

НАУКОВІ ВІСТІ КПІ

Міжнародний науково-технічний журнал

№ 1–4 (136)

2023

Започаткований у вересні 1997 року

Головний редактор
М. З. Згуровський, акад. НАН України

Заступник головного редактора
М. Ю. Ільченко, акад. НАН України

Відповідальний секретар
П. П. Маслянко, канд. техн. наук, доц.

У номері:

Електронні комунікації

Інформаційні технології,
системний аналіз
та керування

Матеріалознавство
та машинобудування

Прикладна математика

Хімічні технології
та інженерія

Адреса редакції:
КПІ ім. Ігоря Сікорського
просп. Берестейський, 37
Київ, 03056, Україна
Тел. (+38 044) 204-94-53
E-mail: n.visti@kpi.ua
<http://scinews.kpi.ua>

Засновник – Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Внесений до реєстру суб'єктів у сфері медіа з присвоєнням ідентифікатора медіа R30-02405
(рішення Національної ради з питань телебачення і радіомовлення № 1794 від 21.12.2023)

Згідно з наказами МОН України № 1643 від 28.12.2019, № 409 від 17.03.2020 та № 392 від 05.04.2023 журнал включено до категорії «Б» Переліку наукових фахових видань України з технічних наук (спеціальності – 113 Прикладна математика, 121 Інженерія програмного забезпечення, 122 Комп'ютерні науки, 123 Комп'ютерна інженерія, 124 Системний аналіз, 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 133 Галузеве машинобудування, 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка, 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 142 Енергетичне машинобудування, 143 Атомна енергетика, 144 Теплоенергетика, 161 Хімічні технології та інженерія, 171 Електроніка, 172 Електронні комунікації та радіотехніка), 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка)

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, протокол № 11 від 11.12.2023 р.

Члени редакційної колегії

М. І. Бобир,	д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН України
Є. Бондарев,	PhD, проф., Нідерланди
Х. Валеро,	PhD, проф., Іспанія
І. А. Дичка,	д-р техн. наук, проф., Україна
П. І. Лобода,	д-р техн. наук, проф., акад. НАН України
В. Прівман,	д-р, проф., США
Г. С. Тимчик,	д-р техн. наук, проф., Україна
П. Хенаф,	д-р, проф., Франція
О. Е. Чигиринець,	д-р техн. наук, проф., Україна

Секретар редакції Т. Г. Кулікова

Редактори Н. В. Мурашова, С. Я. Тимчишин

Комп'ютерна верстка С. А. Бобров

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р., просп. Берестейський, 37, Київ, 03056

Підп. до друку 22.04.2024. Формат 60×84¹/₈. Папір офс. Гарнітура UkrainianTimesET.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 12,37. Обл.-вид. арк. 11,93. Наклад 30 пр. Зам. № 24-071.

Видавництво “Політехніка” КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15, Київ, 03056
тел. (044) 204-81-78

KPI SCIENCE NEWS

International research journal

№ 1–4 (136)

2023

Founded in September, 1997

Editor-in-chief

M. Z. Zgurovsky, Academician of NASU

Deputy editor-in-chief

M. Yu. Ilchenko, Academician of NASU

Executive editor

P. P. Maslyanko, Assoc. Prof., PhD

In the issue:

Electronic communications

Information technologies, system
analysis and control

Science of materials and
mechanical engineering

Applied mathematics

Chemical technologies and
engineering

Editorial office:

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute,
ave. Beresteyskyi, 37,
Kyiv, 03056, Ukraine

E-mail: n.visti@kpi.ua

<http://scinews.kpi.ua>

Founder – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

Entered into the register of subjects in the field of media with the assignment of media identifier R30-02405 (decision of the National Council on Television and Radio Broadcasting of Ukraine No. 1794 dated 21.12.2023).

According to the orders of MES of Ukraine from 12.28.2019 no. 1643, from 03.17.2020 no. 409, and from 04.05.2023 no. 392 the journal is included in the «B» category of the List of scientific publications of Ukraine on technical sciences (specialities – 113 Applied Mathematics, 121 Software Engineering, 122 Computer Science, 123 Computer Engineering, 124 System Analysis, 131 Applied Mechanics, 132 Materials Science, 133 Industrial Machinery Engineering, 134 Aviation and Aerospace Technologies, 141 Electrical Power Engineering and Electromechanics, 142 Power Engineering, 143 Nuclear Power Engineering, 144 Heat and Power Engineering, 161 Chemical Technologies and Engineering, 171 Electronics, 172 Electronic Communications and Radio Engineering, 174 Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics)

Advised by the Academic Council of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, protocol No 11 on 11.12.2023.

Editorial Board

Mykola Bobyr,	Prof., Correspondent member of NASU, Ukraine
Egor Bondarau,	Prof., Netherlands
Jose Valero,	Prof., Spain
Ivan Dychka,	Prof., Ukraine
Petro Loboda,	Prof., Academician of NASU, Ukraine
Grygorii Tymchik,	Prof., Ukraine
Patrick Henaff,	Prof., France
Olena Chyhyrynets,	Prof., Ukraine

Editorial secretary T.G. Kulikova

Editors N.V. Murashova, S. Ya. Tymchyshyn

Desktop publishing S. A. Bobrov

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Registration Certificate – ДК № 5354 on 25.05.2017, Ave. Beresteiskyyi, 37, Kyiv, 03056

Signed for printing on 24.04.2024. Format 60×84¹/₈. Text-weight paper. Font UkrainianTimesET.
Print. tech. – electrographic. Convent. printed sheets 12,37. Published sheets 11,93. Edition of 30 copies. Order No 24-071.

Publishing House “Politehnika”, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Politekhnichna Str., 14, building 15, Kyiv, 03056
Tel.: (044) 204-81-78

З М І С Т

Електронні комунікації

Войтер А.П. Адаптивне управління на каналному рівні пакетних радіомереж з жорсткою стратегією доступу до радіоканалу..... 7

Інформаційні технології, системний аналіз та керування

Romanuke V.V. Finite approximation of non-cooperative 2-person games played in staircase-function continuous spaces..... 16

Матеріалознавство та машинобудування

Chenjian Dong, Yibiao Zhang, Lei Zhang, Kraiev Maksym, Geichuk Volodymyr. Reasons and regularities of the influence of magnetic fields on the mechanical properties and structure of deformable metals..... 45

Піманов В.В., Орлюк М.В., Гончар А.М., Ситник С.В. Аналіз технології виготовлення напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування 54

Прикладна математика

Бондарчук М.Ю., Тесленко О.К. Дослідження лінійної функції підстановки довільної розрядності у криптографічних перетвореннях..... 62

Маслянюк П.П., Мірко С.С. Концептуальна модель NLP-системи пошуку релевантної правової позиції на множині судових рішень судочинства України..... 71

Хімічні технології та інженерія

Васильєв Г.С., Котик М.М. Аналіз впливу умов локального електроосадження на точність електрохімічного 3D-друку..... 86

Kovinchuk Iryna, Sokolsky Georgii, Lazzara Giuseppe. Single-stage and simple fabrication of polyethylene films decorated with halloysite nanotubes 93

Молчан Ю.М., Зеленська А.А., Янушевська О.І., Донцова Т.А. Вплив типу карбонату на транспортні характеристики керамічних мембран на основі SiC 99

Автори номера..... 106

CONTENTS

Electronic communications

- Voiter A.P.* Adaptive control at the channel level of the packet radio networks with a rigid strategy for accessing the radio channel 7

Information technologies, system analysis and control

- Romanuke V.V.* Finite approximation of non-cooperative 2-person games played in staircase-function continuous spaces 16

Science of materials and mechanical engineering

- Dong Chenjian, Zhang Yibiao, Zhang Lei, Kraiev Maksym, Geichuk Volodymyr.* Reasons and regularities of the influence of magnetic fields on the mechanical properties and structure of deformable metals 45

- Pimanov V.V., Orliuk M.V., Honchar A.M., Sytnyk S.V.* Analysis of the technology of manufacturing a semi-finished part for a hollow part of a complex geometric form using the technology of hot volume stamping 54

Applied mathematics

- Bondarchuk Maksym, Teslenko Oleksandr.* Use of implementations of arbitrary bitness permutations for cryptographic transformations..... 62

- Maslianko Pavlo, Mirko Sergy.* Conceptual model of the NLP-system for searching for the relevant legal position on the multiple court decisions of the judiciary of Ukraine. 71

Chemical technologies and engineering

- Vasyliiev G.S., Kotyk M.M.* Analysis of the influence of local electrodeposition conditions on the accuracy of electrochemical 3D printing 86

- Kovinchuk Iryna, Sokolsky Georgii, Lazzara Giuseppe.* Single-stage and simple fabrication of polyethylene films decorated with halloysite nanotubes..... 93

- Molchan Y.M., Zelenska A.A., Yanushevska O.I., Dontsova T.A.* Influence of carbonate type on transport characteristics of SiC-based ceramic membranes..... 99

- Contributors to the issue 106

ЕЛЕКТРОННІ КОМУНІКАЦІЇ

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-4.274795

УДК 621.39

А.П. Войтер

Інститут ядерних досліджень НАН України, м. Київ, Україна

voiter@kinr.kiev.ua

АДАПТИВНЕ УПРАВЛІННЯ НА КАНАЛЬНОМУ РІВНІ ПАКЕТНИХ РАДІОМЕРЕЖ З ЖОРСТКОЮ СТРАТЕГІЄЮ ДОСТУПУ ДО РАДІОКАНАЛУ

Проблематика. Розроблення методів та засобів адаптивного керування пропускну здатністю радіомереж з конкурентним доступом до радіоканалу.

Мета дослідження. Визначення впливу довжини пакетів на ефективну швидкість передачі радіомереж з урахуванням параметрів, форматів і процедур фізичного і каналного рівнів під час використання шести можливих стратегій адаптивного протоколу МДКН з жорсткою стратегією конкурентного доступу до радіоканалу.

Методика реалізації. Поставлена мета досягається створенням та аналізом математичної моделі ефективної швидкості передачі в радіомережі. Модель описується рівняннями ефективної швидкості передачі, яке є функцією вірогідності безконфліктної передачі адаптивного протоколу МДКН для кожної стратегії та коефіцієнта відхилення розміру пакетів даних від оптимального для LLC-протоколу з урахуванням ймовірності пошкодження пакетів завадами в радіоканалі.

Результати досліджень. За допомогою створеної математичної моделі доведено, що з шести стратегій управління довжиною пакетів для адаптивних протоколів МДКН з жорсткою стратегією практичну значимість з точки зору збільшення ефективної швидкості передачі за умови урахування впливу параметрів фізичного та LLC-рівня мають лише перша, третя та шоста стратегії. Для цих стратегій за отриманою моделлю може бути розраховано оптимальний розмір довжини пакетів даних для кожного набору системних параметрів, таких як швидкість передачі, ймовірність пошкодження одного біта інформації завадами в радіоканалі, а також структура пакета LLC-протоколу.

Висновки. Запропонована математична модель є інструментом розрахунку пропускну здатності радіомереж та оптимального розміру пакетів даних у разі адаптивного управління конкурентним доступом до радіоканалу з жорсткою стратегією в умовах значного коливання інтенсивності трафіка та зміни інтенсивності завад в радіоканалі.

Ключові слова: радіомережі, завади, конкурентний доступ, математична модель, адаптивне управління, пакет.

Вступ

Невід'ємною частиною сучасних телекомунікаційних систем є радіомережі з пакетною комутацією. Їх архітектура, принципи побудови та функціонування мають дві головні відмінності, зумовлені використанням радіоканалу. Перша відмінність – вони більш вразливі до завад різного походження на фізичному рівні, що накладає обмеження на розмір довжини пакетів даних. Друга відмінність зумовлена тим, що за природою радіоканал є моноканальною структурою, що потребує певних правил для абонентів, за якими вони

мають координувати свої передачі. Ці правила регламентовані протоколами управління доступом до радіоканалу [1], завданням яких є забезпечити максимально ефективну швидкість передачі в умовах непередбачуваної змінності локальної концентрації абонентів, а відтак і інтенсивності трафіка. Особливістю каналного рівня пакетних радіомереж є його структура, що містить протокол управління логічним каналом Logical Link Control (LLC) і протокол управління доступом до радіоканалу Medium Access Control (MAC).

Оптимізацію ефективної швидкості передачі пакетних радіомереж здійснюють адаптив-

Пропозиція для цитування цієї статті: А.П. Войтер, “Адаптивне управління на каналному рівні пакетних радіомереж з жорсткою стратегією доступу до радіоканалу”, *Наукові вісті КІІІ*, № 1–4, с. 7–15, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.274795

Offer a citation for this article: A.P. Voiter, “Adaptive control at the channel level of the packet radio networks with a rigid strategy for accessing the radio channel”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 7–15, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.274795

ними методами управління на різних рівнях їх архітектури [1–6]. При цьому використовують моделі для кожного протоколу окремо без врахування впливу чи обмежень інших протоколів.

У [7] описано адаптивні MAC-протоколи зі змінною довжиною пакетів, які забезпечують адаптивне керування швидкістю передачі й пропускною здатністю пакетних радіомереж. Ці протоколи основані на гнучкому й жорсткому протоколах множинного доступу з контролем сигналу несучої (МДКН), які доповнені процедурами керування довжиною пакетів за певними стратегіями. Для реалізації процедур керування абоненти за MAC-протоколами мають розрізняти не два, як у протоколах МДКН, а три стани радіоканалу:

– зайнятий, коли детектується сигнал несучої;

– стан дозволу передачі, коли сигналу несучої немає протягом часу, який не перевищує максимального часу поширення радіосигналу в мережі;

– вільний стан, коли сигналу несучої немає більше, ніж максимальний час поширення радіосигналу в мережі.

У протоколах реалізовано шість стратегій керування довжиною пакетів:

1. У вільному стані абоненти мають право передавати пакети більшої довжини $Q \cdot L_0$, а у стані дозволу передачі – пакети стандартної (оптимальної для фізичного рівня) довжини L_0 , де коефіцієнт $Q > 1$.

2. У вільному стані передавати пакети завдовжки L_0 , а у стані дозволу передачі – пакети зменшеної довжини $q \cdot L_0$, де коефіцієнт $q < 1$.

3. У вільному стані передавати пакети завдовжки $Q \cdot L_0$, а у стані дозволу передачі – пакети завдовжки $q \cdot L_0$.

4. У вільному стані передавати пакети завдовжки L_0 , а у стані дозволу передачі – пакети завдовжки $Q \cdot L_0$.

5. У вільному стані передавати пакети завдовжки $q \cdot L_0$, а у стані дозволу передачі – пакети завдовжки L_0 .

6. У вільному стані передавати пакети завдовжки $q \cdot L_0$, а у стані дозволу передачі – пакети завдовжки $Q \cdot L_0$.

Якщо радіоканал зайнятий, то процедури адаптивних протоколів аналогічні процедурам відповідних протоколів МДКН, тобто можуть мати гнучку стратегію, коли абоненти відкладають передачу пакетів на певний час з випадковим розподілом його тривалості, чи жорстку

стратегію, коли абоненти чекають звільнення радіоканалу і відразу розпочинають передачу.

У табл. 1 наведено розміри пакетів даних для кожної стратегії.

Таблиця 1. Стратегії зміни довжини пакетів

Номер стратегії	Довжина пакетів r при передачі із вільного стану	Довжина пакетів g при передачі із стану дозволу передачі
1	$Q \cdot L_0$	L_0
2	L_0	$q \cdot L_0$
3	$Q \cdot L_0$	$q \cdot L_0$
4	L_0	$Q \cdot L_0$
5	$q \cdot L_0$	L_0
6	$q \cdot L_0$	$Q \cdot L_0$

Доведено, що змінюючи довжину пакетів можна забезпечувати збільшення пропускної здатності чи розширення межі стійкості MAC-протоколу [8]. Очевидно, що така зміна довжини пакетів даних призведе до зміни ефективності їх передачі на фізичному рівні (змінюватиметься ймовірність успішної передачі пакета за заданої завадостійкості в радіоканалі) та в LLC-протоколі (буде змінюватися співвідношення розміру поля даних та службової інформації у форматі пакетів).

Постановка задачі

Метою роботи є визначення ефективної швидкості передачі каналного рівня пакетних радіомереж під час використання вказаних стратегій зміни довжини пакетів адаптивного жорсткого МДКН-протоколу з урахуванням обмежень фізичного рівня та LLC-протоколу.

