

DOI: 10.20535/kpi-sn.2019.2.167495

УДК 534.1+517.988

В.П. Лєгеца<sup>1\*</sup>, С.Г. Савчук<sup>2</sup><sup>1</sup>КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна<sup>2</sup>Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна

\*corresponding author: viktor.legeza@gmail.com

## БРАХІСТОХРОННИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ НА ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ В ОДНОРІДНОМУ ГРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ

**Проблематика.** Варіаційна задача, яка поставлена і розв’язана в цій роботі, є природним узагальненням класичної задачі Бернуллі про пошук брахістохрони у вертикальній площині. В запропонованій постановці вона є новою і актуальною з практичною точки зору в таких галузях, як машинобудування, транспорт і логістика, спортивно-масові заходи тощо.

**Мета дослідження.** На похилій площині знайти таку криву, рухаючись вздовж якої без початкової швидкості в однорідному гравітаційному полі з однієї заданої точки в іншу задану точку цієї площини матеріальна точка здійснить такий перехід за мінімальний час.

**Методика реалізації.** Для досягнення зазначеної мети в роботі використовувались класичні методи варіаційного числення, а саме рівняння Ейлера.

**Результати дослідження.** Побудовано функціонал часу, з використанням якого аналітично виведено диференціальне рівняння просторової брахістохрони, що лежить на похилій площині. Після його інтегрування в замкненій формі отримано алгебричне рівняння брахістохрони. Результати дослідження проілюстровано графічно. У стартовій точці  $M$  брахістохрони встановлено напрям вектора початкової швидкості матеріальної точки. Проведено порівняльний аналіз швидкодії для оптимальної кривої – брахістохрони – та двох альтернативних шляхів руху матеріальної точки.

**Висновки.** Доведено, що проекція брахістохрони на площину  $OXZ$  не є циклоїдою. Показано, що вектор початкової швидкості матеріальної точки в стартовій точці  $M$  брахістохрони є перпендикулярним осі абсцис. Встановлено, що мінімальний час швидкодії залежить лише від параметра  $a$  похилої площини, коефіцієнта  $k$  дисипації енергії, а також від координат стартової  $M$  і фінішної  $N$  точок, через які проходить брахістохрона.

**Ключові слова:** варіаційна задача; брахістохрона; циклоїда; рівняння Ейлера; функціонал часу; час швидкодії.

### Вступ

Наведемо стисло характеристику робіт, виконаних у рамках наукового напрямку, пов’язаного з пошуком рівнянь брахістохрони у різних постановках задач.

Уперше задачу про брахістохрону поставив і дослідив І. Бернуллі [1]. У 1696 р. він сформулював “проблему брахістохрони”: знайти форму кривої, рухаючись по якій намистинка, що перебувала в початковий момент у стані спокою і яка прискорюється гравітацією, переміститься з одної заданої точки в іншу за мінімальний час. У цій задачі припускалося, що намистинка рухається без опору у вертикальній площині в однорідному гравітаційному полі.

І. Ньютон, В. Лейбніц, Г.Ф. Лопіталь, Я. Бернуллі, І. Бернуллі довели, що розв’язком цієї задачі є циклоїда [2].

Аналітичні розв’язки зазначеної “проблеми брахістохрони” з класичним використанням

техніки варіаційного числення наведені у праці [3], а стосовно геометричної оптики – в [4].

Задачі про визначення форми брахістохрони з урахуванням сил кулонового тертя під час руху матеріальної точки у вертикальній площині в однорідному гравітаційному полі були досліджені Ashby та ін. [5], Heijden і Diepstraten [6].

У роботі Lipp [7] класична “проблема брахістохрони” Бернуллі з урахуванням сухого тертя перетворена в термінах задачі теорії управління. В новій постановці задачі про брахістохрону похідна по часу від кута, який визначає напрямку руху матеріальної точки, є параметром управління.

Узагальнення задачі про пошук форми брахістохрони, яка лежить на циліндрі, з урахуванням кулонового тертя були виконані Covic і Veskovic [8]. У роботах Hayen [9], В. Vratanaar і М. Saje [10] були сформульовані та розв’язані

задачі про визначення форми брахістохрони в неконсервативних силових полях.

Задача з визначення форми брахістохрони на циліндрі в однорідних силових полях була розв'язана в [11], а на циліндрах і сферах – у дисертації Palmieri [12].

Узагальнення задачі про брахістохрону на неоднорідні силові поля були розглянуті в статтях Aravind [13], Denman [14] і Venezian [15], причому в останній роботі була розв'язана задача про брахістохрону в лінійних радіальних силових полях.

У роботах Denman [14], Parnovsky [16], Tee [17] встановлені розв'язки цієї ж задачі в радіальних полях із силовою залежністю, яка є обернено пропорційною квадрату відстані між взаємодіючими точками.

