdot \varphi - \alpha').$$

Доведемо, що координати $(\xi_{2E_2}, \eta_{2E_2})$ задовольняють рівняння кола з радіусом r_{out2} з центром у точці $(0, R)$ у рухомій системі координат $A_2\xi_2\eta_2$:

$$\xi_{2E_2}^2 + (\eta_{2E_2} - R)^2 = r_{out2}^2. \quad (4)$$

Підставивши в (4) координати (3) та спростивши вираз, отримуємо

$$r_{out2}^2 = r_{in}^2 + e^2 - 2e \cdot r_{in} \cdot \cos(\alpha + \alpha'). \quad (5)$$

Як видно з рівняння (5), обидві його частини не залежать від параметра φ , що задовольняє фізичну модель. Проте не всі пари (α, α') будуть прийнятними, оскільки отримане коло має бути дотичним до контуру цівки (не має перетинати цей контур). Оскільки ці кути не є функціями кута повороту вхідного вала φ , то для цієї задачі досить, щоб умова (5) виконувалась за $\varphi = 0$. Розглянемо для цього систему координат Mxy у центрі цівки (рис. 4).

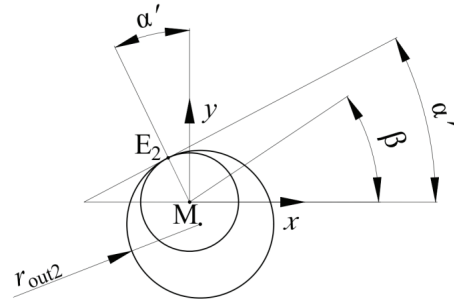


Рис. 4. Контакт поверхні цівки з першим отвором другого сателіта. Параметризуємо рівняння кола контуру цівки за кутом β та знайдемо похідну в точці E_2 ($\beta = \alpha' + \pi/2$):

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = r_{in} \cos(\beta) \\ y = r_{in} \sin(\beta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dx/d\beta = -r_{in} \sin(\beta) \\ dy/d\beta = r_{in} \cos(\beta) \end{cases} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\beta=\alpha'+\pi/2} = \\ &= -\frac{\cos(\alpha' + \pi/2)}{\sin(\alpha' + \pi/2)} = \tan(\alpha'). \end{aligned}$$

Аналогічно запишемо похідну для отвору другого сателіта:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d\xi_{2E_2}}{d\varphi} = C_3 (r_{in} \cos(C_3\varphi - \alpha') - e \cdot \cos(C_3\varphi + \alpha)); \\ \frac{d\eta_{2E_2}}{d\varphi} = C_3 (-r_{in} \sin(C_3\varphi - \alpha') + e \cdot \sin(C_3\varphi + \alpha)). \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \frac{d\eta_{2E_2}}{d\xi_{2E_2}} \right|_{\varphi=0} &= \frac{r_{in} \cdot \sin(\alpha') + e \cdot \sin(\alpha)}{r_{in} \cdot \cos(\alpha') - e \cdot \cos(\alpha)}. \end{aligned}$$

Умова дотику двох кіл – збіжність кутових коефіцієнтів дотичних:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\beta=\alpha'+\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{d\eta_{2E_2}}{d\xi_{2E_2}} \right|_{\varphi=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r_{in} \cdot \sin(\alpha') + e \cdot \sin(\alpha)}{r_{in} \cdot \cos(\alpha') - e \cdot \cos(\alpha)} = \tan(\alpha').$$

Відповідно до цього рівняння для пари (α, α') отримуємо два можливих варіанти розв'язку:

$$\alpha + \alpha' = 0 \text{ або } \alpha + \alpha' = \pi,$$

які відповідають радіусам

$$r'_{out2} = r_{in} - e; \quad r''_{out2} = r_{in} + e.$$

З урахуванням очевидної умови $r_{out2} > r_{in}$ матимемо $r_{out2} = r_{in} + e = r_{out}$ ($\alpha + \alpha' = \pi$).