Ефективну швидкість передачі C в пакетній радіомережі за заданої фізичної швидкості передачі V (біт/с) визначимо у вигляді функції:

$$C = VC_M(P_M, C_{PL}), \quad (1)$$

де C_M – коефіцієнт ефективності МДКН-протоколу з урахуванням комплексного впливу вірогідності успішної передачі пакета P_M , яка визначається процедурами МДКН-протоколу, та коефіцієнта спільної ефективності фізичного рівня та LLC-протоколу C_{PL} , який, у свою чергу, залежить від вірогідності успішної передачі пакета P_p на фізичному рівні радіомережі і від коефіцієнта збільшення довжини пакетів та коефіцієнта ефективності C_L прийнятого формату кадра.

Математична модель

Ймовірність успішної передачі для того чи іншого MAC-протоколу залежить як від процедур і довжини пакетів цього протоколу, так і від інтенсивності трафіка. Відомо багато MAC-протоколів з різними стратегіями доступу до радіоканалу. Найбільш загальною характеристикою стратегій є їх жорсткість щодо зайнятого стану радіоканалу. Розрізняють гнучкі протоколи МДКН та жорсткі протоколи МДКН [1]. У цій роботі буде визначено оптимальний розмір пакетів для жорсткого протоколу МДКН з урахуванням комплексного впливу фізичного та канального рівнів радіомережі.

Процедури жорсткого протоколу МДКН полягають у такому. Перед початком передачі абонент повинен перевірити наявність сигналу несучої в радіоканалі. Якщо сигналу несучої немає, тобто радіоканал вільний, то пакет передається. Якщо сигнал несучої наявний, передача відкладається, й абонент постійно перевіряє сигнал несучої доки радіоканал не звільниться. Як тільки радіоканал стає вільним, негайно розпочинається відкладена раніше передача. Очевидно, коли за час зайнятого стану радіоканалу кількість відкладених передач буде більшою за одну, то це призведе до неминучого конфлікту після звільнення радіоканалу. З початку передачі протягом інтервалу вразливості (рівного часу поширення радіосигналу в мережі) інші абоненти, не відчувачи сигналу несучої, можуть почати власну передачу, що також призведе до накладання пакетів і їх взаємного руйнування. Пакети, які потрапили в конфлікт, передаються повторно через випадковий інтервал часу.

На фізичному рівні ймовірність успішної передачі пакета залежить від інтенсивності помилок в радіоканалі та зростає зі зменшенням довжини пакета і, відповідно, знижується з її збільшенням. Утім, LLC-протокол, навпаки, зменшує (збільшує) свою ефективну швидкість передачі зі скороченням (збільшенням) довжини поля даних через наявність фіксованих полів службової інформації у форматах пакетів.

За заданої ймовірності p помилки на один біт в радіоканалі ймовірність безпомилкової передачі пакета визначається його довжиною (кількістю бітів) $L = n + c$, де n – довжина інформаційної частини пакета; c – довжина службової частини пакета (протокольна надмірність): $P_p = (1 - p)^{(n+c)}$.

Ефективна швидкість передачі LLC-протоколу визначається співвідношенням довжини

інформаційної частини пакета до загальної довжини пакета: $C_L = \frac{n}{L}$.

Тоді з урахуванням оптимальної для LLC-протоколу довжини інформаційної частини пакета n_o , яка забезпечує максимальне значення ефективної швидкості передачі фізичного рівня та протоколу LLC [8],

$$C_{PL}(m) = \frac{[mn_o + (r - 1)c](1 - p)^{m(n_o + c)}}{m(n_o + c)}, \quad (2)$$

де $m = \frac{n + c}{n_o + c}$ – коефіцієнт відхилення довжини

пакета щодо його номінального значення для LLC-протоколу,

$$n_o = \frac{-c \ln(1 - p) - \sqrt{(c \ln(1 - p))^2 - 4c \ln(1 - p)}}{2 \ln(1 - p)}.$$

Отримаємо рівняння ймовірності безконфліктної передачі для жорсткого протоколу МДКН, якщо довжина пакетів даних $L_o = n_o + c$. Для спрощення аналізу зазвичай припускають, що пакети, які надходять для передачі, та пакети, передача яких відкладена через наявність сигналу несучої або через необхідність повторної передачі, утворюють єдине джерело надходження пакетів з інтенсивністю λ [9]. Час передачі одного пакета $T = \frac{L_o}{V}$. Процес зміни станів пакетної

радіомережі описують одновимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом. Для жорсткого протоколу МДКН радіомережа може перебувати в одному з восьми станів: 1) вільному ($k = 0$); 2) вразливості ($k = 1$); 3) безконфліктної передачі з вільного стану ($k = 2$); 4) безконфліктної передачі зі стану дозволу передачі з однією відкладеною передачею ($k = 3$); 5) безконфліктної передачі зі стану дозволу передачі з більше ніж однією відкладеною передачею ($k = 4$); 6) конфліктної передачі з вільного стану; 7) конфліктної передачі зі стану дозволу передачі з однією відкладеною передачею ($k = 6$); 8) конфліктної передачі зі стану дозволу передачі з більше ніж однією відкладеною передачею ($k = 7$).

Розглянемо ймовірності переходів між станами радіоканалу з довільного часу t за нескінченно малий інтервал Δt .

1. Якщо радіоканал перебуває у стані $\{0\}$, тобто радіоканал вільний, то:

– з ймовірністю $p_{01} = \lambda \Delta t$ за інтервал часу Δt з вхідного потоку надійде новий пакет, який

негайно займе радіоканал, що призведе до його переходу в момент часу $t + \Delta t$ у стан вразливості {1};

– з імовірністю $p_{00} = 1 - \lambda \Delta t$ стан радіоканалу не зміниться.

2. Якщо радіоканал перебуває у стані {1}, тобто в інтервалі вразливості тривалістю a , то:

– з імовірністю $p_{12} = \frac{\Delta t}{a}$ інтервал вразливості закінчиться до того, як надійде хоча б іще один пакет, і радіоканал перейде у стан безконфліктної передачі пакета {2};

– з імовірністю $p_{15} = \lambda \Delta t$ надійде новий пакет із вхідного потоку, станеться конфлікт і в момент часу $t + \Delta t$ радіоканал буде перебувати у стані передачі пакетів з конфліктом {5};

– з імовірністю $p_{11} = 1 - \left(\frac{1}{a} + \lambda\right) \Delta t$ стан радіоканалу не зміниться.

3. Якщо радіоканал перебуває у стані {2}, тобто відбувається безконфліктна передача пакета із вільного стану радіоканалу, то:

– з імовірністю $p_{20} = \frac{\Delta t}{T_r}$ передача пакета завершиться, і радіоканал перейде у вільний стан {0};

– з імовірністю $p_{23} = \lambda \Delta t$ за інтервал часу Δt з вхідного потоку надійде новий пакет і радіоканал перейде у стан безконфліктної передачі з однією відкладеною передачею {3};

– з імовірністю $p_{22} = 1 - \left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right) \Delta t$ стан радіоканалу не зміниться, а $T_r = \frac{r}{V}$ – час передачі

пакета даних із вільного стану за значень r із табл. 1: $r = Q \cdot L_0$ – для першої і третьої стратегій, $r = q \cdot L_0$ – для п'ятої та шостої стратегій, $r = L_0$ – для другої та четвертої стратегій, де $Q > 1$, $q < 1$.

4. Якщо радіоканал перебуває у стані {3}, тобто здійснюється безконфліктна передача зі стану дозволу передачі з однією відкладеною передачею, то:

– з імовірністю $p_{31} = \frac{\Delta t}{T_g}$ безконфліктна передача пакета завершиться, розпочнеться передача відкладеного пакета і радіоканал перейде до стану вразливості {1};

– з імовірністю $p_{34} = \lambda \Delta t$ за інтервал часу Δt із вхідного потоку надійде новий пакет і радіо-

оканал перейде у стан безконфліктної передачі з більше ніж однією відкладеною передачею {4};

– з імовірністю $p_{33} = 1 - \left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right) \Delta t$ стан радіоканалу не зміниться, $T_g = \frac{g}{V}$ – час передачі

пакета даних зі стану дозволу передачі, із табл. 1: $g = Q \cdot L_0$ – для четвертої і шостої стратегій, $g = q \cdot L_0$ – для другої і третьої стратегій, $g = L_0$ – для першої та п'ятої стратегій.

5. Якщо радіоканал перебуває у стані {4}, тобто здійснюється безконфліктна передача зі стану дозволу передачі з більше ніж однією відкладеною передачею, то:

– з імовірністю $p_{45} = \frac{\Delta t}{T_g}$ безконфліктна передача пакета завершиться і розпочнеться одночасна передача відкладених пакетів, тобто радіоканал перейде у стан конфліктної передачі пакетів {5};

– з імовірністю $p_{44} = 1 - \frac{\Delta t}{T_g}$ стан радіоканалу не зміниться.

6. Якщо радіоканал перебуває у стані {5}, тобто здійснюється конфліктна передача пакетів з вільного стану, то:

– з імовірністю $p_{50} = \frac{\Delta t}{T_r}$ конфліктна передача пакетів завершиться до того, як надійде бодай один пакет і радіоканал перейде у вільний стан {0};

– з імовірністю $p_{56} = \lambda \Delta t$ за інтервал часу Δt із вхідного потоку надійде новий пакет і радіоканал перейде у стан конфліктної передачі з однією відкладеною передачею {6};

– з імовірністю $p_{55} = 1 - \left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right) \Delta t$ стан радіоканалу не зміниться.

7. Якщо радіоканал перебуває у стані {6}, тобто здійснюється конфліктна передача зі стану дозволу передачі з однією передачею, то:

– з імовірністю $p_{61} = \frac{\Delta t}{T_g}$ конфліктна передача пакета завершиться і розпочнеться передача відкладеного пакета, тобто радіоканал перейде у стан вразливості {1};

– з імовірністю $p_{67} = \lambda \Delta t$ за інтервал часу Δt із вхідного потоку надійде новий пакет і радіока-

нал перейде у стан конфліктної передачі з більше ніж однією відкладеними передачами {7};

– з імовірністю $p_{66} = 1 - \left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right)\Delta t$ стан радіоканалу не зміниться.

8. Якщо радіоканал перебуває у стані {7}, тобто зі стану дозволу здійснюється конфліктна передача передача з більше ніж однією відкладеними передачами, то:

– з імовірністю $p_{75} = \frac{\Delta t}{T_g}$ конфліктна передача пакета завершиться і розпочнеться передача відкладених пакетів, тобто радіоканал перейде у стан передачі пакетів з конфліктом {5};

– з імовірністю $p_{77} = 1 - \frac{1}{T_g}\Delta t$ стан радіоканалу не зміниться.

На рис. 1 зображено діаграму станів радіоканалу та ймовірності переходів між ними.

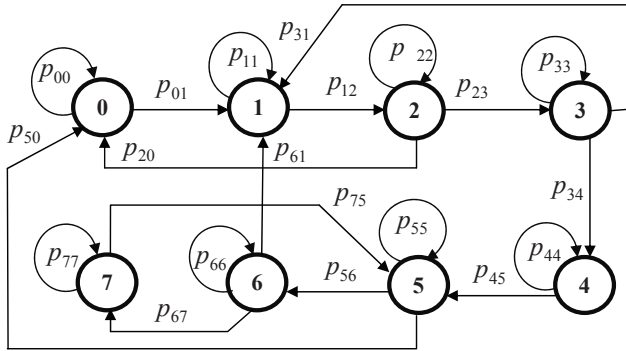


Рис. 1. Діаграма станів радіоканалу

З діаграми станів радіоканалу можна записати систему кінцево-різницевого рівнянь для ймовірності станів радіоканалу:

$$P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P_0(t) + \frac{1}{T_r}\Delta tP_2(t) + \frac{1}{T_r}\Delta tP_5(t);$$

$$P_1(t + \Delta t) = \left(1 - \left(\frac{1}{a} + \lambda\right)\Delta t\right)P_1(t) + \lambda\Delta tP_0(t) + \frac{1}{T_g}\Delta tP_3(t) + \frac{1}{T_g}\Delta tP_6(t);$$

$$P_2(t + \Delta t) = \left(1 - \left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right)\Delta t\right)P_2(t) + \frac{1}{a}\Delta tP_1(t);$$

$$P_3(t + \Delta t) = \left(1 - \left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right)\Delta t\right)P_3(t) + \lambda\Delta tP_2(t);$$

$$P_4(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{T_g}\Delta t\right)P_4(t) + \lambda\Delta tP_3(t);$$

$$P_5(t + \Delta t) = \left(1 - \left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right)\Delta t\right)P_5(t) + \frac{1}{T_g}\Delta tP_4(t) + \lambda\Delta tP_1(t) + \frac{1}{T_g}\Delta tP_7(t);$$

$$P_6(t + \Delta t) = \left(1 - \left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right)\Delta t\right)P_6(t) + \lambda\Delta tP_5(t);$$

$$P_7(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{T_g}\Delta t\right)P_7(t) + \lambda\Delta tP_6(t).$$

Після здійснення нескладних перетворень і переходу до $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо систему лінійних диференціальних рівнянь, що задовольняє розподіл ймовірностей станів радіоканалу:

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\lambda P_0(t) + \frac{1}{T_r}P_2(t) + \frac{1}{T_r}P_5(t);$$

$$\frac{\partial P_1(t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{a} + \lambda\right)P_1(t) + \lambda P_0(t) + \frac{1}{T_g}P_3(t) + \frac{1}{T_g}P_6(t);$$

$$\frac{\partial P_2(t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right)P_2(t) + \frac{1}{a}P_1(t);$$

$$\frac{\partial P_3(t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right)P_3(t) + \lambda P_2(t);$$

$$\frac{\partial P_4(t)}{\partial t} = -\frac{1}{T_g}P_4(t) + \lambda P_3(t);$$

$$\frac{\partial P_5(t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right)P_5(t) + \frac{1}{T_g}P_4(t) + \lambda P_1(t) + \frac{1}{T_g}P_7(t);$$

$$\frac{\partial P_6(t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right)P_6(t) + \lambda P_5(t);$$

$$\frac{\partial P_7(t)}{\partial t} = -\frac{1}{T_g} P_7(t) + \lambda P_6(t).$$

З умови стаціонарності з цієї системи рівнянь отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що зв'язує між собою ймовірності станів радіоканалу:

$$\lambda P_0 = \frac{1}{T_r} P_2 + \frac{1}{T_r} P_5;$$

$$\left(\frac{1}{a} + \lambda\right) P_1 = \lambda P_0 + \frac{1}{T_g} P_3 + \frac{1}{T_g} P_6;$$

$$\left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right) P_2 = \frac{1}{a} P_1; \quad \left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right) P_3 = \lambda P_2;$$

$$\frac{1}{T_g} P_4 = \lambda P_3; \quad \left(\frac{1}{T_r} + \lambda\right) P_5 = \frac{1}{T_g} P_4 + \lambda P_1 + \frac{1}{T_g} P_7;$$

$$\left(\frac{1}{T_g} + \lambda\right) P_6 = \lambda P_5; \quad \frac{1}{T_g} P_7 = \lambda P_6.$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є значення ймовірностей кожного стану радіоканалу:

$$P_0 = \left(\frac{1}{\lambda T_r} + \frac{\lambda T_r T_g + a(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g)}{T_r[(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g) - \lambda^2 T_r T_g]} \right) P_2 = K_0 P_2;$$

$$P_1 = \frac{a(1 + \lambda T_r) P_2}{T_r} = K_1 P_2; \quad P_3 = \frac{\lambda T_g P_2}{1 + \lambda T_g} = K_3 P_2;$$

$$P_4 = \frac{(\lambda T_g)^2 P_2}{1 + \lambda T_g} = K_4 P_2;$$

$$P_5 = \frac{[\lambda(\lambda T_r T_g + a(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g))] P_2}{(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g) - \lambda^2 T_r T_g} = K_5 P_2;$$

$$P_6 = \frac{[\lambda^2 T_g (\lambda T_r T_g + a(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g))] P_2}{[(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g) - \lambda^2 T_r T_g](1 + \lambda T_g)} = K_6 P_2;$$

$$P_7 = \frac{[\lambda^3 T_g^2 (\lambda T_r T_g + a(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g))] P_2}{[(1 + \lambda T_r)(1 + \lambda T_g) - \lambda^2 T_r T_g](1 + \lambda T_g)} = K_7 P_2,$$

де $P_2 = \left(\sum_{i=0}^{i=7} K_i\right)^{-1}$ з урахуванням нормування

$$\sum_{i=0}^{i=7} P_i = 1.$$

Враховуючи, що безконфліктна передача здійснюється, коли радіоканал перебуває у другому, третьому або четвертому станах, вірогідність успішної передачі для жорсткого протоколу МДКН буде такою:

$$P_M = P_2 + P_3 + P_4. \quad (3)$$

Отже, зважаючи на (1), (2) та (3), ефективну швидкість передачі для MAC-протоколу із жорсткою стратегією управління доступом можна записати у вигляді

$$C = V(P_2 C_{PL}(r) + (P_3 + P_4) C_{PL}(g)), \quad (4)$$

де $C_{PL}(r)$ та $C_{PL}(g)$ – значення формули (2) за $m = r$ та $m = g$ відповідно для стратегії з табл. 1.