Подальші узагальнення задачі про брахістохрону для матеріальної точки, в яких вивчалися релятивістські ефекти, викладені в працях Goldstein і Bender [18], Scarpello і Ritelli [19].

У праці [20] проблема брахістохрони розглядається на поверхнях обертання зі збереженням енергії. Для цього використовуються як класичні рівняння Ейлера–Лагранжа, так і метод, розроблений для розв'язання низки задач геометричної оптики про поширення світла. В цій статті також розглядається випадок руху матеріальної точки із релятивістськими швидкостями.

У [21] наведено нове узагальнення задачі про брахістохрону, в якій необхідно встановити форму кривої, що забезпечує переміщення матеріальної точки в однорідному гравітаційному полі за найменший час між заданою (стартовою) точкою і заданою кривою або між двома заданими кривими. Тертя в цих задачах не враховується. Узагальнена проблема розв'язується із застосуванням варіацій до різних кінцевих точок (точок фінішу). Ці задачі стосуються області варіаційних задач з вільними граничними умовами.

Нові узагальнення постановки задачі про брахістохрону пов'язані з коченням без ковзання тіла скінченних розмірів по різних поверхнях. Розв'язок задачі про брахістохрону для тіла скінченних розмірів, що котиться по ній, був відомий Е. Rogers [22], проте строге доведення і вивід рівнянь брахістохрони для такої задачі в його роботі відсутні.

У наукових статтях [23–25] методами класичного варіаційного числення були отримані рівняння брахістохрони для важкого однорідного циліндра, який перекочується без ковзан-

ня по вгнутій циліндричній виїмці, і доведена ізохронність коливань його центра мас.

Незалежно від автора праць [23–25] рівняння брахістохрони для важкого однорідного диска, який перекочується вздовж неї без ковзання, були виведені Л.Д. Акуленком у роботі [26]. Динаміка руху вертикального диска по горизонтальній площині без ковзання досліджувалась у роботі А. Obradovic та ін. [27].

У [28] розглядається флюїдодинамічний варіант класичної проблеми брахістохрони Бернуллі. Розглянуто задачу про брахістохрону, в якій матеріальна точка замінена порожнистим циліндром, заповненим в'язкою рідиною. Поставлено і розв'язано задачу про встановлення форми кривої, яка з'єднує дві задані точки і вздовж якої циліндр перекотиться за мінімальний час. Показано, що в загальному випадку шукана крива відхиляється від циклоїди.

У цій статті розглядається нова задача про брахістохронний рух матеріальної точки на похилій площині в однорідному гравітаційному полі з урахуванням дисипативних сил. Вона є природним узагальненням класичної задачі Бернуллі про пошук брахістохрони у вертикальній площині. В запропонованій постановці вона є новою теоретичною задачею варіаційного числення, актуальною з практичною точки зору в галузі машинобудування, транспортної логістики, у спортивно-розважальних заходах тощо.

### Постановка задачі

Розглядається брахістохронний рух матеріальної точки на похилій площині в однорідному гравітаційному полі з урахуванням дисипації енергії. Дисипативна функція описується квадратичною функцією швидкості руху матеріальної точки.

Мета дослідження – на похилій площині знайти таку криву  $L$ , рухаючись уздовж якої без початкової швидкості в однорідному гравітаційному полі з однієї заданої точки  $M$  (точка старту) в іншу задану точку  $N$  (точка фінішу) цієї площини матеріальна точка здійснить такий перехід за мінімальний час.

### Побудова функціонала часу і визначення диференціального рівняння брахістохрони

Для визначення диференціального рівняння брахістохрони будемо використовувати кла-

сичні методи варіаційного числення, а саме диференціальне рівняння Ейлера [3, 29].

Введемо просторову систему координат  $OXYZ$ . Нехай рівняння похилої площини  $\pi$  має вигляд (рис. 1)

$$\pi : y + z = a, a = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) можна розглядати як голономну в'язь, яка пов'язує координати  $y$  та  $z$ .

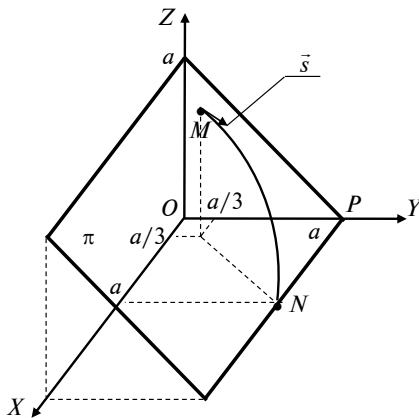


Рис. 1. Похила площина  $\pi$ , на якій відбувається брахістохронний рух матеріальної точки