Подані розрахунки дають змогу визначити розташування отворів на решті сателітів ($j = \overline{2, K}$; K – кількість сателітів) за умови, що розташування отворів на першому ($j = 1$) відоме. Положення цівок в інерціальній системі координат визначається матрицею, що описує положення їх центрів у довільний момент часу:

$$\mathbf{M}_n(\varphi) = \begin{bmatrix} X_{M_n} \\ Y_{M_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi/u) & -\sin(\varphi/u) \\ \sin(\varphi/u) & \cos(\varphi/u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R \sin\left((n-1)\frac{2\pi}{N}\right) \\ R \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{N}\right) \end{bmatrix},$$

де n – номер цівки ($n = \overline{1, N}$; N – кількість цівок).

Так само положення отворів у j -му сателіті можна записати як

$$\mathbf{B}_{jn}(\varphi) = \begin{bmatrix} X_{B_{jn}} \\ Y_{B_{jn}} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_n(\varphi) + e \cdot \begin{bmatrix} \sin(\varphi + (j-1)\alpha) \\ \cos(\varphi + (j-1)\alpha) \end{bmatrix}.$$

Тоді точку E_{jn} (точку дотику цівки вихідної ланки з n -м отвором j -го сателіта) визначимо системою рівнянь:

$$\begin{cases} (X_{E_{jn}} - X_{M_n})^2 + (Y_{E_{jn}} - Y_{M_n})^2 = r_{in}^2; \\ (X_{E_{jn}} - X_{B_{jn}})^2 + (Y_{E_{jn}} - Y_{B_{jn}})^2 = r_{out}^2, \end{cases}$$

або в матричній формі

$$\begin{cases} \|\mathbf{E}_{jn} - \mathbf{M}_n\| = r_{in}; \\ \|\mathbf{E}_{jn} - \mathbf{B}_{jn}\| = r_{out}. \end{cases}$$

Знаючи положення точки E_{jn} , визначимо кут тиску в контактній парі “ n -а цівка вихідної ланки – відповідний отвір j -го сателіта” [9] – кут між вектором лінійної швидкості точки M_{jn} і вектором контактної сили, докладеної в точці E_{jn} (рис. 5):

$$\cos(\gamma_{jn}) = \frac{(\mathbf{M}_n - \mathbf{E}_{jn}) \cdot \frac{d\mathbf{M}_n}{d\varphi}}{\|\mathbf{M}_n - \mathbf{E}_{jn}\| \cdot \left\| \frac{d\mathbf{M}_n}{d\varphi} \right\|} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\left(1 + \frac{1}{u}\right) + \alpha(j-1) + \frac{2\pi}{N}(n-1)\right), \quad (6)$$

де $\mathbf{E}_{jn}(\varphi) = \begin{bmatrix} X_{E_{jn}} & Y_{E_{jn}} \end{bmatrix}^T$ – координати точки E_{jn} у системі OXY .

Кут тиску є визначальним для багатьох експлуатаційних показників КПП. Зокрема, від нього залежать значення сили в контактній парі (парі “цівка – отвір”) і, відповідно, контактні механічні напруження. Використовуючи отримані в роботі [9] результати, контактні сили в цих парах можна визначити за принципом можливих переміщень:

$$T_{вих} \delta\varphi_{вих} - \sum_{j=1}^K \sum_{n=1}^N F_{jn} \delta r_{jn} = 0, \quad (7)$$

де $T_{вих}$ – крутний момент на вихідній ланці редуктора; δr_{jn} – нормальне зміщення точки E_{jn} прикладання сили F_{jn} у n -й парі j -го сателіта за можливого повороту вихідної ланки на кут $\delta\varphi_{вих}$ (див. рис. 5).