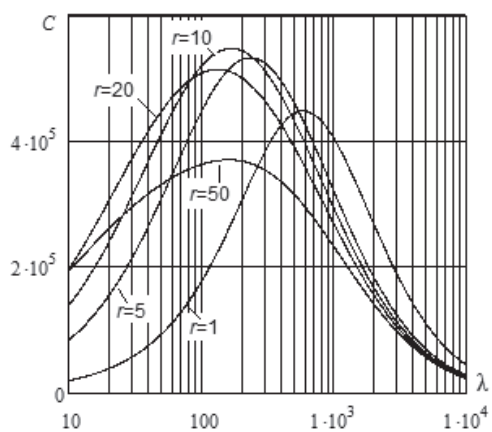
Аналіз числових результатів

На рис. 2 показано графіки залежності ефективної швидкості передачі, розраховані за формулою (4) для кожної стратегії для чотирьох значень параметрів r і g (за значень $r = 1$ та $g = 1$ адаптивного управління немає). Видно, що підвищення пропускної здатності (максимального значення C) забезпечують (у порядку рівня підвищення) третя, перша, шоста та четверта стратегії, причому перша і третя – за значень інтенсивності трафіка менших за межу стійкості протоколу доступу (рівень трафік, за якого ефективна швидкість передачі має максимальне значення) без адаптивного управління, що звужує допустимий діапазон інтенсивності трафіка, а шоста і четверта – за більших за межу стійкості значень, що розширює допустимий діапазон інтенсивності трафіка. Майже не впливає на ефективну швидкість передачі друга стратегія. П'ята стратегія загалом знижує ефективну швидкість передачі, але може забезпечити стійку роботу мережі за значень інтенсивності трафіка, які перевищують межу стійкості без адаптації.

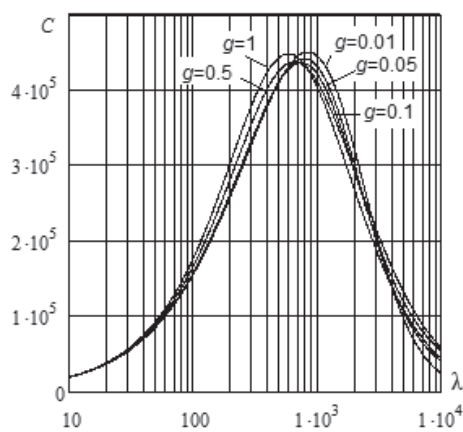
На рис. 3 показано графіки залежності пропускної здатності C_m (максимального значення C) від довжини пакетів даних, які дають кількісну оцінку впливу стратегій доступу на зміни пропускної здатності. Розрахунки за заданих значень системних параметрів за (4) та вказані графіки демонструють таке: використовуючи першу стратегію, можна збільшити пропускну здатність до 22,2 % за $r = 10$; друга стратегія не забезпечує збільшення пропускної здатності; третя стратегія збільшує пропускну здатність до 37 % за $r = 10$ та $g = 0,1$; четверта стратегія збільшує пропускну здатність лише до 5 % за $r = 1$

та $g=5$; п'ята стратегія приводить лише до зменшення пропускної здатності; шоста стратегія

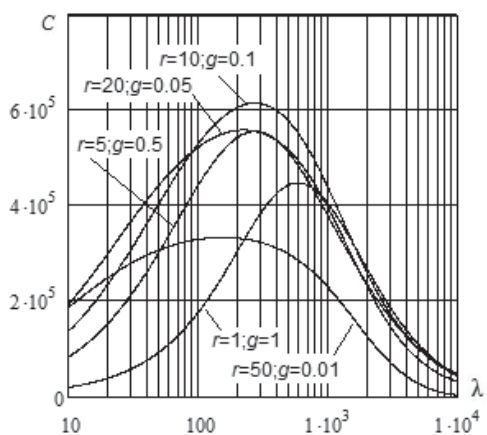
збільшує пропускну здатність до 13 % за $r=0,1$ та $g=10$.



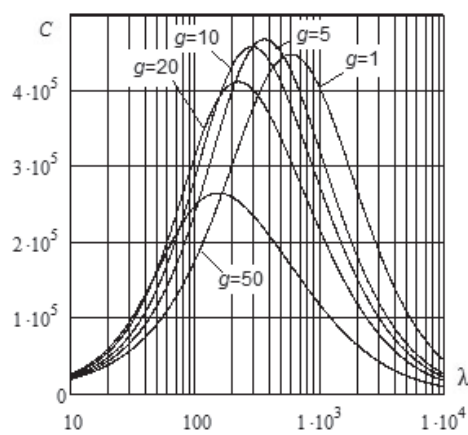
1 стратегія



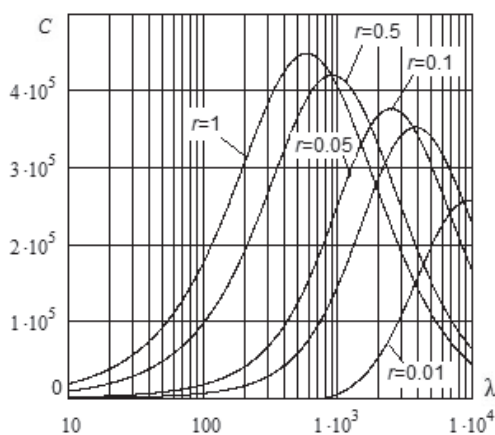
2 стратегія



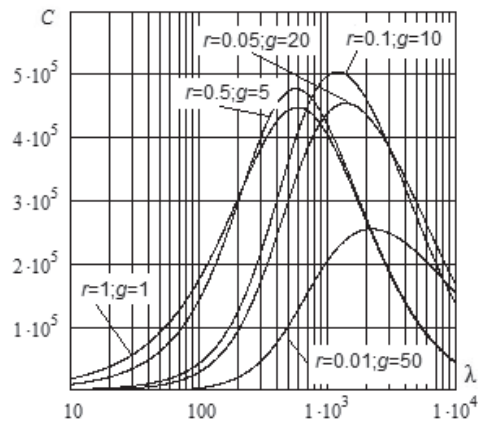
3 стратегія



4 стратегія



5 стратегія



6 стратегія

Рис. 2. Ефективна швидкість передачі

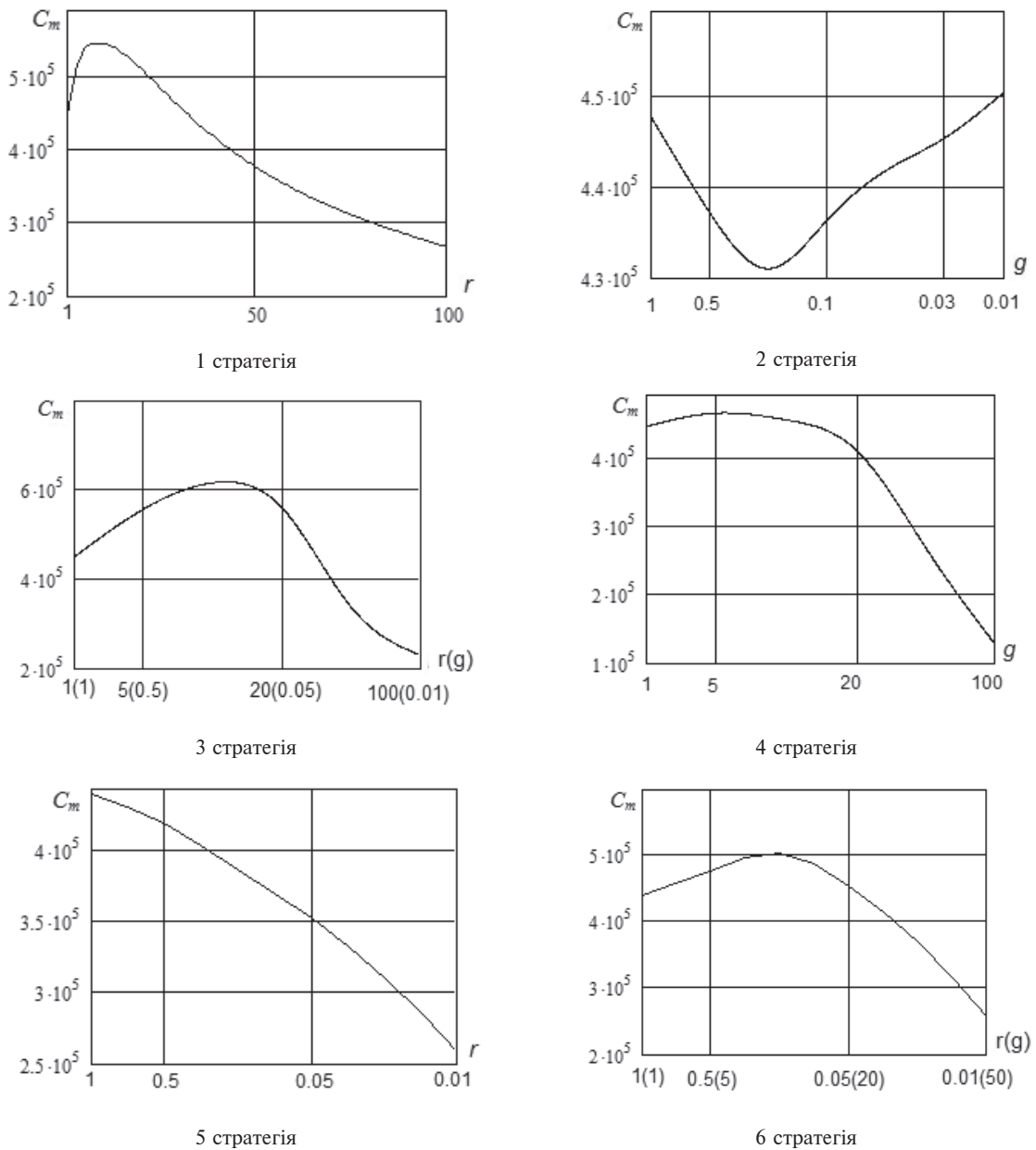


Рис. 3. Пропускна здатність

Висновки

Запропонована математична модель може бути використана в адаптивних протоколах LLC і MAC пакетних радіомереж для розрахунку оптимального значення довжини пакетів даних з урахуванням комплексного впливу фізичного і каналного рівнів мережі із жорстким конкурентним доступом до радіоканалу, а також для обчислення ефективної швидкості передачі даних.

За допомогою отриманої математичної моделі доведено, що з шести стратегій управлін-

ня довжиною пакетів для адаптивних жорстких протоколів МДКН практичну значимість з точки зору збільшення ефективної передачі за умови урахування впливу параметрів фізичного та LLC-рівня мають лише перша, третя та шоста стратегії. Для цих стратегій за отриманою моделлю може бути розраховано оптимальний розмір довжини пакетів даних для кожного набору системних параметрів, таких як швидкість передачі, ймовірність пошкодження одного біта інформації завадами в радіоканалі, а також структура пакета LLC-протоколу.

Подальші дослідження ефективності дібного розподілу трафіка в пакетних радіо- MAC-протоколів будуть проведені для самопо- режах.

References

- [1] S.G. Bunin, *et al.*, “Self-organizing radio networks with ultra-wideband signals”. Kyiv, Ukraine: Naukova dumka, 2012, 444 p.
- [2] B. Salameh, A. Shamekh, “Adaptive Packet-size Control for Improved Throughput in Dynamic Access”, *Networks. Cluster Comput*, vol. 24, pp.1935–1944, 2021. doi.org/10.1007/s10586-021-03237-z
- [3] G. Alnwaimi, H. Boujema, “Adaptive Packet Length and MCS Using Average or Instantaneous SNR”. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 67, no. 11, pp.10519–10527, 2018. doi.org/10.1109/TVT.2018.2865798
- [4] Xi Chen, Ming Ma, Anfeng Liu, “Dynamic power management and adaptive packet size selection for IoT in e-Healthcare”, *Computers & Electrical Engineering*, vol. 65, pp. 357–375, 2018. doi.org/10.1016/j.compeleceng.2017.06.010
- [5] K.D. Gulyaev, V.A. Kaptur and V.I. Tichonov, “Principles of organization of adaptive interaction of open systems”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 2. pp.7–15, 2012, <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/36633/1/2012-2-1.pdf>
- [6] S. Dutt, S.Agrawal and R. Vig, “Impact of Variable Packet Length on the Performance of Heterogeneous Multimedia Wireless Sensor Networks”, *Wireless Pers. Commun*, no. 107, pp. 1849–1863, 2019. doi.org/10.1007/s11277-019-06361-7
- [7] A.P.Voiter, “Impact of packet length management strategies on MAC-layer performance of packet radio networks”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 6, pp. 7–12, 2012. <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/37011/1/2012-6-1.pdf>
- [8] A.P.Voiter, “Comprehensive analysis of effective transmission speed in adaptive packet radio networks”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 6, pp.7–12, 2013. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/NVKPI_2013_6_3.pdf
- [9] A.A. Nazarov and S.A. Tsoi, “General approach to the study of Markov models of data transmission networks controlled by static random multiple access protocols”, *Automation and Informatics*, no. 4, pp. 73–85, 2004. <https://cyberleninka.ru/article/n/obschiiy-podhod-k-issledovaniyu-markovskih-modeley-setey-predachi-dannyh-upravlyaemyh-dinamicheskimi-protokolom-sluchaynogo/viewer>

A.P. Voiter

Adaptive control at the channel level of the packet radio networks with a rigid strategy for accessing the radio channel

Background. Development of methods and means of the adaptive management control of the bandwidth radio networks with competitive access to the radio channel.

Objective. Determination of the effect of packets length on the effective transmission speed of radio networks taking into account the parameters, formats and procedures of the physical and channel levels when using six possible strategies of the adaptive CSMA protocol with a rigid strategy of competitive access to the radio channel.

Methods. The goal is achieved by creating and analyzing a mathematical model of effective transmission speed in radio network. The model is described by the equation of the effective transmission rate, which is a function of the probability of conflict-free transmission of the adaptive CSMA protocol for rigid strategy and the deviation coefficient of the size of data packets from the optimal LLC protocol, taking into account the probability of packet damage due to interference in the radio channel.

Results. With the help of this mathematical model, it is proved that of the six packet length management strategies for adaptive CSMA protocols with a rigid strategy, only the first, third and sixth strategies have practical significance from the point of view of increasing the effective transmission speed, provided that the influence of the parameters of the physical and LLC levels is taken into account. For these strategies can be calculated according to this model the optimal size of the length of data packets for each set of system parameters, such as the transmission speed, the probability of damaging one bit of information due to interference in the radio channel, and the structure of the packet of the LLC protocol.

Conclusions. The proposed mathematical model is a tool for calculating the bandwidth of radio networks and the optimal size of data packets during adaptive management of competitive access to a radio channel with a hard strategy in conditions of significant fluctuations in traffic intensity and changes in the intensity of interference in the radio channel.

Keywords: radio networks, interference, competitive access, mathematical model, adaptive management, package.

Рекомендована Радою
НН інституту телекомунікаційних систем
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
01 березня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-2.270281

UDC 519.833+519.833.3

V. V. Romanuke

Polish Naval Academy, Gdynia, Poland

romanukevadimv@gmail.com

FINITE APPROXIMATION OF NON-COOPERATIVE 2-PERSON GAMES PLAYED
IN STAIRCASE-FUNCTION CONTINUOUS SPACES

Background. There is a known method of approximating continuous non-cooperative 2-person games, wherein an approximate solution (an equilibrium situation) is considered acceptable if it changes minimally by changing the sampling step minimally. However, the method cannot be applied straightforwardly to a 2-person game played with staircase-function strategies. Besides, the independence of the player's sampling step selection should be taken into account.