Далі введемо такі позначення:  $m$  – маса матеріальної точки;  $v$  – її поточна швидкість;  $K$  – кінетична енергія матеріальної точки;  $K = mv^2/2$ ;  $D$  – дисипативна функція,  $D = kmv^2/2$ ,  $k$  – коефіцієнт пропорційності,  $k > 0$ ;  $\Pi$  – потенціальна енергія точки,  $\Pi = -mgz + h$ ,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Побудуємо функціонал часу для цієї задачі. Нехай точки, які зазначені вище, мають координати:  $M(a/3, a/3, 2a/3)$  – стартова і  $N(a, a, 0)$  – фінішна. Запишемо рівняння збереження енергії для нашої задачі:

$$K + D = \Pi \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + \frac{kmv^2}{2} + mgz = h. \quad (2)$$

Знайдемо константу  $h$  у співвідношенні (2), врахувавши положення стартової точки  $M(a/3, a/3, 2a/3)$ . У цьому разі в стартовій точці  $M$  початкова швидкість дорівнює нулю, тобто  $v = 0$ , а  $z = \frac{2a}{3}$ . Отже, дістанемо

$$h = mg \frac{2a}{3}.$$

Зі співвідношення (2) дістанемо вираз для швидкості  $v$  точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+k}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{3} - z}. \quad (3)$$

Запишемо вираз для диференціала дуги  $ds$  з урахуванням рівняння голономної в'язі (1):

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + 2(y')^2} dx. \quad (4)$$

Далі з рівняння (3) виразимо диференціал  $dt$  та, врахувавши співвідношення (4), запишемо функціонал часу  $T$ , який маємо мінімізувати:

$$T = \sqrt{\frac{1+k}{2g}} \int_{a/3}^a \sqrt{\frac{1 + 2(y')^2}{y - a/3}} dx. \quad (5)$$

Позначимо підінтегральну функцію в (5) через  $F(x, y, y')$ . Отже, маємо

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + 2(y')^2}{y - a/3}}. \quad (6)$$

Для визначення рівняння шуканої траєкторії брахістохрони використаємо диференціальне рівняння Ейлера [3, 29]:

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0. \quad (7)$$

Знайдемо відповідні частинні похідні функції (6), що входять у (7). Спочатку знайдемо  $F'_{y'}$ :

$$F'_{y'} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + 2(y')^2} \cdot (y - a/3)^{-\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

Тепер знайдемо  $F'_y$ :

$$F'_y = \frac{2y'}{\sqrt{y - a/3} \cdot \sqrt{1 + 2(y')^2}}. \quad (9)$$

Використовуючи (9), визначимо  $\frac{d}{dx}(F'_{y'})$ :

$$\frac{d}{dx}(F'_{y'}) = \frac{2y''(y - a/3) - (y')^2 - 2(y')^4}{(y - a/3)^{\frac{3}{2}}(1 + 2(y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (10)$$

Підставимо вирази (8) і (10) у рівняння Ейлера (7). У результаті певних перетворень дістанемо диференціальне рівняння другого порядку з відповідними граничними умовами:

$$2y'' \cdot (y - a/3) = -(y')^2 - \frac{1}{2}, \quad (11)$$

$$y(a/3) = a/3, y(a) = a.$$

Рівняння (11) описує проекцію шуканої кривої  $L$  на площину  $OXY$ . При цьому поточна апліката  $z(x)$  положення матеріальної точки в просторі визначається з рівняння в'язі (1):  $z(x) = a - y(x)$ . Отже, параметризована брахістохрона  $L(x)$  як множина точок простору описується так:

$$L(x) = \{ K(x, y(x), a - y(x)) \},$$

де  $x$  – параметр,  $x \in [a/3, a]$ .

#### Визначення алгебричного рівняння брахістохрони

Рівняння (11) можна проінтегрувати у замкненій формі за допомогою підстановки  $y' = p(y)$ , яка дає можливість знизити порядок рівняння на одиницю. В цьому випадку друга похідна набуває вигляду  $y'' = p \cdot p'_y$ . У результаті такої заміни дістанемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними:

$$2p \cdot p'(a/3 - y) = p^2 + \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Після інтегрування рівняння (12) і повернення до старої функції  $y(x)$  отримаємо два рівняння першого порядку:

$$y'(x) = \pm \sqrt{\frac{2C_1 + a/3 - y}{2(y - a/3)}}, \quad (13)$$

де  $C_1$  – перша невідома стала.

Як далі буде з'ясовано, у виразі (13) слід вибрати знак “плюс”. Тут одразу важливо зазначити, що  $y'(a/3) = +\infty$ , бо  $y(a/3) = a/3$ .

Після інтегрування рівняння (13) (проміжні викладки не наводяться), отримаємо трансцендентне рівняння брахістохрони в явній формі:

$$2C_1 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y - a/3}{2C_1 + a/3 - y}} - \sqrt{(y - a/3)(2C_1 + a/3 - y)} = \pm \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2, \quad (14)$$

де  $C_2$  – друга невідома стала.