У виразі (7) враховано всі ведучі контактні пари. Якщо за модулем кут тиску γ_{jn} , обчислений за формулою (6), більший за $\pi/2$, то пара є веденою, і, відповідно, для неї контактна сила дорівнює нулеві ($F_{jn}|_{|\gamma_{jn}| \geq \pi/2} = 0$). Для визначення решти значень контактних сил слід вивести залежність між контактною силою та зміною міжосьової відстані геометричних поверхонь контактних пар, яка загалом може бути нелінійною:

$$F_{jn} \approx A \cdot (\Delta r_n)^v = A \cdot \left[\Delta\varphi \cdot \|\mathbf{E}_{jn}\| \cdot \cos(\theta_{jn}) \right]^v =$$

$$= A' \cdot \left[\|\mathbf{E}_{jn}\| \cdot \cos(\theta_{jn}) \right]^v, \quad (8)$$

де A й A' – деякі константи; $v = 1 + \delta$ – показник степеня ($\delta = 0_+$ – реальне значення δ може бути визначене експериментально).

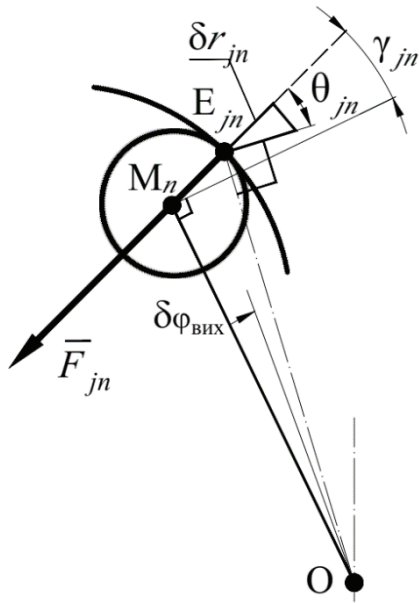


Рис. 5. Кут тиску та контактна сила в контактних парах

З трикутника OM_nE_{jn} (див. рис. 5) отримуємо вираз для кута θ_{jn} :

$$\cos(\theta_{jn}) = \frac{R}{\|E_{jn}\|} \cos(\gamma_{jn}).$$

Тоді вираз (8) для контактної сили набуде вигляду

$$F_{jn} = A' \cdot R^\nu \cdot \cos(\gamma_{jn})^\nu. \quad (9)$$

З урахуванням співвідношення $\delta r_{jn} = R \cdot \delta\varphi_{\text{вих}} \cdot \cos(\gamma_{jn})$ (див. рис. 5) і рівняння (9) вираз (7) матиме такий вигляд:

$$T_{\text{вих}} \delta\varphi_{\text{вих}} - A' \cdot R^{1+\nu} \cdot \delta\varphi_{\text{вих}} \cdot \sum_{(j,n)} \cos(\gamma_{jn})^{1+\nu} = 0,$$

звідки

$$F_{jn} = \frac{T_{\text{вих}}}{R} \cdot \frac{\cos(\gamma_{jn})^\nu}{\sum_{j=1}^K \sum_{n=1}^N \cos(\gamma_{jn})^{1+\nu}}. \quad (10)$$

Якщо припустити, що крутний момент на вхідній ланці редуктора постійний ($T_{\text{вих}} = T_{\text{вх}} \cdot u \cdot \eta$, де $T_{\text{вх}}$ – крутний момент на вхідному валу, η – ККД редуктора), то залежність контактної сили F_{jn} від кута повороту вхідного вала φ , як впливає з (10), визначатиметься функцією

$$f_{jn}(\varphi) = \frac{F_{jn}(\varphi)}{F_0} = \frac{\cos(\gamma_{jn})^\nu}{\sum_{j=1}^K \sum_{n=1}^N \cos(\gamma_{jn})^{1+\nu}}, \quad (11)$$

а її максимальне значення не перевищуватиме $F_0 = T_{\text{вих}}/R$ ($f_{jn}(\varphi) < 1$).

Слід зауважити, що у формулах (10) та (11) сума здійснюється лише для тих j і n , для яких виконується умова $\cos(\gamma_{jn}) \geq 0$, у якій кут тиску γ_{jn} обчислюється за формулою (6).

Також зазначимо, що для виконання умови збирання таких планетарних редукторів необхідно враховувати поворот отворів другого сателіта відносно першого. Цей кут можна обчислити за формулою $\psi_j = \min\left(j \cdot \frac{\alpha}{u} \pm k \cdot \frac{2\pi}{z}\right)$ ($k \in \mathbb{N}$).