Objective. The objective is to develop a method of finite approximation of 2-person games played in staircase-function continuous spaces by taking into account that the players are likely to independently sample their pure strategy sets.

Methods. To achieve the said objective, a 2-person game, in which the players' strategies are staircase functions of time, is formalized. In such a game, the set of the player's pure strategies is a continuum of staircase functions of time, and the time is thought of as it is discrete. The conditions of sampling the set of possible values of the player's pure strategy are stated so that the game becomes defined on a product of staircase-function finite spaces. In general, the sampling step is different at each player and the distribution of the sampled points (function-strategy values) is non-uniform.

Results. A method of finite approximation of 2-person games played in staircase-function continuous spaces is presented. The method consists in irregularly sampling the player's pure strategy value set, finding the best equilibria in "smaller" bimatrix games, each defined on a subinterval where the pure strategy value is constant, and stacking the equilibrium situations if they are consistent. The stack of the "smaller" bimatrix game equilibria is an approximate equilibrium in the initial staircase game. The (weak) consistency of the approximate equilibrium is studied by how much the payoff and equilibrium situation change as the sampling density minimally increases by the three ways of the sampling increment: only the first player's increment, only the second player's increment, both the players' increment. The consistency is decomposed into the payoff, equilibrium strategy support cardinality, equilibrium strategy sampling density, and support probability consistency. It is practically reasonable to consider a relaxed payoff consistency.

Conclusions. The suggested method of finite approximation of staircase 2-person games consists in the independent samplings, solving "smaller" bimatrix games in a reasonable time span, and stacking their solutions if they are consistent. The finite approximation is regarded appropriate if at least the respective approximate (stacked) equilibrium is ε -payoff consistent.

Keywords: game theory; payoff functional; staircase-function strategy; bimatrix game; irregular sampling; approximate equilibrium consistency.

Introduction

Non-cooperative 2-person games model processes where two sides referred to as persons or players struggle for optimizing the limited resources distribution implying as real-world resources, facilities, tools, funds, energy, etc., as well as more abstract objects whose utility is assessed as the player's payoff [1, 2]. A possible action of the player is called its (pure) strategy used to receive closely the

best possible payoff under conditions of uncertainty generated by actions of the other player [3, 4]. The strategy can be as a simple (point) action, as well as a process consisting of an order of simple actions [1, 5, 6]. In the simplest case, the player's pure strategy is a short action whose duration is negligible. This negligible-duration action is represented as just a time point. In a more complicated case, the player's pure strategy is a function of time [4, 7, 8], so the player's action is a complex process [6, 9].

Пропозиція для цитування цієї статті: В. В. Романюк, "Скінченна апроксимація безкоаліційних ігор двох осіб, що розігруються у неперервних просторах сходиноквих функцій", Наукові вісті КПІ, 1–4, с. 16–44, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.270281

Offer a citation for this article: Vadim V. Romanuke, "Finite approximation of non-cooperative 2-person games played in staircase-function continuous spaces", *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 16–44, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.270281

Such strategies are used in multistage optimization [10], planning and control processes [11], scheduling [12], multistage corrective action processes [13], etc., modelled under uncertainties and influence of other competitive factors [5, 6, 9].

Whichever the pure strategy form is, the simplest 2-person game is a bimatrix game. Any bimatrix game has an equilibrium – a finite number or continuum of equilibria, either in pure or mixed strategies [1, 2]. Infinite or continuous 2-person games, where the players' payoff functions are meshes or surfaces of two variables defined on finite-dimensional compact Euclidean subspaces, are far more complicated [1, 2, 7, 14]. A simple example of the subspace is a unit square [2, 15]. Even if the surfaces do not have a discontinuity, the equilibrium is not always determinable as opposed to bimatrix games [2]. Moreover, 2-person games defined on open (or half-open) subspaces (e. g., open square) may not have an equilibrium at all [2, 16, 17]. Therefore, rendering a 2-person game to a bimatrix one is a crucial task in game modelling as it allows assuredly having a game solution (equilibrium point) as a pair of the players' best strategies. Without rendering, a 2-person game may have an intractable equilibrium (if any), when the equilibrium strategy support is infinite or continuous (e. g., see the examples in [1, 7, 16, 17]).

A 2-person game, in which the player's strategy is a function (e. g., of time), is a far more complicated case. In such games, the payoff kernel must be a functional mapping every pair of functions (pure strategies of the players) into a real value [7, 8, 18, 19]. A game played with such function-strategies is rendered down to a bimatrix game only when each of the players possesses a finite set of one's function-strategies. Obviously, the rendering is theoretically impossible if the set of the player's strategies is infinite.

The question of rendering an infinite game to a finite one was studied in [14, 20]. Regardless of antagonism of the players' interests, it consists in approximating the infinite game so that the approximated game would not lose the properties of the initial game. There are two fundamental conditions in the game approximation core that allow rendering a 2-person game with strategies as functions down to a bimatrix game: the time sampling and finiteness of possible values of the player's function-strategy.

According to the first fundamental condition, a time interval, on which the pure strategy is defined, should be broken into a set of subintervals, on which the strategy could be (maybe, approximately) con-

sidered constant. It can be done according to the rules of a system to be game-modelled, where the administrator (supervisor, manager, controller, etc.) does always define (or constrain) the form of the strategies players will use [1, 8, 10, 11, 13]. Moreover, any process is interpreted static on a sufficiently short time span. Henceforward, the time sampling condition is considered automatically (by default) fulfilled. Then the function-strategy becomes staircase. To keep the terminology simple, the respective game can be called staircase.

The second fundamental condition requires that the set of possible values of the player's function-strategy be finite. It is imposed for the natural reason that the number of factual actions of the players (in any game) is always finite. While the players may use strategies of whichever form they want, the number of their actions has a natural limit (unless the game is everlasting; but the everlasting game is an unreal mathematical object) [5, 7, 9, 10, 12]. Thus, the set of function-strategies used in a 2-person game is finite anyway. Therefore, any non-everlasting 2-person game is played as if it is a bimatrix game. However, the size of this bimatrix game depends on how each of the players has decided on discretizing (i. e., finitely approximating) one's set of function-strategy values. It does not seem that a player is likely to independently discretize the set identically to the other player's discretization.

A method of approximating continuous 2-person games is known from [8, 14, 20]. It is similar to the method for approximating continuous zero-sum games, but the principal difference is that there may be multiple equilibria in a 2-person game whose payoffs (unlike in a zero-sum game) are not equivalent. Theoretically, the continuous game approximation is based on sampling (discretizing) either the players' payoff kernels or the sets of players' pure strategies. Basically, this is the same as it results in finite sets of players' payoffs.

In general, an approximate solution is considered acceptable if it changes minimally by changing the sampling step minimally. This is the main requirement to accept an approximate solution. Obviously, the independence of the player's sampling step selection should be taken into consideration.

Problem statement

Although it is impossible to apply the approximation method straightforwardly to a 2-person game played with staircase-function strategies, a part of the staircase 2-person game considered on a time

subinterval where the players' strategies are constant can be directly approximated by the method. Issued from the impossibility of solving 2-person games played in staircase-function continuous spaces, the objective is to develop a method of finite approximation of such games by taking into account the independence of the player's sampling step selection (i. e., the players are likely to independently sample their pure strategy sets). The approximate solution type is the Nash equilibrium. For achieving the objective, the following six tasks are to be fulfilled:

1. To formalize a non-cooperative 2-person game, in which the players' strategies are functions of time.
2. To formalize a non-cooperative 2-person game, in which the players' strategies are staircase functions. In such a game, the set of the player's pure strategies is a continuum of staircase functions of time, and the time is thought of as it is discrete.
3. To state conditions of sampling the set of possible values of the player's pure strategy so that the game be defined on a product of staircase-function finite spaces. By this, the sampling step is to be different at each player, and the distribution of the sampled points (function-strategy values) must not be necessarily uniform.
4. To state conditions of the appropriate finite approximation applicable to the non-cooperative 2-person game. This implies also the staircase-function space convergence.
5. To discuss the independence of the player's sampling step selection. The reconciliation of the difference of the players' sampling step selection on the background of multiplicity of equilibria is to be discussed as well. Eventually, the applicability and significance of the finite approximation method for the game theory is to be argued for.
6. To make an unbiased conclusion on the contribution to the game theory field. An outlook of how the research might be extended and advanced is to be made as well.

A 2-person game played with strategies as functions

Denote a pure strategy of the first and second players by $x(t)$ and $y(t)$, respectively, where each of the players uses one's strategy during (time) interval $[t_1; t_2]$ by $t_2 > t_1$. Functions $x(t)$ and $y(t)$ defined almost everywhere on interval $[t_1; t_2]$ are bounded, i. e.

$$a_{\min} \leq x(t) \leq a_{\max} \quad \text{by} \quad a_{\min} < a_{\max} \quad (1)$$

and

$$b_{\min} \leq y(t) \leq b_{\max} \quad \text{by} \quad b_{\min} < b_{\max}. \quad (2)$$

Besides, the square of the function-strategy is presumed to be Lebesgue-integrable [21]. The sets of the players' pure strategies are

$$X = \{x(t), t \in [t_1; t_2], t_1 < t_2 : a_{\min} \leq x(t) \leq a_{\max} \text{ by } a_{\min} < a_{\max}\} \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \quad (3)$$

and

$$Y = \{y(t), t \in [t_1; t_2], t_1 < t_2 : b_{\min} \leq y(t) \leq b_{\max} \text{ by } b_{\min} < b_{\max}\} \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2], \quad (4)$$

respectively. Each of sets (3) and (4) is a rectangular functional space, in which every element is a bounded function of time by (1) and (2).

The first player's payoff in situation

$$\{x(t), y(t)\} \quad (5)$$

is

$$K(x(t), y(t)) \quad (6)$$

and the second player's payoff in situation (5) is

$$H(x(t), y(t)). \quad (7)$$

Payoffs (6) and (7) are presumed to be integral functionals [21]:

$$K(x(t), y(t)) = \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \quad (8)$$

and

$$H(x(t), y(t)) = \int_{[t_1; t_2]} g(x(t), y(t), t) d\mu(t) \quad (9)$$

with functions

$$f(x(t), y(t), t) \quad (10)$$

and

$$g(x(t), y(t), t) \quad (11)$$

of $x(t)$ and $y(t)$ explicitly including time t . Therefore, the continuous 2-person game

$$\langle \{X, Y\}, \{K(x(t), y(t)), H(x(t), y(t))\} \rangle \quad (12)$$

is defined on product

$$X \times Y \subset \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \times \mathbb{L}_2[t_1; t_2] \quad (13)$$

of rectangular functional spaces (3) and (4) of players' pure strategies. It is worth noting that the game continuity is defined by the continuity of spaces (3) and (4), whereas payoff functionals (8) and (9) still can have discontinuities. In general, each of payoff functionals (6) and (7) may have a terminal component like

$$K(x(t), y(t)) = \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) + T_f(x(t_2), y(t_2), t_2) \quad (14)$$

and

$$H(x(t), y(t)) = \int_{[t_1; t_2]} g(x(t), y(t), t) d\mu(t) + T_g(x(t_2), y(t_2), t_2) \quad (15)$$

by some terminal functions [22]

$$T_f(x(t_2), y(t_2), t_2) \quad (16)$$

and

$$T_g(x(t_2), y(t_2), t_2) \quad (17)$$

depending on only the final state of the player's strategy, but this case is not to be considered here.

A zero-sum game defined on product (13) [23] is a partial case of 2-person game (12). However, whereas the zero-sum game has an optimal solution whose payoff is constant (whichever the number of saddle points is), the 2-person game not being a zero-sum game does not have an optimal solution. It has an equilibrium point or may have multiple equilibria, at which the players' payoffs may induce contradictions with respect to payoff profitability and fairness [1, 2, 9, 24].

As it has been argued above, 2-person game (12), in which the players' strategies are functions of time, in practical reality is played discretely during time interval $[t_1; t_2]$. The time step is the same for each of the players because it is presumed to be established either by the rules of the system game-modelled or by the administrator. Herein, the influence of terminal functions (16), (17) is presumed to be embedded into integral functionals (8), (9).

A 2-person game with staircase-function strategies

As the 2-person game is played discretely during a time interval, then there is a number of subintervals at which the player's pure strategy is constant. Denote this number by N , where $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Although the player's pure strategy can still have a continuum of possible values, it is now a staircase function having only N different values. So, there are $N-1$ time points at which the staircase-function strategy can change its value. These points are $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{N-1}$, where

$$t_1 = \tau^{(0)} < \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(N-1)} < \tau^{(N)} = t_2. \quad (18)$$

The breaking by (18) is not necessarily to be equidistant. However, points $\{\tau^{(i)}\}_{i=0}^N$ are the same for each of the players. Besides, points $\{\tau^{(i)}\}_{i=0}^N$ do not change as the 2-person game is repeated. For real practice, surely, only a finite number of repetitions is considered (the game does not last forever).

What happens at each of those "internal" $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{N-1}$ points, at which the player can "switch" the line? To answer this question, it is sufficient to imagine that the strategy value starts changing before exactly arriving at moment $t = \tau^{(i)}$. But the start should be as late as possible (that is, as close as possible to moment $t = \tau^{(i)}$). In terms of the functional analysis, this is called to be right-continuous [21, 23]. Thus, the staircase-function strategies are right-continuous: if the strategy value is changed at $t = \tau^{(i)}$, then

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(i)} + \varepsilon) = x(\tau^{(i)}) \quad (19)$$

and

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(i)} + \varepsilon) = y(\tau^{(i)}) \quad (20)$$

for $i = \overline{1, N-1}$, whereas

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(i)} - \varepsilon) \neq x(\tau^{(i)}) \quad (21)$$

and

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(i)} - \varepsilon) \neq y(\tau^{(i)}) \quad (22)$$

for $i = \overline{1, N - 1}$. As an exception,

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} x(\tau^{(N)} - \varepsilon) = x(\tau^{(N)}) \quad (23)$$

and

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} y(\tau^{(N)} - \varepsilon) = y(\tau^{(N)}), \quad (24)$$

so

$$x(\tau^{(N-1)}) = x(\tau^{(N)}) \quad (25)$$

and

$$y(\tau^{(N-1)}) = y(\tau^{(N)}). \quad (26)$$

As both functions $x(t)$ and $y(t)$ are constant

$$\forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \text{ for } i = \overline{1, N - 1}$$

$$\text{and } \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}],$$

then game (12) can be thought of as it is a succession of N continuous 2-person games

$$\langle \{[a_{\min}; a_{\max}], [b_{\min}; b_{\max}]\}, \{K(\alpha_i, \beta_i), H(\alpha_i, \beta_i)\} \rangle \quad (27)$$

defined on rectangle

$$[a_{\min}; a_{\max}] \times [b_{\min}; b_{\max}]$$

by

$$\alpha_i = x(t) \in [a_{\min}; a_{\max}] \text{ and } \beta_i = y(t) \in [b_{\min}; b_{\max}]$$

$$\forall t \in [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \text{ for } i = \overline{1, N - 1}$$

$$\text{and } \forall t \in [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}], \quad (28)$$

where the factual first player's payoff in situation

$$\{\alpha_i, \beta_i\} \quad (29)$$

is

$$K(\alpha_i, \beta_i) = \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, t) d\mu(t),$$

$$\forall i = \overline{1, N - 1} \quad (30)$$

and

$$K(\alpha_N, \beta_N) = \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, t) d\mu(t), \quad (31)$$

and the factual second player's payoff in situation (29) is

$$H(\alpha_i, \beta_i) = \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(\alpha_i, \beta_i, t) d\mu(t)$$

$$\forall i = \overline{1, N - 1} \quad (32)$$

and

$$H(\alpha_N, \beta_N) = \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(\alpha_N, \beta_N, t) d\mu(t). \quad (33)$$

Henceforward, game (12) equivalent to the succession of N continuous 2-person games (27) by (28)–(33) is called staircase. A pure-strategy situation in staircase game (12) is a succession of N situations

$$\{\{\alpha_i, \beta_i\}\}_{i=1}^N \quad (34)$$

in games (27). In staircase game (12), the set of the player's pure strategies is still a continuum of staircase functions of time, but the time is discrete according to the breaking by (18). This time-discretization property, implying constant values of the players' strategies on every subinterval, allows, in addition to the succession of N continuous 2-person games (27), decomposing staircase game (12) with respect to the (staircase) payoff.