Сталі  $C_1$  і  $C_2$  визначимо із використанням граничних умов:  $y(a/3) = a/3, y(a) = a$ . Друга невідома стала  $C_2$  визначається одразу з умови  $y(a/3) = a/3$ :  $C_2 = \mp \frac{a}{3\sqrt{2}}$ . Для визначення першої невідомої сталої  $C_1$  маємо скористатись другою граничною умовою  $y(a) = a$  та розв'язати два трансцендентних рівняння відносно  $2C_1$ :

$$2C_1 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{2a}{3}}{2C_1 - \frac{2a}{3}}} - \sqrt{\frac{2a}{3} \left( 2C_1 - \frac{2a}{3} \right)} = \pm \frac{2a}{3\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Зведемо рівняння (15) до двох безрозмірних рівнянь, розділивши (15) на  $\frac{2a}{3}$ :

$$u \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{u-1}} - \sqrt{u-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (16)$$

де  $u = \frac{3C_1}{a}$ .

На основі обчислень з'ясувалося, що в цій парі рівнянь тільки одне має дійсний розв'язок: це рівняння зі знаком “плюс” перед вільним членом. За допомогою числових методів встановимо величину кореня рівняння (16):  $u = 1,543$ . Звідси одразу визначимо першу невідому сталу:

$$2C_1 = 1,029 \cdot a.$$

Як бачимо,  $C_1 > 0$ . Отже, в результаті проведених обчислень розв'язок рівняння (14) набуває такого вигляду:

$$1,029a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y - a/3}{1,362a - y}} - \sqrt{(y - a/3)(1,362a - y)} = \frac{x - a/3}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

Для зручності перетворимо рівняння (17) брахістохронної траєкторії до безрозмірного вигляду. З цією метою розділимо обидві частини рівняння на величину  $a \neq 0$  та остаточно дістанемо

$$X(Y) = \frac{1}{3} + \sqrt{2} \left( 1,029 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3Y-1}{4,086-3Y}} - \sqrt{\left(Y - \frac{1}{3}\right)(1,362-Y)} \right), \quad (18)$$

де  $X = x/a$  та  $Y = y/a$ .

Опускаючи проміжні викладки, запишемо алгебричне рівняння, яке пов'язує змінні  $x$  та  $z$ :

$$1,029a \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a/3-z}{0,362a+z}} - \sqrt{(2a/3-z)(0,362a+z)} = \frac{x-a/3}{\sqrt{2}}.$$

Наведемо аналогічну залежність між змінними  $X$  і  $Z$ :

$$X(Z) = \frac{1}{3} + \sqrt{2} \left( 1,029 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-3Z}{1,086+3Z}} - \sqrt{\left(\frac{2}{3}-Z\right)(0,362+Z)} \right), \quad (19)$$

де  $Z = z/a$ .

#### Аналіз проєкцій графіка брахістохрони на координатні площини

Проілюструємо отримані аналітичні результати графічно. На рис. 2 показано проєкцію на площину  $OXY$  оптимальної траєкторії руху матеріальної точки по похилій площині  $y+z=a$ , побудовану відповідно до рівняння (18).

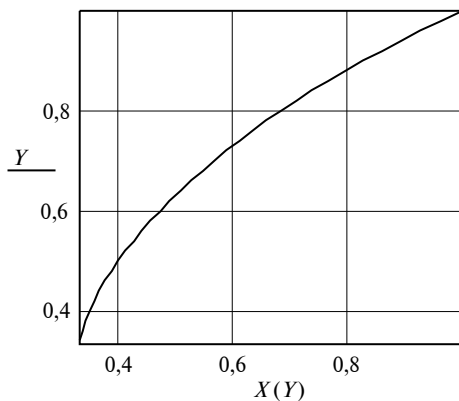


Рис. 2. Проєкція брахістохрони на площині  $OXY$

Тут слід відзначити, що в точці старту  $M$  дотична до проєкції брахістохрони на площині  $OXY$  спрямована вздовж додатного напрямку осі  $OY$ , оскільки  $y'(a/3) = +\infty$ .

Далі на рис. 3 показано проєкцію на площину  $OXZ$  брахістохрони, побудовану відповідно до рівняння (19).