Водночас цей кут не впливає на попередні розрахунки, оскільки поворот усіх отворів сателіта еквівалентний повороту зубів на сателіті.

Числові результати

Числові експерименти проведено для КПр із передатним числом $u = 20$, кількість отворів у сателітів (цівок вихідної ланки) якого дорівнює 3 ($N = 3$).

На рис. 6 зображено циклограми роботи контактних пар у редукторах із різним значенням кількості його сателітів K і кута між кривошипами α . З використанням цих циклограм нескладно обчислити “коефіцієнт перекриття контактних пар” [10]. На рис. 6, а, зокрема, показана циклограма для класичного виконання редуктора з $K = 2$ й $\alpha = 180^\circ$, отримана в роботі [9]. Як видно з рис. 6, а, у контакті постійно перебувають три пари. Зміна кута α спричинює зміну кількості одночасно активних контактних пар (рис. 6, б і 6, в), а отже й нерівномірність розподілу навантаження між ними. Так, за $\alpha = 120^\circ$ і $K = 2$ (див. рис. 6, б) кількість пар за один повний оберт кривошипа набуває двох можливих значень: 2 чи 4. Водночас за $\alpha = 90^\circ$ і незмінних K та N (див. рис. 6, в) кількість ведучих контактних пар у певний момент часу може дорівнювати 2, 3 чи 4. Останні два випадки свідчать про недоліки редуктора з $\alpha = 360^\circ/K$. Однак навіть виконання умови $\alpha = 360^\circ/K$ не є достатнім для вирівнювання розподілу навантаження між ведучими контактними парами за цикл, про що свідчить зображена на рис. 6, г циклограма – кількість ведучих контактних пар за $\alpha = 120^\circ$, $K = 3$ і $N = 3$ чергується між 3 та 6.

Виправити цей недолік можна збільшенням на один кількості цівок вихідної ланки. Так, за $\alpha = 120^\circ$; $K = 3$; $N = 4$ кількість ведучих контактних пар за цикл постійна та дорівнює 6 (рис. 6, д). За $N = 3$ постійна кількість ведучих контактних пар спостерігається лише для класичного вико-

нання планетарного редуктора ($K = 2$; $\alpha = 180^\circ$ (див. рис. 6, а)) та для подвоєної кількості сателітів ($K = 4$; $\alpha = 90^\circ$ (рис. 6, е)). Слід зауважити, що питання реалізації редуктора з $K = 4$ у цій роботі не порушено.