Theorem 1. In a pure-strategy situation (5) of staircase game (12), represented as a succession of N games (27), functionals (8) and (9) are re-written as subinterval-wise sums

$$K(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^N K(\alpha_i, \beta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, t) d\mu(t)$$

$$+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, t) d\mu(t) \quad (35)$$

and

$$H(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^N H(\alpha_i, \beta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(\alpha_i, \beta_i, t) d\mu(t)$$

$$+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(\alpha_N, \beta_N, t) d\mu(t), \quad (36)$$

respectively.

Proof. Time interval $[t_1; t_2]$ can be re-written as

$$[t_1; t_2] = \left\{ \bigcup_{i=1}^{N-1} [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \right\} \cup [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]. \quad (37)$$

Therefore, the property of countable additivity of the Lebesgue integral can be used:

$$\begin{aligned} K(x(t), y(t)) &= \int_{[t_1; t_2]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \\ &= \int_{\left\{ \bigcup_{i=1}^{N-1} [\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}] \right\} \cup [\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \\ &\quad + \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t). \quad (38) \end{aligned}$$

Owing to (28), $x(t) = \alpha_i$ and $y(t) = \beta_i$, so (38) is simplified as follows:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(x(t), y(t), t) d\mu(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(\alpha_i, \beta_i, t) d\mu(t) \\ &+ \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(\alpha_N, \beta_N, t) d\mu(t) \\ &= \sum_{i=1}^N K(\alpha_i, \beta_i). \quad (39) \end{aligned}$$

In staircase game (12), consequently, subinterval-wise sum (35) holds in any pure-strategy situation (5) consisting of staircase-function strategies $x(t)$ and $y(t)$. Obviously, subinterval-wise sum (36) is proved similarly to (37) – (39). \square

It is noteworthy that **Theorem 1** can be proved also by considering function (10) on a subinterval as a function of time t . Denote this function by $\psi_i(t)$. Then this function appears to be zero on any other subinterval. Subsequently, function (10) is presented as the sum of those subinterval functions:

$$f(x(t), y(t), t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(t),$$

whereupon (39) is deduced.

Theorem 1 does not provide a method of solving the staircase game, but it hints about how the game might be solved in an easier way. **Theorem 1** provides a fundamental decomposition of the staircase game based on the subinterval-wise summing in (35) and (36). This subinterval decomposition allows considering and solving each game (27) separately, whereupon the solutions are stitched (stacked) together.

Reasons for different and irregular sampling

Whichever game type and the number of players are, there are two main arguments for considering different sampling steps at each of the players. First, the players cannot agree on the sampling step due to the cooperation is excluded. Moreover, the players' ranges of function-strategy values may be not equal, i. e.

$$a_{\max} - a_{\min} \neq b_{\max} - b_{\min},$$

so if even the sampling step length is the same, the eventual number of the sampled points may be different. Second, if a player has a wider range of one's function-strategy values then it is likely to be sampled with a greater number of points. This, however, does not mean a denser sampling. Meanwhile, the sampling densities can be compared only when the players use strictly uniform sampling.

In general, the sampling density can vary because a player may tend to use greater or lesser values of one's function-strategy more frequently. This is a reason for a denser sampling in a neighbourhood of those values. Thus, the sampling (at least at one of the players) can be non-uniform (irregular). Therefore, in a generalized approach to finite approximation of 2-person games played in staircase-function continuous spaces, the players' samplings (along the pure strategy value axis) should be considered different and irregular. The uniform sampling will be just a partial case.

Sampling along the pure strategy value axis

In game (27) on subinterval i , the first player has its set $[a_{\min}; a_{\max}]$ of pure strategies, and the second player's pure strategy set is $[b_{\min}; b_{\max}]$. Let set $[a_{\min}; a_{\max}]$ be sampled non-uniformly (irregularly) with M points, $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} A(M) &= \{a^{(m)}\}_{m=1}^M \\ &= \left\{ a_{\min}, \{a^{(m)}\}_{m=2}^{M-1}, a_{\max} \right\} \subset [a_{\min}; a_{\max}] \quad (40) \end{aligned}$$

by

$$a^{(1)} = a_{\min} \quad \text{and} \quad a^{(M)} = a_{\max}, \quad (41)$$

i. e., the endpoints are always included into the sampling. Similarly to this, let set $[b_{\min}; b_{\max}]$ be sampled non-uniformly (irregularly) with J points, $J \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$B(J) = \{b^{(j)}\}_{j=1}^J = \{b_{\min}, \{b^{(j)}\}_{j=2}^{J-1}, b_{\max}\} \subset [b_{\min}; b_{\max}] \quad (42)$$

by

$$b^{(1)} = b_{\min} \quad \text{and} \quad b^{(J)} = b_{\max}. \quad (43)$$

A pretty trivial case is the roughest sampling by $M = 2$ and $J = 2$, when

$$A(2) = \{a^{(1)}, a^{(2)}\} = \{a_{\min}, a_{\max}\} \quad (44)$$

and

$$B(2) = \{b^{(1)}, b^{(2)}\} = \{b_{\min}, b_{\max}\}, \quad (45)$$

so only the endpoints are considered without any consideration of internal points of the function-strategy value range. It is hardly possible that either of samplings (44) and (45) could be sufficient for an acceptable finite approximation, but they must be nonetheless considered for comparing them to denser samplings.

If either of integers M and J is increased by 1, a new sampling must not be of a lower density. In other words, a 1-incremented sampling must comply with the previous one. This is a requirement of the proper sampling increment.

Definition 1. Sampling

$$\Psi(S+1) = \{\lambda^{(s)}\}_{s=1}^{S+1} = \{\zeta_{\min}, \{\lambda^{(s)}\}_{s=2}^S, \zeta_{\max}\} \subset [\zeta_{\min}; \zeta_{\max}] \quad (46)$$

by $\zeta_{\min} < \zeta_{\max}$ and $S \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ is a proper sampling increment of sampling

$$\Psi(S) = \{\zeta^{(s)}\}_{s=1}^S = \{\zeta_{\min}, \{\zeta^{(s)}\}_{s=2}^{S-1}, \zeta_{\max}\} \subset [\zeta_{\min}; \zeta_{\max}] \quad (47)$$

if

$$\max_{s=1, S} (\lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}) < \max_{s=1, S-1} (\zeta^{(s+1)} - \zeta^{(s)}), \quad (48)$$

i. e. the $S + 1$ points in 1-incremented sampling (46) are selected denser than S points in sampling (47).

It is worth noting that the proper sampling increment does not imply the sampling density in

a subrange is always increased in a 1-incremented sampling. While inequality (48) holds over the entire range between ζ_{\min} and ζ_{\max} , it may not hold between a pair of neighbouring points (see **Fig. 1**).

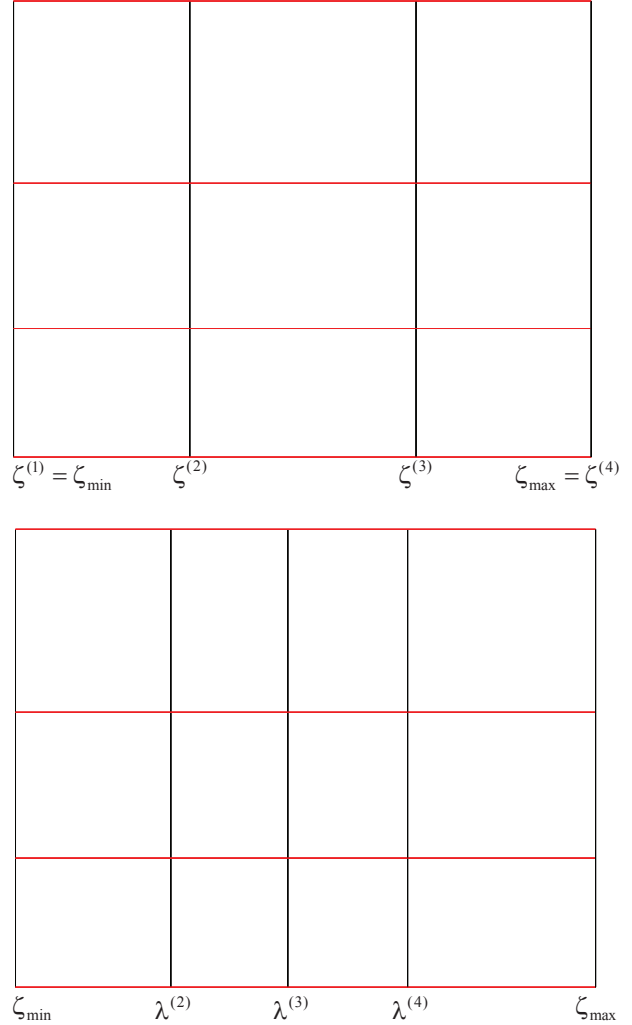


Fig. 1. A 4-point sampling (top) versus a 1-incremented sampling (bottom): although inequality (48) holds here (any subinterval length on the bottom plot is less than $\zeta^{(3)} - \zeta^{(2)}$), the right endpoint subinterval on the bottom plot has become a little bit wider ($\zeta_{\max} - \lambda^{(4)} > \zeta_{\max} - \zeta^{(3)}$)

With the sampling by (40)–(43), the succession of N continuous games (27) by (28)–(33) becomes a succession of N bimatrix $M \times J$ games

$$\left\langle \left\{ \{a^{(m)}\}_{m=1}^M, \{b^{(j)}\}_{j=1}^J \right\}, \{K_i(M, J), H_i(M, J)\} \right\rangle \quad (49)$$

with first player’s payoff matrices

$$K_i(M, J) = [k_{imj}(M, J)]_{M \times J} \quad (50)$$

whose elements are

$$k_{imj}(M, J) = \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \quad \text{for } i = \overline{1, N-1} \quad (51)$$

and

$$k_{Nmj}(M, J) = \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t), \quad (52)$$

and with second player's payoff matrices

$$H_i(M, J) = [h_{imj}(M, J)]_{M \times J} \quad (53)$$

whose elements are

$$h_{imj}(M, J) = \int_{[\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \quad \text{for } i = \overline{1, N-1} \quad (54)$$

and

$$h_{Nmj}(M, J) = \int_{[\tau^{(N-1)}, \tau^{(N)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t). \quad (55)$$

So, if integers M and J for game (12) by (28) are somehow selected, the staircase game is represented as a succession of N bimatrix $M \times J$ games (49). The representation implies that staircase game (12) and the succession of ordinary (classical) continuous 2-person games (27) are equivalent.

Definition 2. The succession of N continuous 2-person games (27) by (28)–(33) sampled by (40) and (42) is called a sampled 2-person game.

With the sampling by (40)–(43), the staircase game becomes defined on product $A(M) \times B(J)$, which becomes a product of staircase-function finite spaces by running through all $i = \overline{1, N}$. Thus, staircase game (12) becomes a finite staircase game. It might be rendered to a bimatrix game in order to obtain a staircase solution (herein, adjective “staircase” gives a hint to the type of the game, rather than to the structure of its solution). However, there is a much easier way to solve a finite staircase game.

Theorem 2. If game (12) on product (13) by conditions (1)–(11) is made a staircase game as a succession of N continuous 2-person games (27) by (28)–(33), whereupon it is sampled by (40) and (42), then the respective finite staircase game is always solved as a stack of successive equilibria of N bimatrix games (49) by (50)–(55).

Proof. An equilibrium situation in the bimatrix game always exists, either in pure or mixed strategies. Denote by

$$P_i(M, J) = [p_i^{(m)}(M, J)]_{1 \times M}$$

and

$$Q_i(M, J) = [q_i^{(j)}(M, J)]_{1 \times J}$$

the mixed strategies of the first and second players, respectively, in bimatrix game (49). The respective sets of mixed strategies of the first and second players are

$$P = \left\{ P_i(M, J) \in \mathbb{R}^M : p_i^{(m)}(M, J) \geq 0, \sum_{m=1}^M p_i^{(m)}(M, J) = 1 \right\} \quad (56)$$

and

$$Q = \left\{ Q_i(M, J) \in \mathbb{R}^J : q_i^{(j)}(M, J) \geq 0, \sum_{j=1}^J q_i^{(j)}(M, J) = 1 \right\}, \quad (57)$$

so

$$P_i(M, J) \in P, \quad Q_i(M, J) \in Q,$$

and

$$\{P_i(M, J), Q_i(M, J)\} \quad (58)$$

is a situation in this game, i. e. (58) is a situation on subinterval i . Let

$$\left\{ \left\{ P_i^*(M, J), Q_i^*(M, J) \right\}_{i=1}^N \right\} = \left\{ \left\{ [p_i^{(m)*}(M, J)]_{1 \times M}, [q_i^{(j)*}(M, J)]_{1 \times J} \right\}_{i=1}^N \right\} \quad (59)$$

be a set of equilibria of N games (49) by (50)–(55). The stack of equilibria

$$\{P_i^*(M, J)\}_{i=1}^N = \left\{ [p_i^{(m)*}(M, J)]_{1 \times M} \right\}_{i=1}^N \quad (60)$$

is a stacked strategy of the first player in the staircase game (12). The stack of equilibria

$$\{Q_i^*(M, J)\}_{i=1}^N = \left\{ [q_i^{(j)*}(M, J)]_{1 \times J} \right\}_{i=1}^N \quad (61)$$

is a stacked strategy of the second player in the staircase game (12). Then for equilibria (59), inequalities

$$P_i(M, J) \cdot K_i(M, J) \cdot [Q_i^*(M, J)]^T = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{imj}(M, J) p_i^{(m)}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &\leq \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &= \mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{K}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i^*(M, J)]^T = v_i^*(M, J) \\
 &\quad \forall \mathbf{P}_i(M, J) \in \mathbf{P} \text{ for } i = \overline{1, N-1}, \quad (62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}_N(M, J) \cdot \mathbf{K}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &\leq \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &= \mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{K}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 &= v_N^*(M, J) \quad \forall \mathbf{P}_N(M, J) \in \mathbf{P} \quad (63)
 \end{aligned}$$

and inequalities

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i(M, J)]^T = \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)}(M, J) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &= \mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i^*(M, J)]^T = z_i^*(M, J) \\
 &\quad \forall \mathbf{Q}_i(M, J) \in \mathbf{Q} \text{ for } i = \overline{1, N-1}, \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N(M, J)]^T \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)}(M, J) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &\leq \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &= \mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 &= z_N^*(M, J) \quad \forall \mathbf{Q}_N(M, J) \in \mathbf{Q} \quad (65)
 \end{aligned}$$

hold. So, inequalities

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}_i(M, J) \cdot \mathbf{K}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i^*(M, J)]^T + \\
 &\quad + \mathbf{P}_N(M, J) \cdot \mathbf{K}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{imj}(M, J) p_i^{(m)}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 & \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & \quad \left. + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} f(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 & \quad + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J k_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{K}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i^*(M, J)]^T \\
 & \quad + \mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{K}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 & = \sum_{i=1}^N v_i^*(M, J) = v^*(M, J) \tag{66}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i(M, J)]^T \\
 & \quad + \mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N(M, J)]^T \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)}(M, J) \\
 & \quad + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)}(M, J) \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & \quad \left. + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(i-1)}; \tau^{(i)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & \quad \left. + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \right. \\
 & \quad \times \int_{[\tau^{(N-1)}; \tau^{(N)}]} g(a^{(m)}, b^{(j)}, t) d\mu(t) \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{imj}(M, J) p_i^{(m)*}(M, J) q_i^{(j)*}(M, J) \\
 & \quad + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J h_{Nmj}(M, J) p_N^{(m)*}(M, J) q_N^{(j)*}(M, J) \\
 & = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}_i^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_i(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_i^*(M, J)]^T \\
 & \quad + \mathbf{P}_N^*(M, J) \cdot \mathbf{H}_N(M, J) \cdot [\mathbf{Q}_N^*(M, J)]^T \\
 & = \sum_{i=1}^N z_i^*(M, J) = z^*(M, J) \tag{67}
 \end{aligned}$$

hold as well. Therefore, inequalities (66) and (67) along with using **Theorem 1** allow concluding that the stack of successive equilibria (59) is an equilibrium in game (12) by (27) sampled by (40), (42). \square

It is quite clear that the solutions of the $M \times J$ bimatrix games are independent. So these $M \times J$ bimatrix games can be solved in parallel, without caring of the succession. The succession does matter when the solutions are stacked (stitched) together to form the staircase solution (the solution to the finite staircase game). Once N equilibria in the (“smaller” or “short”) bimatrix games are found, they are successively stacked and the stack, according to **Theorem 2**, is an equilibrium in the staircase game (12) sampled by (40), (42).