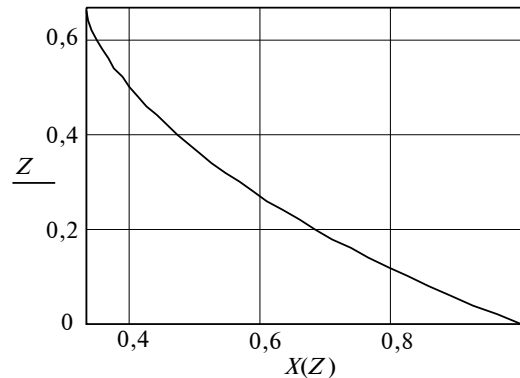


Рис. 3. Проєкція брахістохрони на площині  $OXZ$

Тут теж слід зазначити, що в точці старту  $M$  дотична до проєкції брахістохрони на площині  $OXZ$  спрямована вздовж від'ємного напрямку осі  $OZ$ , оскільки  $z'(a/3) = -\infty$ . Такий самий результат можна отримати, якщо записати рівняння похилої площини (1) і виразити  $z$  через  $y$ .

Проведемо порівняльний аналіз кривої на рис. 3 із графіком циклоїди, яка є розв'язком класичної задачі Бернуллі про брахістохронний рух намистинки.

Звернімося до диференціального рівняння відносно змінної  $z(x)$ , з якого було отримане алгебричне рівняння (19). Для цього в (13) слід зробити заміну  $y = a - z$ :

$$z'(x) = - \frac{\sqrt{2C_1 - \frac{2}{3}a + z}}{\sqrt{2\left(\frac{2}{3}a - z\right)}}.$$

Перепишемо це рівняння інакше, звільнившись від ірраціональності:

$$\left( (z')^2 + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{3}a - z \right) = C_1. \quad (20)$$

Тепер запишемо відоме диференціальне рівняння циклоїди, подане в іншій координатній системі [3, 29], де вісь  $OZ$  спрямована

вертикально вниз, а вісь  $OX$  – горизонтально вправо:

$$((z')^2 + 1)z = C_1. \quad (21)$$

Щоб коректно порівняти рівняння (20) і (21) в однаковій системі координат, зробимо в (20) заміну змінної  $\frac{2}{3}a - z \rightarrow z$ . У результаті отримаємо трансформоване рівняння:

$$\left( (z')^2 + \frac{1}{2} \right) z = C_1. \quad (22)$$

Отже, можна легко побачити, що рівняння (21) і (22) відрізняються виразами в дужках. Із наведеного вище випливає висновок про те, що проекція брахістохронної кривої (19) на площину  $OXZ$  не є циклоїдою.

Тепер встановимо напрямок вектора початкової швидкості руху матеріальної точки, побудованого у стартовій точці  $M$ .

Спочатку запишемо його формальний вираз у довільній точці кривої, яка відповідає поточному її параметру  $x$ , скориставшись її параметризацією:

$$L(x) = \{K(x, y(x), a - y(x))\}, \quad x \in [a/3, a].$$

Отже, маємо:

$$\vec{S}(x) = (1, y'(x), -y'(x)).$$

Пронормуємо його на одиницю:

$$\vec{s}(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2(y'(x))^2}}, \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + 2(y'(x))^2}}, -\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + 2(y'(x))^2}} \right).$$

Тепер можна знайти напрямок цього вектора, якщо  $x \rightarrow \frac{a}{3}$ . Вище було встановлено, що  $y'(a/3) = +\infty$ . У результаті граничного переходу дістанемо такий одиничний вектор у точці  $M$ :  $\vec{s} = (0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$ . Отже, можна зробити висновок про те, що одиничний вектор початкової швидкості руху матеріальної точки, побудований у стартовій точці  $M$ , лежить у площині, перпендикулярній до осі  $OX$ . Він утворює гострий кут у  $45^\circ$  з додатним напрямком

осі ординат  $OY$  і тупий кут у  $135^\circ$  з додатним напрямком осі абсцис  $OZ$  (див. рис. 1).

### Порівняльний аналіз отриманих результатів із використанням величини функціоналу часу

Визначимо час швидкодії, або час руху, матеріальної точки по трьох різних траєкторіях між двома заданими точками  $M(a/3, a/3, 2a/3)$  і  $N(a, a, 0)$ .

**Перша траєкторія** – це брахістохронна крива  $MN(x; y(x); a - y(x))$  (де  $x \in [a/3, a]$  – параметр цієї кривої), яка лежить на похилій площині і знайдена в процесі цього дослідження.

**Друга траєкторія** (альтернативна) – це відрізок прямої  $l$ , що з'єднує дві граничні точки  $M(a/3, a/3, 2a/3)$  і  $N(a, a, 0)$  і лежить на похилій площині. Її рівняння має вигляд

$$l: \frac{x - a/3}{1} = \frac{y - a/3}{1} = \frac{z - 2a/3}{-1}.$$

**Третя траєкторія** (альтернативна) – це крива  $MN(x; y(x); a - y(x))$  (де  $x \in [a/3, a]$  – параметр цієї кривої), яка лежить на похилій площині, причому змінні  $x$  і  $y$  зв'язані між собою параболічним рівнянням:

$$y(x) = \frac{3}{4a}x^2 + \frac{a}{4}.$$

Перейдемо до обчислення часу швидкодії для кожної із зазначених ліній.