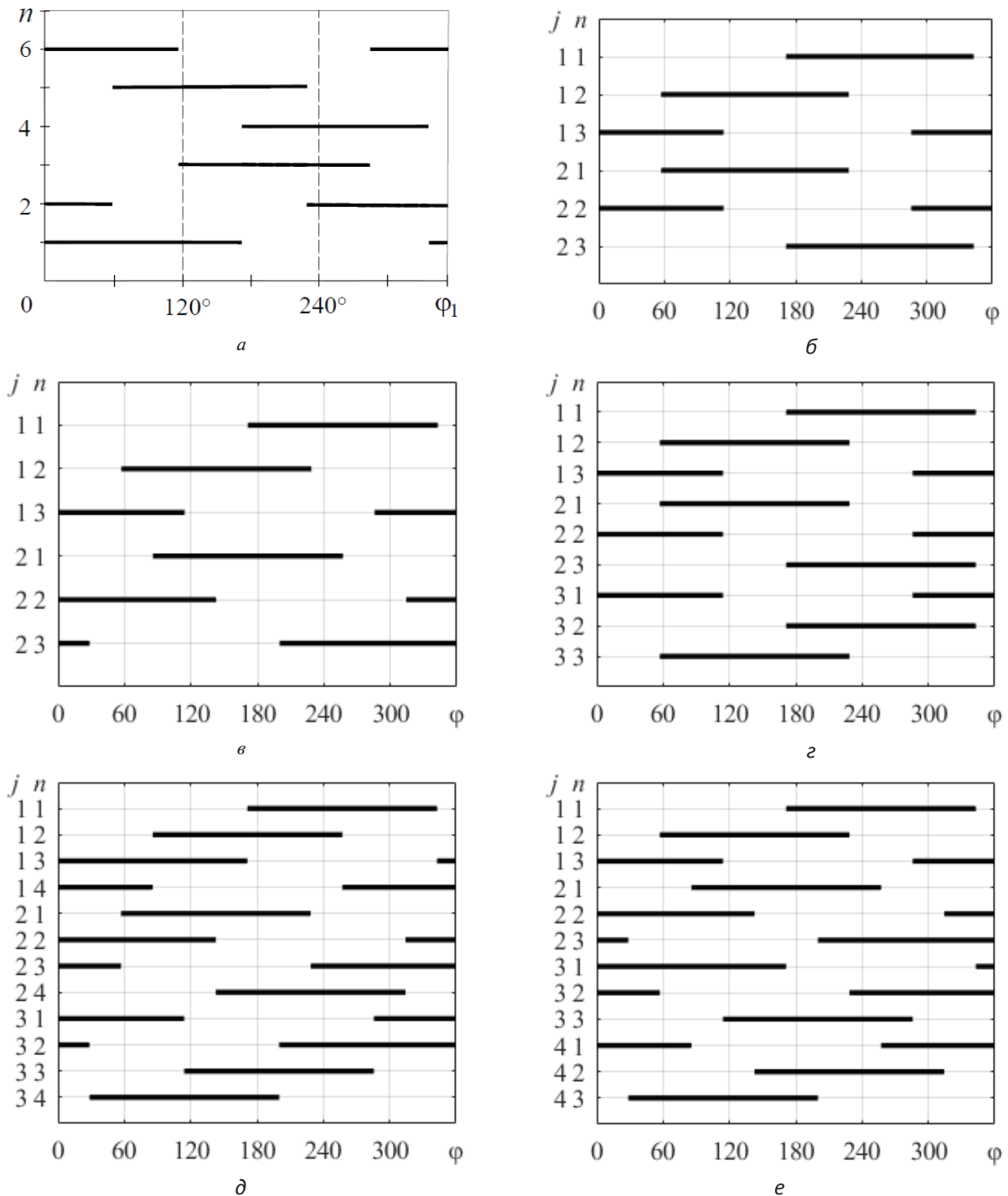


Рис. 6. Циклограми роботи ведучих контактних пар при різних геометричних конфігураціях редуктора: а – $\alpha = 180^\circ$; $K = 2$; б – $\alpha = 120^\circ$; $K = 2$; в – $\alpha = 90^\circ$; $K = 2$; г – $\alpha = 120^\circ$; $K = 3$; $N = 3$; д – $\alpha = 120^\circ$; $K = 3$; $N = 4$; е – $\alpha = 90^\circ$; $K = 4$; $N = 3$