A corollary of **Theorem 2** is that any combination of the respective equilibria of the “short” bimatrix games is an equilibrium of the sampled 2-person game. Multiplicity of equilibria on a subinterval tied to multiplicity of equilibria on other subintervals leads to a sudden growth of the stacked equilibria (the stack of the N successive equilibria). Besides, there often happen bimatrix games with a continuum of equilibria (e. g., the continuum is constituted by a linear combination of two equilibrium points). This problem makes a fundamental difference between approximating a zero-sum staircase game and a 2-person staircase game (which is not a zero-sum one).

If all N bimatrix games are solved in pure strategies, then stacking the equilibria is fulfilled trivially. When there is at least an equilibrium in mixed strategies for a subinterval, the stacking is fulfilled as well implying that the resulting pure-mixed-strategy equilibrium of staircase game (12) is realized successively, subinterval by subinterval, spending the same amount of time to implement both pure strategy and mixed strategy equilibria (e. g., see [2, 7, 9, 12, 14]). Nevertheless, stacking up pure-strategy equilibria and mixed-strategy equilibria of $M \times J$ bimatrix games (49) can be cumbersome. The best case is when every “short” game has a single pure-strategy equilibrium.

Consistency of approximate equilibrium

In the case of the non-cooperative 2-person game, the conditions of the appropriate finite approximation are stated by using the known method of approximating isomorphic infinite 2-person non-cooperative games via variously sampling the players’ payoff functions and reshaping payoff matrices into bimatrix game [20]. The method uses uniform sampling, but it is easy to generalize it. There are five items of the conditions. The requirement of the smooth sampling of the payoff kernel is inapplicable here [24].

First of all, there is an easy-to-find condition of the finite approximation appropriateness. It is about the equilibrium payoff change, which must not change more by the proper sampling increment. Inasmuch as an increment is possible from the side of both the players, then this condition is a set of $6N$ inequalities:

$$\begin{aligned} & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M + 1, J)| \\ \leq & |v_i^*(M - 1, J) - v_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M + 1, J)| \\ \leq & |z_i^*(M - 1, J) - z_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M, J + 1)| \\ \leq & |v_i^*(M, J - 1) - v_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M, J + 1)| \\ \leq & |z_i^*(M, J - 1) - z_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M + 1, J + 1)| \\ \leq & |v_i^*(M - 1, J - 1) - v_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M + 1, J + 1)| \\ \leq & |z_i^*(M - 1, J - 1) - z_i^*(M, J)| \quad \text{for } i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (73)$$

Conditions (68)–(73) mean that, as the sampling density minimally increases, either from the side of the first or second player (or both), an equilibrium payoff change for both the first and second players in an appropriate approximation should not grow.

Definition 3. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (68)–(73) hold. Stack (60) is called first-player-payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (68), (70), (72) hold. Stack (61) is called second-player-payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (69), (71), (73) hold.

The second condition is the change of the equilibrium strategy support cardinality. Denote the supports of the equilibrium strategies of the players by

$$\text{supp } \mathbf{P}_i^*(M, J) = \{m_u\}_{u=1}^{U_i(M, J)} \subset \{m\}_{m=1}^M \quad (74)$$

by the respective support probabilities

$$\{p_i^{(m_u)^*}(M, J)\}_{u=1}^{U_i(M, J)} \quad (75)$$

and

$$\text{supp } \mathbf{Q}_i^*(M, J) = \{j_w\}_{w=1}^{W_i(M, J)} \subset \{j\}_{j=1}^J \quad (76)$$

by the respective support probabilities

$$\{q_i^{(j_w)^*}(M, J)\}_{w=1}^{W_i(M, J)}. \quad (77)$$

Then $6N$ inequalities

$$U_i(M + 1, J) \geq U_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (78)$$

$$U_i(M, J + 1) \geq U_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (79)$$

$$U_i(M + 1, J + 1) \geq U_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (80)$$

$$W_i(M + 1, J) \geq W_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (81)$$

$$W_i(M, J + 1) \geq W_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (82)$$

$$W_i(M + 1, J + 1) \geq W_i(M, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N} \quad (83)$$

require that, by minimally increasing the sampling density, either from the side of the first or second

player (or both), the cardinalities of the supports not decrease.

Definition 4. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called weakly support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (78)–(83) hold. Support (74) is called weakly first-player-support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (78)–(80) hold. Support (76) is called weakly second-player-support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (81)–(83) hold.

Obviously, requirements (78)–(83) can be supplemented (strengthened) by considering a minimal decrement of the sampling density. Then another $6N$ inequalities

$$U_i(M, J) \geq U_i(M-1, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (84)$$

$$U_i(M, J) \geq U_i(M, J-1) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (85)$$

$$U_i(M, J) \geq U_i(M-1, J-1) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (86)$$

$$W_i(M, J) \geq W_i(M-1, J) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (87)$$

$$W_i(M, J) \geq W_i(M, J-1) \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \quad (88)$$

$$W_i(M, J) \geq W_i(M-1, J-1) \quad \text{for } i = \overline{1, N} \quad (89)$$

are required.

Definition 5. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (78)–(89) hold. Support (74) is called first-player-support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (78)–(80) and (84)–(86) hold. Support (76) is called second-player-support-cardinality- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (81)–(83) and (87)–(89) hold.

As the sampling density minimally increases, the maximal gap between the support indices should not increase. Let $m_u(M, J)$ and $j_w(M, J)$ be the respective support indices corresponding to integers $\{M, J\}$ on a subinterval by (28). Then $6N$ inequalities

$$\begin{aligned} & \max_{u=1, U_i(M+1, J)-1} [m_{u+1}(M+1, J) - m_u(M+1, J)] \\ & \leq \max_{u=1, U_i(M, J)-1} [m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\max_{u=1, U_i(M, J+1)-1} [m_{u+1}(M, J+1) - m_u(M, J+1)]$$

$$\begin{aligned} & \leq \max_{u=1, U_i(M, J)-1} [m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} & \max_{u=1, U_i(M+1, J+1)-1} [m_{u+1}(M+1, J+1) - m_u(M+1, J+1)] \\ & \leq \max_{u=1, U_i(M, J)-1} [m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} & \max_{w=1, W_i(M+1, J)-1} [j_{w+1}(M+1, J) - j_w(M+1, J)] \\ & \leq \max_{w=1, W_i(M, J)-1} [j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} & \max_{w=1, W_i(M, J+1)-1} [j_{w+1}(M, J+1) - j_w(M, J+1)] \\ & \leq \max_{w=1, W_i(M, J)-1} [j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} & \max_{w=1, W_i(M+1, J+1)-1} [j_{w+1}(M+1, J+1) - j_w(M+1, J+1)] \\ & \leq \max_{w=1, W_i(M, J)-1} [j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (95)$$

are required.

Definition 6. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called weakly sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (90)–(95) hold. Support (74) is called weakly first-player-sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (90)–(92) hold. Support (76) is called weakly second-player-sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (93)–(95) hold.

Similarly to strengthening the weak (by **Definition 4**) support cardinality to that by **Definition 5**, requirements (90)–(95) can be strengthened by considering a minimal decrement of the sampling density. Then another $6N$ inequalities

$$\begin{aligned} & \max_{u=1, U_i(M, J)-1} [m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)] \\ & \leq \max_{u=1, U_i(M-1, J)-1} [m_{u+1}(M-1, J) - m_u(M-1, J)] \\ & \quad \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{u=1, U_i(M, J)-1}}{[m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)]} \\ \leq & \frac{\max_{u=1, U_i(M, J)-1}}{[m_{u+1}(M, J-1) - m_u(M, J-1)]} \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{u=1, U_i(M, J)-1}}{[m_{u+1}(M, J) - m_u(M, J)]} \\ \leq & \frac{\max_{u=1, U_i(M-1, J-1)-1}}{[m_{u+1}(M-1, J-1) - m_u(M-1, J-1)]} \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{w=1, W_i(M, J)-1}}{[j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)]} \\ \leq & \frac{\max_{w=1, W_i(M-1, J)-1}}{[j_{w+1}(M-1, J) - j_w(M-1, J)]} \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{w=1, W_i(M, J)-1}}{[j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)]} \\ \leq & \frac{\max_{w=1, W_i(M, J-1)-1}}{[j_{w+1}(M, J-1) - j_w(M, J-1)]} \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{w=1, W_i(M, J)-1}}{[j_{w+1}(M, J) - j_w(M, J)]} \\ \leq & \frac{\max_{w=1, W_i(M-1, J-1)-1}}{[j_{w+1}(M-1, J-1) - j_w(M-1, J-1)]} \\ & \text{for } i = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{101}$$

are required.

Definition 7. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (90)–(101) hold. Support (74) is called first-player-sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (90)–(92) and (96)–(98) hold. Support (76) is called second-player-sampling-density- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (93)–(95) and (99)–(101) hold.

Denote by $h_1(i; m, M, J)$ a polyline whose vertices are probabilities

$$\{p_i^{(m)*}(M, J)\}_{m=1}^M,$$

and denote by $h_2(i; j, M, J)$ a polyline whose vertices are probabilities

$$\{q_i^{(j)*}(M, J)\}_{j=1}^J.$$

Then, by minimally increasing the sampling density, the “neighbouring” polylines should not be farther from each other, i. e. inequalities

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M+1, J)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M-1, J) - h_1(i; m, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M, J+1)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M, J-1) - h_1(i; m, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M+1, J+1)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_1(i; m, M-1, J-1) - h_1(i; m, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{104}$$

and

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M+1, J)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M-1, J) - h_2(i; j, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M, J+1)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M, J-1) - h_2(i; j, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M+1, J+1)| \\ \leq & \max_{[0; 1]} |h_2(i; j, M-1, J-1) - h_2(i; j, M, J)| \\ & \text{for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{107}$$

along with

$$\begin{aligned} & \|h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M+1, J)\| \\ \leq & \|h_1(i; m, M-1, J) - h_1(i; m, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned} & \|h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M, J+1)\| \\ \leq & \|h_1(i; m, M, J-1) - h_1(i; m, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned} & \|h_1(i; m, M, J) - h_1(i; m, M + 1, J + 1)\| \\ & \leq \|h_1(i; m, M - 1, J - 1) - h_1(i; m, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (110)$$

and

$$\begin{aligned} & \|h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M + 1, J)\| \\ & \leq \|h_2(i; j, M - 1, J) - h_2(i; j, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} & \|h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M, J + 1)\| \\ & \leq \|h_2(i; j, M, J - 1) - h_2(i; j, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} & \|h_2(i; j, M, J) - h_2(i; j, M + 1, J + 1)\| \\ & \leq \|h_2(i; j, M - 1, J - 1) - h_2(i; j, M, J)\| \\ & \text{in } \mathbb{L}_2[0; 1] \text{ for } i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (113)$$

are required.

Definition 8. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called probability- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (102)–(113) hold. The set of probabilities (75) of support (74) is called first-player-probability- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (102)–(104) and (108)–(110) hold. The set of probabilities (77) of support (76) is called second-player-probability- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (105)–(107) and (111)–(113) hold.

In accordance with **Definitions 3–8**, a player's equilibrium strategy (or its support, or the support probabilities) may be consistent while an equilibrium strategy of the other player is not consistent. This is done intentionally because it is not worth cancelling the player's equilibrium strategy consistency when for the other player the consistency conditions do not hold.

If inequalities (68)–(73), (78)–(83), (90)–(95), (102)–(113) hold for some i , then bimatrix game (49), assigned to the subinterval between $\tau^{(i-1)}$ and $\tau^{(i)}$, has a weakly consistent approximate solution to the corresponding continuous game (27) by (28)–(33). On this basis, the weak consistency of an approximate solution to a staircase game (12) is formulated.

Definition 9. The stack of successive equilibria (59) is called a weakly $\{M, J\}$ -consistent approximate solution of staircase game (12) if inequalities (68)–(73), (78)–(83), (90)–(95), (102)–(113) hold.

Stack (60) is called weakly first-player- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (68), (70), (72), (78)–(80), (90)–(92), (102)–(104), (108)–(110) hold. Stack (61) is called weakly second-player- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (69), (71), (73), (81)–(83), (93)–(95), (105)–(107), (111)–(113) hold.

Similarly to strengthening **Definitions 4** and **6**, the weak consistency can be strengthened by adding the requirements with inequalities (84)–(89) and (96)–(101).

Definition 10. The stack of successive equilibria (59) is called an $\{M, J\}$ -consistent approximate solution of staircase game (12) if inequalities (68)–(73) and (78)–(113) hold. Stack (60) is called first-player- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (68), (70), (72), (78)–(80), (84)–(86), (90)–(92), (96)–(98), (102)–(104), (108)–(110) hold. Stack (61) is called second-player- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (69), (71), (73), (81)–(83), (87)–(89), (93)–(95), (99)–(101), (105)–(107), (111)–(113) hold.

As in the case of the zero-sum game [23], the approximate solution consistency theoretically proposes a better approximation than the weak consistency. The weak consistency notion by **Definition 9** may be thought of as it is decomposed by **Definitions 3, 4, 6, 8**. Thus, the consistency notion by **Definition 10** is decomposed into **Definitions 3, 5, 7, 8**.

Payoff consistency relaxation

Although there are six inequalities to be checked after solving seven bimatrix games on each subinterval, the payoff consistency is checked the easiest and fastest. Even if an approximate solution is not weakly consistent, it may be, e. g., payoff-consistent. A payoff-consistent solution can be sufficient to accept it as an appropriate approximate solution [1, 2, 14, 24]. However, if a one of $6N$ inequalities (68)–(73) is violated, even this type of consistency does not work. Meanwhile, the violation may be induced by a very small growth of the payoff change at a player (on a subinterval). Therefore, it is useful and practically reasonable to consider the payoff consistency adding a relaxation to inequalities (68)–(73).

Definition 11. An approximate equilibrium (59) in staircase game (12) is called ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities

$$\begin{aligned} & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M + 1, J)| - \varepsilon \\ & \leq |v_i^*(M - 1, J) - v_i^*(M, J)| \end{aligned}$$

$$\text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N}, \quad (114)$$

$$\begin{aligned}
 & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M + 1, J)| - \varepsilon \\
 & \leq |z_i^*(M - 1, J) - z_i^*(M, J)| \\
 & \text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N}, \tag{115}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M, J + 1)| - \varepsilon \\
 & \leq |v_i^*(M, J - 1) - v_i^*(M, J)| \\
 & \text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N}, \tag{116}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M, J + 1)| - \varepsilon \\
 & \leq |z_i^*(M, J - 1) - z_i^*(M, J)| \\
 & \text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N}, \tag{117}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |v_i^*(M, J) - v_i^*(M + 1, J + 1)| - \varepsilon \\
 & \leq |v_i^*(M - 1, J - 1) - v_i^*(M, J)| \\
 & \text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N}, \tag{118}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |z_i^*(M, J) - z_i^*(M + 1, J + 1)| - \varepsilon \\
 & \leq |z_i^*(M - 1, J - 1) - z_i^*(M, J)| \\
 & \text{by some } \varepsilon > 0 \text{ for } i = \overline{1, N} \tag{119}
 \end{aligned}$$

hold. Stack (60) is called first-player- ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (114), (116), (118) hold. Stack (61) is called second-player- ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent if inequalities (115), (117), (119) hold.