Для **першої траєкторії** з урахуванням отриманого рівняння (13) функціонал (5) має вигляд

$$T = \sqrt{\frac{1+k}{2g}} \int_{a/3}^a \sqrt{\frac{1+2(y')^2}{y-a/3}} dx, \quad (23)$$

де  $2C_1 = 1,029 \cdot a$ .

Виразимо з рівняння (13) диференціал  $dx$  через  $dy$ . Як вище вже було зазначено, перед радикалом вибираємо знак “плюс”:

$$dx = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y - \frac{a}{3}}{2C_1 + \frac{a}{3} - y}} \cdot dy. \quad (24)$$

Підставимо диференціал (24) у функціонал (23). У результаті дістанемо

$$T_1 = \sqrt{2C_1 \cdot \frac{1+k}{g}} \int_{a/3}^a \frac{dy}{\sqrt{(y-a/3)(2C_1+a/3-y)}}. \quad (25)$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть у формулі (25). За допомогою заміни змінних його можна перетворити до безрозмірного вигляду та проінтегрувати:

$$\int_{1/3}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t-1/3)(1,362-t)}} = 1,871.$$

Отже, величина функціонала (25) дорівнює (нагадаємо, що  $2C_1 = 1,029 \cdot a$ )

$$T_1 = 1,898 \sqrt{\frac{1+k}{g}} a. \quad (26)$$

Як неважко побачити, мінімальний час  $T_1$  швидкодії в цій задачі залежить від параметра  $a$  похилої площини, коефіцієнта  $k$  дисипації енергії, а також від координат стартової  $M$  і фінішної  $N$  точок, через які проходить брахістохрона.

Для другої траєкторії з урахуванням  $y = x$  функціонал (5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} T_2 &= \sqrt{\frac{1+k}{2g}} \int_{a/3}^a \sqrt{\frac{3}{x-a/3}} dx = \\ &= \sqrt{\frac{1+k}{g}} a \int_{1/3}^1 \sqrt{\frac{3}{t-1/3}} dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Обчислення інтеграла (27) дає таку величину:

$$T_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+k}{g}} \cdot a. \quad (28)$$

Порівнюючи отримані результати (25) і (28), можна пересвідчитись, що  $T_1 < T_2$ .

Розглянемо третю траєкторію – альтернативну криву  $MN(x; y(x); a - y(x))$  (де  $x \in [a/3, a]$  – параметр цієї кривої), яка лежить на похилій площині, причому змінні  $x$  і  $y$  зв'язані між собою рівнянням

$$y(x) = \frac{3}{4a} x^2 + \frac{a}{4}. \quad (29)$$

Крива (29) (а це є проекція брахістохрони на площину  $OXY$ ) являє собою параболу, яка з'єднує дві граничні точки старту

$M(a/3, a/3, 2a/3)$  і фінішу  $N(a, a, 0)$ . Опускаючи проміжні перетворення, одразу запишемо шуканий інтеграл швидкодії:

$$T_3 = \sqrt{a \cdot \frac{1+k}{g}} \int_{1/3}^1 \sqrt{\frac{6+27t^2}{9t^2-1}} dt.$$

Після інтегрування дістанемо

$$T_3 = 2,208 \sqrt{\frac{1+k}{g}} a.$$

І знову можна констатувати, що  $T_1 < T_3$ .

### Висновки

У роботі поставлена і розв'язана задача про брахістохрону для матеріальної точки, яка без початкової швидкості починає рухатись по похилій площині в однорідному гравітаційному полі з урахуванням дисипації енергії. Дисипативна функція описується квадратичною функцією швидкості руху матеріальної точки. Побудовано функціонал часу, із використанням якого аналітично і в замкненій формі виведено параметричні рівняння просторової брахістохрони, що лежить на похилій площині. Результати дослідження проілюстровано графічно. Показано, що отримана в досліджуваній задачі проекція брахістохрони на площину  $OXZ$  не є циклоїдою. У стартовій точці  $M$  встановлено напрямок вектора початкової швидкості матеріальної точки брахістохрони.

Проведено порівняльний аналіз часу швидкодії для трьох шляхів: 1) для знайденої брахістохрони; 2) для першого альтернативного шляху по відріжку  $MN$  руху матеріальної точки на похилій площині між заданими точками  $M$  старту і фінішу  $N$ ; 3) для другого альтернативного шляху на похилій площині, проекцією якого на координатну площину  $OXY$  є параболу, що з'єднує точки  $\bar{M}(a/3, a/3, 0)$  і  $N(a, a, 0)$ .

Встановлено, що мінімальний час швидкодії залежить лише від параметра  $a$  похилої площини, коефіцієнта  $k$  дисипації енергії, а також від координат стартової  $M$  і фінішної  $N$  точок, через які проходить брахістохрона.