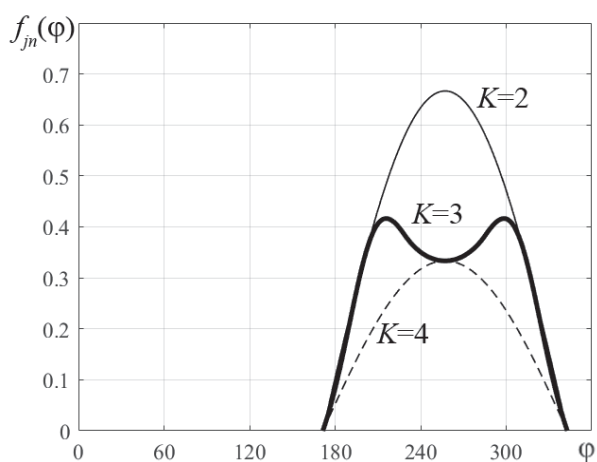


Рис. 7. Характер залежності контактної сили від кута повороту колінчастого вала

З аналізу поданих на рис. 6, а та 6, е циклограм впливає, що випадок ($K = 2$; $\alpha = 180^\circ$) є частинним випадком ($K = 4$; $\alpha = 90^\circ$), а кількість одночасно активних контактних пар залишається незмінною: 6 для $K = 4$ та 3 для $K = 2$. Нескладно передбачити, що збільшення кількості ведучих контактних пар забезпечує вдвічі менше максимальне значення контактної сили. Відповідні криві зображено на рис. 7 кривими $K = 4$ та $K = 2$. На рис. 7 показано також графік періодичної функції $f_m(\varphi)$ (12), де φ – кут повороту колінчастого вала. Зміна кількості ведучих контактних пар призводить до складнішого характеру зміни активних у них контактних сил за цикл, які залежать від $f_m(\varphi)$ – на рис. 7 крива $K = 3$ відповідає випадку $K = 3$; $\alpha = 120^\circ$.

Слід зауважити, що в розрахунках було прийнято лінійний характер залежності контактної сили від деформування матеріалу ($\delta = 0$). Однак це не применшує коректності результатів.

Значення крутного моменту на вихідному валу залежить як від крутного моменту на вході редуктора та його передатного числа, так і від ККД редуктора. Останній також залежить від тертя в контактних/кінематичних парах редуктора. Тому результати можуть бути використані під час уточненого розрахунку ККД КПП

і визначення нерівномірності крутного моменту на його вихідному валу.

Висновки

У роботі подано аналітичний метод побудови циклограми роботи контактних пар “отвір сателіта – цівка вихідної ланки” КПП залежно від його геометричних параметрів, зокрема, від кута між кривошипами колінчастого вала, кількості сателітів і цівок вихідної ланки. Вказана циклограма є визначальною під час як обчислення деталей редуктора на міцність, так і розрахунку експлуатаційних показників редуктора загалом. Слід зауважити, що отримане співвідношення для контактної сили як функції кута повороту колінчастого вала припускає нелінійну поведінку матеріалів деталей за його деформування. Водночас відповідний показник степеня має бути визначений експериментально.

На підставі отриманих співвідношень показано можливість реалізації редукторів із довільним значенням кута між кривошипами колінчастого вала α та кількості сателітів K і цівок вихідної ланки N . Однак, як показали розрахунки, умовою забезпечення рівномірності розподілу навантаження між контактними парами та збільшення “коефіцієнту перекриття” має бути дотримання співвідношення $\alpha = 360/K$. Достатня умова має бути перевірена чисельно через побудову циклограми роботи контактних пар. Водночас значення N може бути використане як допоміжний параметр для покращення умов роботи контактних пар.

За незмінної кількості одночасно активних ведучих контактних пар і, відповідно, рівномірної передачі навантаження між ними закон зміни контактної сили за цикл подібний до параболічного. В іншому випадку зміна контактної сили за цикл має досить складний характер.

Результати можуть бути використані для уточненого розрахунку ККД КПП, для визначення нерівномірності крутного моменту на його вихідному валу та під час ухвалення конструкторських рішень на етапі проектування КПП.

References

- [1] V.N. Kudryavtsev et al., *Planetary gears. Directory*. V.N. Kudryavtsev, and Y.N. Kirdyashev, Eds., Leningrad, USSR: Mashinostroyeniye, 1977.
- [2] S. Macovei, and I. Doroftei, “An overview on internal geared mechanisms with small difference between teeth number”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. And Eng.*, vol. 95, pp. 012053, Nov. 2015, doi: 10.1088/1757-899X/95/1/012053.
- [3] V. B. Tarabarin, and Z. I. Tarabarina, “Crank-planetary gearboxes with involute internal gearing with a difference in the numbers of teeth of the wheels $Z_d = 1$ ”, *Mechanics and Mechanical Engineering*, no. 1, pp. 1–12, 2006.