To ascertain whether the stack of successive equilibria (59) is weakly consistent or not, the seven bunches of N bimatrix games (49) should be solved, where the sampling density is defined by integers

$$\begin{aligned}
 & \{M - 1, J - 1\}, \{M - 1, J\}, \{M, J - 1\}, \{M, J\}, \\
 & \{M + 1, J\}, \{M, J + 1\}, \{M + 1, J + 1\}.
 \end{aligned}$$

It is worth noting once again that the players select their respective integers M and J independently and, moreover, the sampling by an integer S means that those $S - 2$ points within an open interval can be chosen in any way, not necessarily to be uniformly distributed through the interval. Only the requirement of the proper sampling increment (by **Definition 1**) is followed. Nevertheless, the consistency meant by some sampling density integers $\{M, J\}$ does not guarantee that both the players will select such sampling density. Moreover, it is hard to find

a continuous 2-person game, for which a consistent approximate equilibrium could be determined at appropriately small integers M and J . However, it is quite naturally to expect that, as they are increased (i. e., the sampling is made denser), the approximate equilibria (stacked equilibria) must converge to the respective equilibrium of staircase game (12). Here, it is quite important to use the phrase “respective equilibrium” because the initial staircase game (12) may have multiple staircase equilibria or a continuum of staircase equilibria (although adjective “staircase” gives a hint to the type of the game, rather than to the structure of its equilibria, a player’s strategy in a staircase equilibrium is equivalent to a staircase function if the strategy is a stack of subinterval pure strategies; even when the stack has mixed strategies on some subintervals, the eventual view of the stacked strategy is staircase-like). Therefore, the most appropriate (e. g., profitable for both players) staircase equilibrium should be selected. Besides, the approximate equilibria must become “more” consistent, which means that more inequalities of the bunch of inequalities (68)–(73) and (78)–(113) must hold.

An example of 2-person game approximation

To give an example of 2-person game approximation, consider a case in which $t \in [0.1\pi; 0.9\pi]$, the set of pure strategies of the first player is

$$\begin{aligned}
 X & = \{x(t), t \in [0.1\pi; 0.9\pi] : 4 \leq x(t) \leq 7\} \\
 & \subset \mathbb{L}_2 [0.1\pi; 0.9\pi] \tag{120}
 \end{aligned}$$

and the set of pure strategies of the second player is

$$\begin{aligned}
 Y & = \{y(t), t \in [0.1\pi; 0.9\pi] : 1.5 \leq y(t) \leq 7.5\} \\
 & \subset \mathbb{L}_2 [0.1\pi; 0.9\pi], \tag{121}
 \end{aligned}$$

where each of the players is allowed to change its pure strategy value at time points

$$\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^7 = \{0.1\pi + 0.1\pi i\}_{i=1}^7. \tag{122}$$

The players’ payoff functionals are

$$\begin{aligned}
 & K(x(t), y(t)) \\
 & = \int_{[0.1\pi; 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.5xt + \frac{\pi}{8} \right) \\
 & \times \sin^3 \left(0.2yt - \frac{7\pi}{13} \right) e^{-0.015xt} d\mu(t) \tag{123}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & H(x(t), y(t)) \\
 &= \int_{[0.1\pi; 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.25xt - \frac{\pi}{10} \right) \\
 & \times \sin^2 \left(1.05yt + \frac{4\pi}{5} \right) e^{0.021yt} d\mu(t). \quad (124)
 \end{aligned}$$

So, each of the players possesses 8-subinterval staircase function-strategies defined on interval $[0.1\pi; 0.9\pi]$. Hence, the 2-person staircase game is represented as a succession of 8 2-person games (27)

$$\left\langle \{[4; 7], [1.5; 7.5]\}, \{K(\alpha_i, \beta_i), H(\alpha_i, \beta_i)\} \right\rangle \quad (125)$$

by

$$\begin{aligned}
 & \alpha_i = x(t) \in [4; 7] \text{ and } \beta_i = y(t) \in [1.5; 7.5] \\
 & \forall t \in [0.1\pi i; 0.1\pi + 0.1\pi i] \text{ for } i = \overline{1, 7} \\
 & \text{and } \forall t \in [0.8\pi; 0.9\pi], \quad (126)
 \end{aligned}$$

where the factual payoff of the first player in situation (29) is

$$\begin{aligned}
 & K(\alpha_i, \beta_i) = \int_{[0.1\pi; 0.1\pi+0.1\pi i]} 2 \sin^2 \left(0.5\alpha_i t + \frac{\pi}{8} \right) \\
 & \times \sin^3 \left(0.2\beta_i t - \frac{7\pi}{13} \right) e^{-0.015\alpha_i t} d\mu(t) \quad \forall i = \overline{1, 7} \quad (127)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & K(\alpha_8, \beta_8) = \int_{[0.8\pi; 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.5\alpha_8 t + \frac{\pi}{8} \right) \\
 & \times \sin^3 \left(0.2\beta_8 t - \frac{7\pi}{13} \right) e^{-0.015\alpha_8 t} d\mu(t), \quad (128)
 \end{aligned}$$

and the factual payoff of the second player in situation (29) is

$$\begin{aligned}
 & H(\alpha_i, \beta_i) = \int_{[0.1\pi; 0.1\pi+0.1\pi i]} 2 \sin^2 \left(0.25\alpha_i t - \frac{\pi}{10} \right) \\
 & \times \sin^2 \left(1.05\beta_i t + \frac{4\pi}{5} \right) e^{0.021\beta_i t} d\mu(t) \quad \forall i = \overline{1, 7} \quad (129)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & H(\alpha_8, \beta_8) = \int_{[0.8\pi; 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.25\alpha_8 t - \frac{\pi}{10} \right) \\
 & \sin^2 \left(1.05\beta_8 t + \frac{4\pi}{5} \right) e^{0.021\beta_8 t} d\mu(t). \quad (130)
 \end{aligned}$$

The first player's payoff functional (123) on each subinterval of set

$$\left\{ \{[0.1\pi i; 0.1\pi + 0.1\pi i]\}_{i=1}^7, [0.8\pi; 0.9\pi] \right\} \quad (131)$$

is shown in **Fig. 2**. Compared to the second player's payoff functional (124) on each subinterval of set (131) shown in **Fig. 3**, the first player's payoff is a slow-changing functional. On the first subinterval $[0.1\pi; 0.2\pi]$ it is roughly a plane. Then, as time goes by, the first player's payoff starts slowly varying. The second player's payoff on the first subinterval is also a slow-varying function. As time goes by, it starts fluctuating – the closer the end is, the more waves it has.

The irregularity (non-uniformity) in the sampling is modelled as follows:

$$\begin{aligned}
 & a_0^{(m)} = 4 + \frac{3m-3}{M-1} \text{ and } a^{(m)} = a_0^{(m)} + \frac{\xi_1}{M} \\
 & \text{for } m = \overline{2, M-1} \quad (132)
 \end{aligned}$$

by $a^{(1)} = 4$, $a^{(M)} = 7$, and

$$\begin{aligned}
 & b_0^{(j)} = 1.5 + \frac{6j-6}{J-1} \text{ and } b^{(j)} = b_0^{(j)} + \frac{\xi_2}{J} \\
 & \text{for } j = \overline{2, J-1} \quad (133)
 \end{aligned}$$

by $b^{(1)} = 1.5$, $b^{(J)} = 7.5$, where ξ_1 and ξ_2 are values of two independent random variables distributed normally with zero mean and unit variance. The values resulting from (132) and (133) are sorted in ascending order, whereupon they are checked whether (40) and (42) are true. When either integer M or J is increased by 1, samplings (40) and (42) are checked whether they satisfy the proper sampling increment by **Definition 1**, i. e. whether inequality (48) holds for samplings (47) and (46).

Thus, 8 bimatrix games (49) with the players' payoff matrices (50) and (53) are formed from 8 2-person games (125), where

$$\begin{aligned}
 & k_{mj}(M, J) = \int_{[0.1\pi; 0.1\pi+0.1\pi i]} 2 \sin^2 \left(0.5a^{(m)} t + \frac{\pi}{8} \right) \\
 & \times \sin^3 \left(0.2b^{(j)} t - \frac{7\pi}{13} \right) e^{-0.015a^{(m)} t} d\mu(t) \\
 & \text{for } i = \overline{1, 7}, \quad (134)
 \end{aligned}$$

$$k_{8mj}(M, J) = \int_{[0.8\pi, 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.5a^{(m)}t + \frac{\pi}{8} \right) \times \sin^3 \left(0.2b^{(j)}t - \frac{7\pi}{13} \right) e^{-0.015a^{(m)}t} d\mu(t) \quad (135)$$

and

$$h_{mj}(M, J) = \int_{[0.1\pi; 0.1\pi+0.1\pi i]} 2 \sin^2 \left(0.25a^{(m)}t - \frac{\pi}{10} \right) \times \sin^2 \left(1.05b^{(j)}t + \frac{4\pi}{5} \right) e^{0.021b^{(j)}t} d\mu(t) \quad (136)$$

for $i = \overline{1, 7}$,

$$h_{8mj}(M, J) = \int_{[0.8\pi; 0.9\pi]} 2 \sin^2 \left(0.25a^{(m)}t - \frac{\pi}{10} \right) \times \sin^2 \left(1.05b^{(j)}t + \frac{4\pi}{5} \right) e^{0.021b^{(j)}t} d\mu(t). \quad (137)$$

Although the subinterval length in (134)–(137) does not change, every subinterval has its “own” bimatrix game due to time variable t is explicitly included into the functions under the integral. This means that, as time goes by, the players develop their actions subinterval by subinterval.

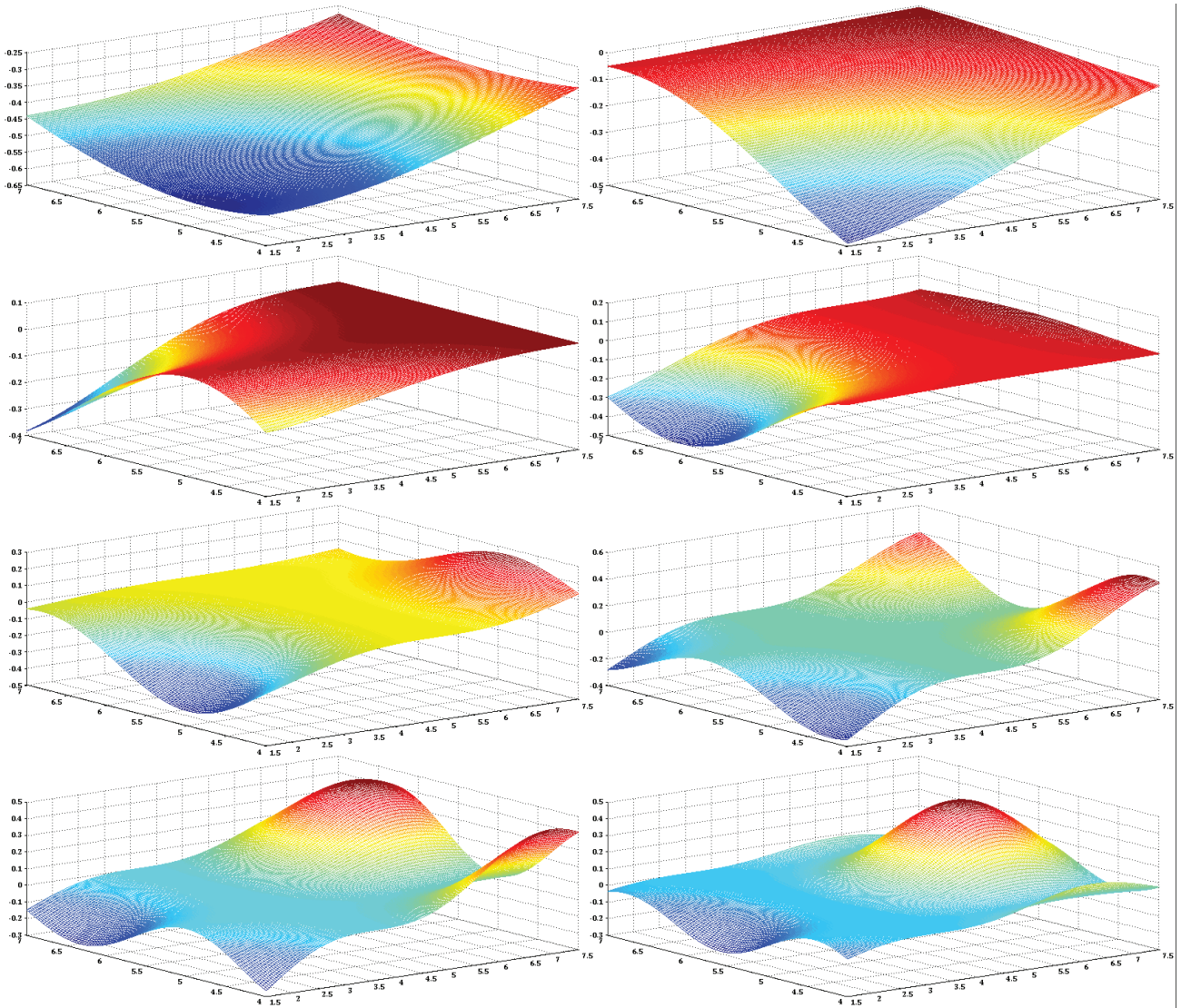


Fig. 2. The first player’s payoff kernels (127), (128) on the 8 subintervals of set (131)

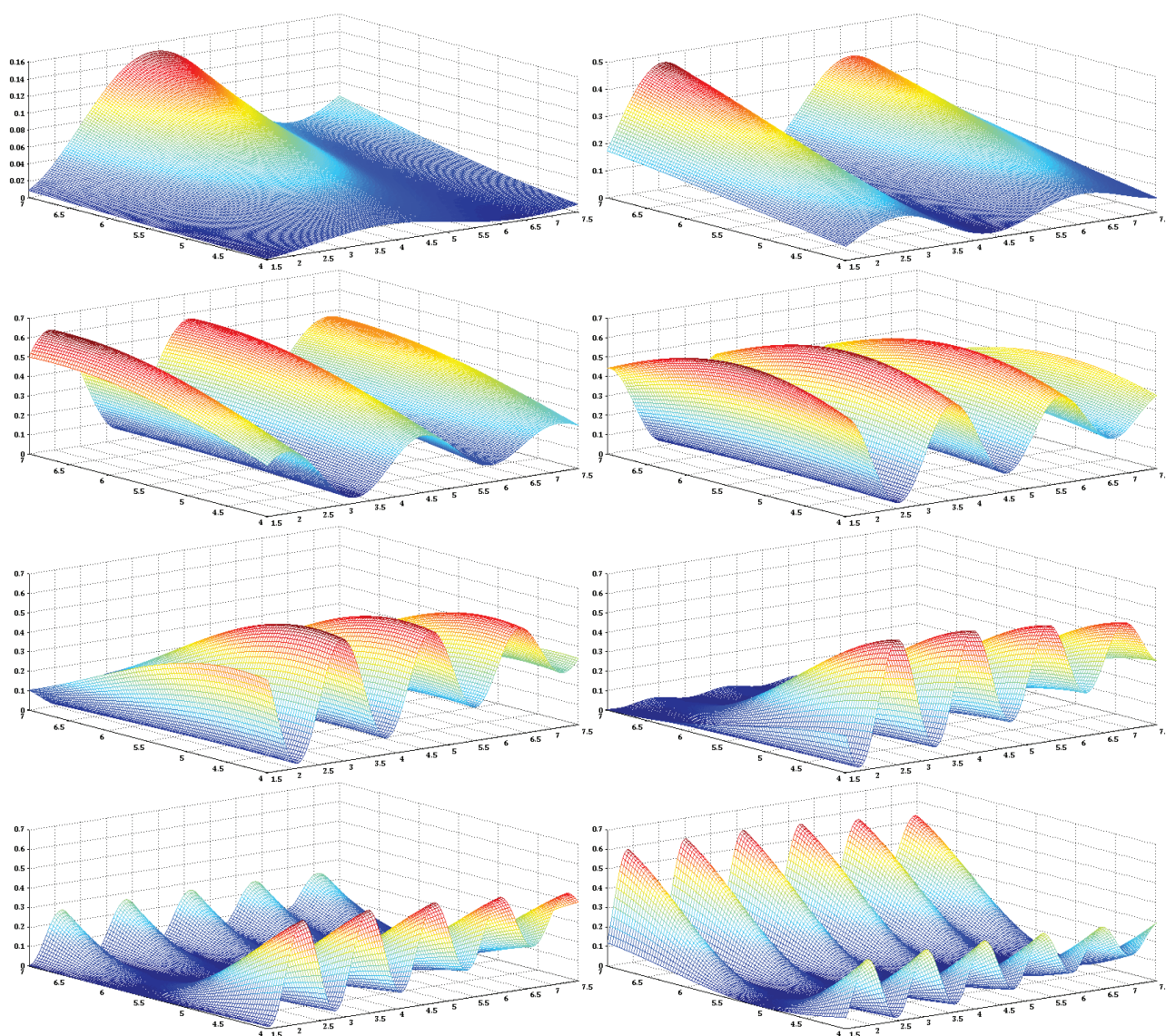


Fig. 3. The second player's payoff kernels (129), (130) on the 8 subintervals of set (131)

One of the trickiest problems with bimatrix games consists in multiple equilibria. To select a single equilibrium on each subinterval, a selection criterion should be defined. Thus, let an equilibrium be selected, by which the sum of the players' payoffs is maximal. Only this equilibrium will be visualized and discussed below.