У постановках подальших задач цього наукового напрямку буде розглянуто брахістохронний рух матеріальної точки по трансцендентній поверхні в однорідному гравітаційному полі.

## References

- [1] J. Bernoulli, "Problema novum ad cuius solutionem mathematici invitantur", *Acta Eruditorum*, vol. 15, pp. 264–269, 1696.
- [2] W. Dunham, *Journey Through Genius*. New York: Penguin Books, 1991, 304 p.
- [3] I.M. Gelfand and S.V. Fomin, *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1963, 232 p.
- [4] H. Erlichson, "Johann Bernoulli's brachistochrone solution using fermat's principle of least time", *Eur. J. Phys.*, vol. 20, no. 5, pp. 299–304, 1999. doi: 10.1088/0143-0807/20/5/301
- [5] N. Ashby *et al.*, "Brachistochrone with Coulomb friction", *Am. J. Phys.*, vol. 43, no. 10, pp. 902–906, 1975. doi: 10.1119/1.9976
- [6] A.M.A. van der Heijden and J.D. Diepstraten, "On the brachistochrone with dry friction", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 10, no. 2, pp. 97–112, 1975. doi: 10.1016/0020-7462(75)90017-7
- [7] S. Lipp, "Brachistochrone with Coulomb friction", *SIAM J. Control Optim.*, vol. 35, no. 2, pp. 562–584, 1997. doi: 10.1137/S0363012995287957
- [8] V. Covic and M. Veskovic, "Brachistochrone on a surface with Coulomb friction", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 43, no. 5, pp. 437–450, 2008. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.02.004
- [9] J.C. Hayen, "Brachistochrone with Coulomb friction", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 40, no. 8, pp. 1057–1075, 2005. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2005.02.004
- [10] B. Vratnatar and M. Saje, "On analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 33, no. 3, pp. 489–505, 1998. doi: 10.1016/S0020-7462(97)00026-7
- [11] H.A. Yamani and A.A. Mulhem, "A cylindrical variation on the brachistochrone problem", *Am. J. Phys.*, vol. 56, no. 5, pp. 467–469, 1988. doi: 10.1119/1.15755
- [12] D. Palmieri, "The brachistochrone problem, a new twist to an old problem", Undergraduate Honors Thesis, Millersville University of PA, 1996.
- [13] P.K. Aravind, "Simplified approach to brachistochrone problem", *Am. J. Phys.*, vol. 49, no. 9, pp. 884–886, 1981. doi: 10.1119/1.12389
- [14] H.H. Denman, "Remarks on brachistochrone-tautochrone problem", *Am. J. Phys.*, vol. 53, no. 3, pp. 224–227, 1985. doi: 10.1119/1.14125
- [15] G. Venezian, "Terrestrial brachistochrone", *Am. J. Phys.*, vol. 34, no. 8, p. 701, 1966. doi: 10.1119/1.1973207
- [16] A.S. Parnovsky, "Some generalisations of the brachistochrone problem", *Acta Physica Polonica*, A 93 Supplement, pp. 5–55, 1998.
- [17] G. Tee, "Isochrones and brachistochrones", *Neural, Parallel Sci. Comput.*, vol. 7, pp. 311–342, 1999.
- [18] H.F. Goldstein and C.M. Bender, "Relativistic brachistochrone", *J. Math. Phys.*, vol. 27, no. 2, pp. 507–511, 1986.
- [19] G.M. Scarpello and D. Ritelli, "Relativistic brachistochrone under electric or gravitational uniform field", *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 86, no. 9, pp. 736–743, 2006. doi: 10.1002/zamm.200510279
- [20] J. Gemmer *et al.*, "Generalizations of the brachistochrone problem", *Pi Mu Epsilon J.*, vol. 13, no. 4, pp. 207–218, 2011.
- [21] S. Mertens and S. Mingramm, "Brachistochrones with loose ends", *Eur. J. Phys.*, vol. 29, pp. 1191–1199, 2008. doi: 10.1088/0143-0807/29/6/008
- [22] E. Rodgers, "Brachistochrone and tautochrone curves for rolling bodies", *Am. J. Phys.*, vol. 14, pp. 249–252, 1946. doi: 10.1119/1.1990827
- [23] V.P. Legeza, "Quickest-descent curve in the problem of rolling of a homogeneous cylinder", *Int. Appl. Mech.*, vol. 44, no. 12, pp. 1430–1436, 2008. doi: 10.1007/s10778-009-0149-z
- [24] V.P. Legeza, "Brachistochrone for a rolling cylinder", *Mechanics of Solids*, vol. 45, no. 1, pp. 27–33, 2010. doi: 10.3103/s002565441001005x
- [25] V.P. Legeza, "Cycloidal pendulum with a rolling cylinder", *Mechanics of Solids*, vol. 47, no. 4, pp. 380–384, 2012. doi: 10.3103/S0025654412040024
- [26] L.D. Akulenko, "The brachistochrone problem for a disk", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 4, pp. 371–378, 2009. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.08.015
- [27] A. Obradovic *et al.*, "The brachistochronic motion of a vertical disk rolling on a horizontal plane without slip", *Theor. Appl. Mech.*, vol. 44, no. 2, pp. 237–254, 2017. doi: 10.2298/TAM171002015O
- [28] S.S. Gurram *et al.*, "On the brachistochrone of a fluid-filled cylinder", *J. Fluid Mech.*, vol. 865, pp. 775–789, 2019. doi: 10.1017/jfm.2019.70
- [29] L.P. Eltsgolts, *Differential Equations and Variational Calculus*. Moscow, SU: Nauka, 1974, 432 p.