- [4] E. Chen, and D. Walton, "The optimum design of KHV planetary gears with small tooth differences", *Int. J. of Mach. Tools and Manufact.*, vol. 30, no. 1, pp. 99–109, Jan. 1990, doi: 10.1016/0890-6955(90)90045-K.
- [5] D. Yu, "KHV Planetary gearing", in *Gear technologies: Part I*, pp. 21–48, 1987, Part II, pp. 28–48, 1988.
- [6] W.-Y. Lin, K.-M. Hsiao, and J.-Y. Ke, "Optimum design of involute tooth profiles for K-H-V planetary drives with small teeth number differences", *J. of Advanced Mech. Design, Systems, and Manufacturing*, vol. 13, no. 1, p. jamdsm0007, 2019, doi: 10.1299/jamdsm.2019jamdsm0007.
- [7] Ch. Si, Zh. Chen, H. Zhang, Y. Zhang, and Ch. Cui, "Cosine gear planetary transmission with small teeth number difference", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. and Eng.*, p. 012034, Mar. 2020, doi: 10.1088/1757-899X/793/1/012034.
- [8] M. A. Pavlovskiy, *Theoretical Mechanics: Textbook*. Kyiv, Ukraine: Tekhnika, 2004.
- [9] I. Yanchevsky, P. Komada, N. Stelmakh, and D. Lytvynenko, "Contact problem for crank-planetary reduction gear," *KPI Science News. Ser. Instrument making and information and measuring equipment*, no. 1, pp. 73–80, 2018, doi: 10.20535/1810-0546.2018.1.12116.8.
- [10] O. P. Zakhovaiko, *Theory of mechanisms and machines. Course of lectures*. Kyiv, Ukraine: NTUU "KPI", 2010.

I.V. Yanchevskiy, M.V. Niekhoroshykh

INFLUENCE OF GEOMETRIC PARAMETERS OF CRANKSHAFT-PLANETARY REDUCER ON CYCLOGRAPH OF WORK OF CONTACT PAIRS

Background. Crank-planetary reducers (CPR) have a number of advantages: compactness, high load capacity, high structural rigidity, to name a few. At the same time, there is no regulated methodology for their kinematic and force calculation, which limits their development and mass production. The creation of effective methods for calculating these reducers to improve their performance at the design stage is of great practical importance.

Objective. The aim of this work is to develop an analytical method for calculating the angle of pressure and the contact force in contact pairs "satellite hole – pin of output link" of the CPR depending on the angle between the cranks of its crankshaft (V-shaped), number of satellites and number of pins. Based on the developed method, check the possibility of designing a CPR with arbitrary values of these parameters and investigate their impact on the cyclogram of contact pairs and the associated maximum value of contact force, taking into account the nonlinearity of materials' deformation.

Methods. At the first stage, based on the formulas of analytical geometry, the possibility of theoretical implementation of CPR with an arbitrary value of the angle between the crankshaft cranks, the number of satellites and the number of pins of the output link is shown. The values of pressure angles in the contact pairs "satellite hole – pin of output link" are analysed and on the basis of the received results the cyclogram of work of leading pairs is calculated. In the second stage, using the principle of possible displacements, the formula for calculating the contact force in the leading contact pairs is written as a function of the input shaft rotation angle. When calculating the contact force, a nonlinear model of material deformation was used.

Results. An analytical method for constructing a cyclogram of the contact pairs of a CPR and the contact forces calculation was developed depending on the geometric parameters of the reducer. The possibility of theoretical implementation of reducers with arbitrary value of the angle between the crankshaft cranks, the number of satellites and the number of output link's pins is shown

Conclusions. The dependence of the contact force is obtained as a rotation angle function, the number of satellites and the number of source pins. With a constant number of simultaneously active leading contact pairs and, accordingly, a uniform load transfer between them, the law of change in the contact force per cycle is similar to parabolic. Otherwise, the change in the contact force per cycle is quite complex. The obtained results can be used in the refined calculation of the efficiency of the CPR and in making various design decisions at the design stage.

Keywords: crank-planetary reducer; geometric parameters; cyclogram; contact force; pressure angle.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового механіко-машинобудівного Інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
26 жовтня 2021 року

Прийнята до публікації
14 лютого 2022 року