В.П. Лезега, С.Г. Савчук

#### БРАХИСТОХРОННОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

**Проблематика.** Вариационная задача, которая поставлена и решена в данной работе, является естественным обобщением классической задачи Бернулли о поиске брахистохроны в вертикальной плоскости. В предложенной постановке она является новой и актуальной с практической точки зрения в таких областях, как машиностроение, транспорт и логистика, спортивно-массовые мероприятия и т.д.

**Цель исследования.** На наклонной плоскости найти такую кривую, двигаясь по которой без начальной скорости в однородном гравитационном поле из одной заданной точки в другую точку этой плоскости материальная точка осуществит такой переход за минимальное время.

**Методика реализации.** Для достижения поставленной цели в работе использовались классические методы вариационного исчисления, а именно уравнение Эйлера.

**Результаты исследования.** Построен функционал времени, с использованием которого аналитически выведено дифференциальное уравнение пространственной брахистохроны, которая лежит на наклонной плоскости. После его интегрирования в замкнутой форме получено алгебраическое уравнение брахистохроны. Результаты исследования проиллюстрированы графически. В стартовой точке  $M$  брахистохроны установлено направление вектора начальной скорости материальной точки. Проведен сравнительный анализ быстродействия для оптимальной кривой – брахистохроны – и двух альтернативных путей движения материальной точки.

**Выводы.** Доказано, что проекция брахистохроны на плоскость  $Oxz$  не является циклоидой. Показано, что вектор начальной скорости материальной точки в стартовой точке  $M$  брахистохроны перпендикулярен оси абсцисс. Установлено, что минимальное время быстродействия зависит от параметра  $\alpha$  наклонной плоскости, коэффициента  $k$  диссипации энергии, а также от координат стартовой  $M$  и финишной точек  $N$ , через которые проходит брахистохрона.

**Ключевые слова:** вариационная задача; брахистохрона; циклоида; уравнения Эйлера; функционал времени; время быстродействия.

V.P. Legeza, S.G. Savchuk

#### BRACHISTOCHRONOUS MOTION OF THE MATERIAL POINT ON AN INCLINED PLANE IN A UNIFORM GRAVITATIONAL FIELD

**Background.** The variational problem, which is posed and solved in this work, is a natural generalization of the classical problem of I. Bernoulli about the search for brachistochrones in a vertical plane. In the proposed formulation, it is new and relevant from a practical point of view in such areas as engineering, transport and logistics, sports events, etc.

**Objective.** The aim of the paper is to find such a curve on an inclined plane, moving along which, without an initial velocity in a uniform gravitational field, from one given point of the plane to another, the material point will make such a transition in the shortest time.

**Methods.** To achieve this goal, the classical methods of the calculus of variations were used, namely, the Euler equation.

**Results.** A time functional is constructed, using which the differential equation of the spatial brachistochrone, which lies on an inclined plane, is analytically derived. After its integration in a closed form, an algebraic brachistochrone equation is obtained. The results of the study are illustrated graphically. At the starting point  $M$  of the brachistochrone, the direction of the initial velocity of the material point is established. A comparative analysis of the transition time for the optimal brachistochrone curve and two alternative paths of motion of the material point is carried out.

**Conclusions.** It is proved that the projection of the brachistochrone on the plane  $Oxz$  is not a cycloid. It is shown that the vector of the initial velocity of the material point at the starting point  $M$  of the brachistochrone is perpendicular to the  $x$ -axis. It was established that the minimum time of transition depends on the parameter  $\alpha$  of the inclined plane, the energy dissipation coefficient  $k$ , and also on the coordinates of the starting  $M$  and finishing  $N$  points through which the brachistochrone passes.

**Keywords:** variational problem; brachistochrone; cycloid; Euler equations; time functional; transition time.

Рекомендована Радою  
факультету прикладної математики  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
16 січня 2019 року

Прийнята до публікації  
25 квітня 2019 року