Surely, the equilibrium solutions of these games (and the equilibrium solution of the initial staircase game) badly depend on the sampling. Subinterval-wise equilibrium strategies of the players by the sampling for every $M = \overline{3, 10}$ and $J = \overline{3, 10}$ are shown in Fig. 4 in an indistinguishable bunch. In general, it is well seen that as the sampling density changes at such a relatively wide range of small

sampling integers M and J , the player's equilibrium strategy (in every subinterval game, let alone the stacked optimal strategy on interval $[0.1\pi; 0.9\pi]$) badly varies. The only exception is the first, second, and fourth subintervals, on which the equilibrium strategies are pure and they do not change. Thus, the first player's equilibrium strategy on subintervals

$$[0.1\pi; 0.2\pi), [0.2\pi; 0.3\pi)$$

is

$$x^*(t) = 7 \quad \forall t \in [0.1\pi; 0.3\pi)$$

and it is

$$x^*(t) = 4 \quad \forall t \in [0.4\pi; 0.5\pi). \quad (138)$$

The single stable subinterval equilibrium strategy of the second player is

$$y^*(t) = 1.5 \quad \forall t \in [0.4\pi; 0.5\pi]. \quad (139)$$

The first player's payoff $v_i^*(M, J)$ (at the end of the i -th subinterval) and the payoff cumulative sum

$$v^{(n)*}(M, J) = \sum_{i=1}^n v_i^*(M, J) \quad \text{by } n = \overline{1, 8} \quad (140)$$

are scattered worse than the second player's payoff $z_i^*(M, J)$ and the payoff cumulative sum

$$z^{(n)*}(M, J) = \sum_{i=1}^n z_i^*(M, J) \quad \text{by } n = \overline{1, 8} \quad (141)$$

(Fig. 5), where

$$v^*(M, J) = v^{(8)*}(M, J) \quad (142)$$

and

$$z^*(M, J) = z^{(8)*}(M, J) \quad (143)$$

are the players' equilibrium payoffs in this staircase game.

It is noteworthy that during the first four subintervals there is a single pure strategy equilibrium in the subinterval bimatrix game, whichever the sampling is (so the above-mentioned criterion of the payoff sum maximization is not applied here at all). This fact is seen in Fig. 5 also as the payoffs are less scattered by $t \in [0.1\pi; 0.5\pi]$. So, all the equilibria on half-interval $[0.1\pi; 0.5\pi]$ are in pure strategies, and only during the second half the pure-strategy "mixing" works. There appear multiple equilibria during that half, and the payoff sum maximization criterion is applied to select the best equilibrium point on the subinterval (at given M and J).

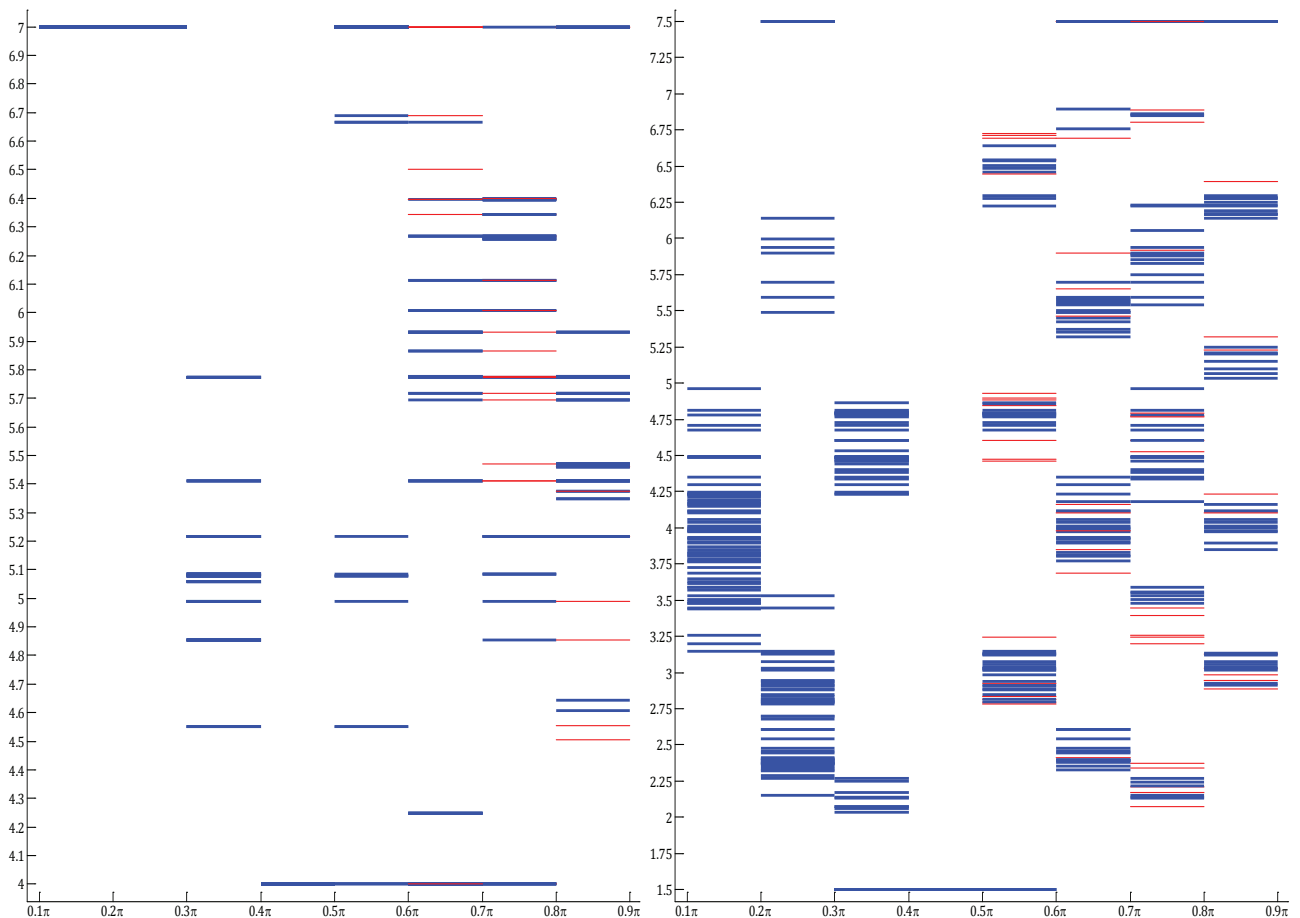


Fig. 4. An indistinguishable bunch of subinterval-wise optimal strategies of the first (left) and second (right) players by $M = \overline{3, 10}$ and $J = \overline{3, 10}$ (here and further below the equilibrium pure strategy is represented by thicker line, pure strategies from the mixed equilibrium strategy support are represented by thinner lines)

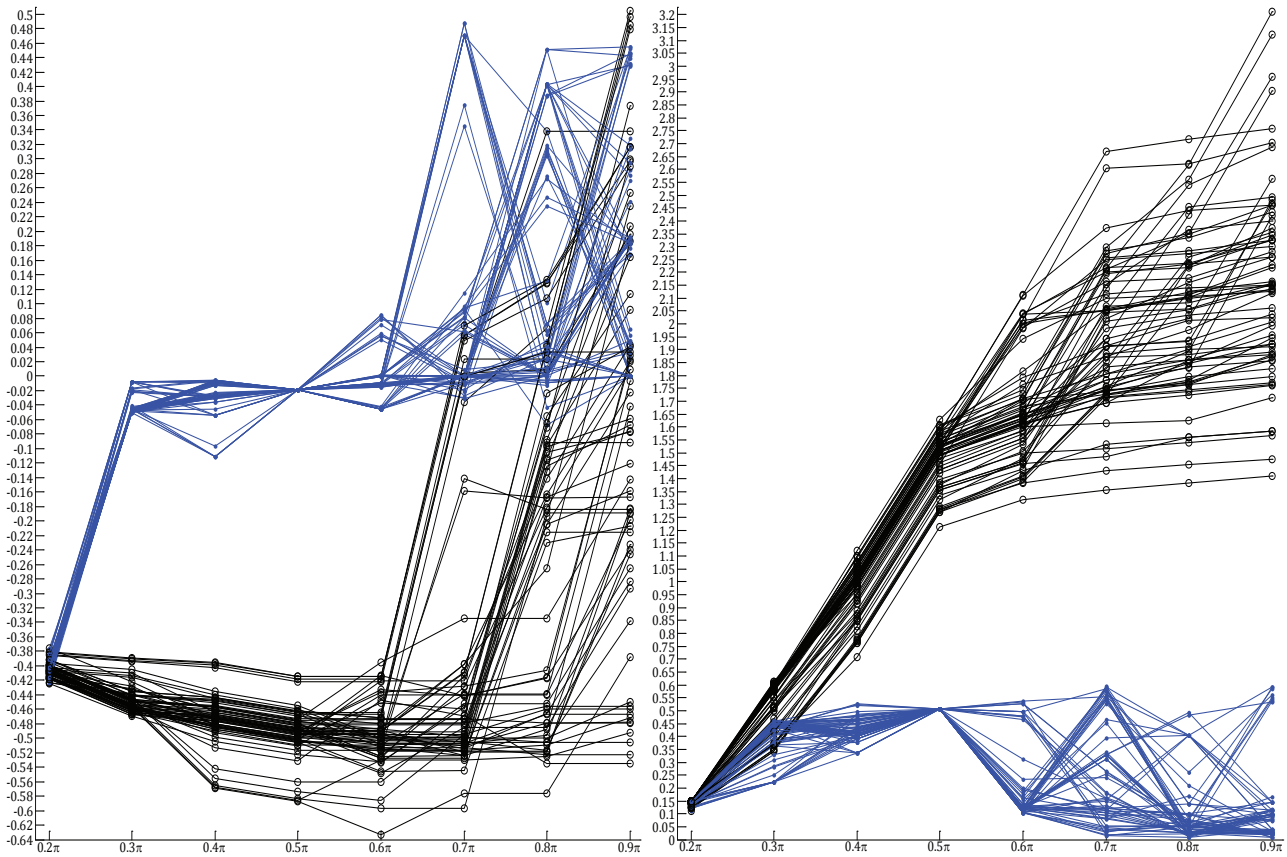


Fig. 5. An indistinguishable bunch of the first player’s payoffs (left) and second player’s payoffs (right) at the end of every subinterval (dots) and their cumulative sum (circles) by $M = 3, 10$ and $J = 3, 10$

As the sampling density is further increased up to solving 20×20 bimatrix games, subinterval equilibrium strategies (both pure and mixed) become more “condensed” (Fig. 6), as well as the subinterval payoffs and payoffs (140)–(143) do (Fig. 7). During the first four subintervals (the first half-interval from $t = 0.1\pi$ to $t = 0.5\pi$) there still is a single pure strategy equilibrium in the subinterval bimatrix game, whichever the sampling is. The first player’s equilibrium strategies on the first and fourth subintervals are immobile: they are still

$$x^*(t) = 7 \quad \forall t \in [0.1\pi; 0.2\pi) \quad (144)$$

and (138). The single stable subinterval equilibrium strategy of the second player is (139). So, there is the immobile pure strategy equilibrium point on the fourth subinterval consisting of (138) and (139). It is remarkable that the payoff cumulative sums at the end of the fourth subinterval are like to make a bundle (compare Fig. 7 to Fig. 5 at $t = 0.5\pi$).

Nevertheless, the first player’s equilibrium payoffs in this staircase game appear to be badly

scattered in a really wide range. It is likely that the growing multiplicity of equilibria influences (for instance, there are 187 equilibria on the last subinterval over all 64 versions of the sampling, whereas there are just 85 equilibria by $M = 3, 10$ and $J = 3, 10$). Although the range in Fig. 7 is narrower than that in Fig. 5 (see the vertical line of circles at $t = 0.9\pi$), the result is not satisfactory. This implies that the first player will definitely try to sample denser. The second player seems to do that too because the range of payoffs (143) is pretty wide also. So, as the sampling density is further increased up to solving 30×30 bimatrix games, the condensation of subinterval equilibrium strategies (Fig. 8) and payoffs (Fig. 9) progresses. The first player’s equilibrium strategies on the first and fourth subintervals are still (144) and (138), whereas the single stable subinterval equilibrium strategy of the second player is (139). To state it in advance, this stable part of the staircase game does not change at all by any sampling.

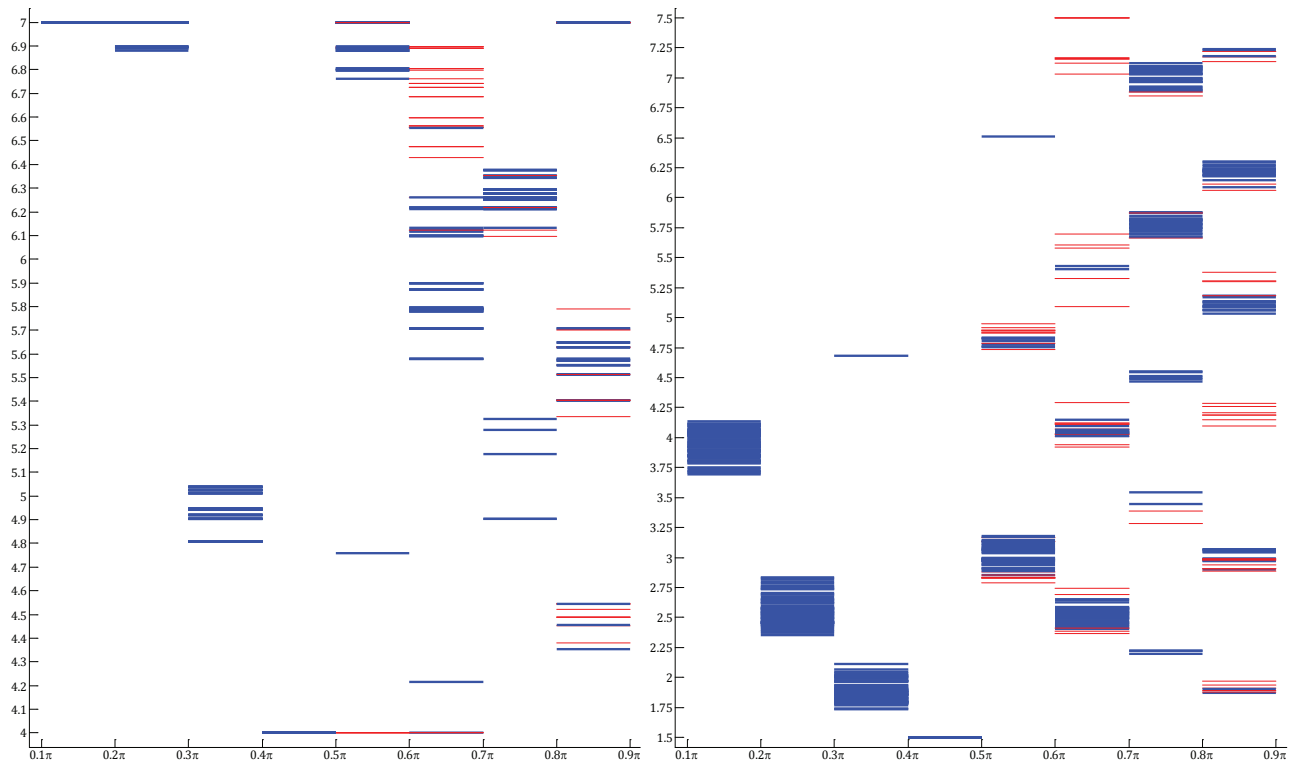


Fig. 6. A bunch of subinterval-wise optimal strategies of the first (left) and second (right) players by $M = \overline{13, 20}$ and $J = \overline{13, 20}$

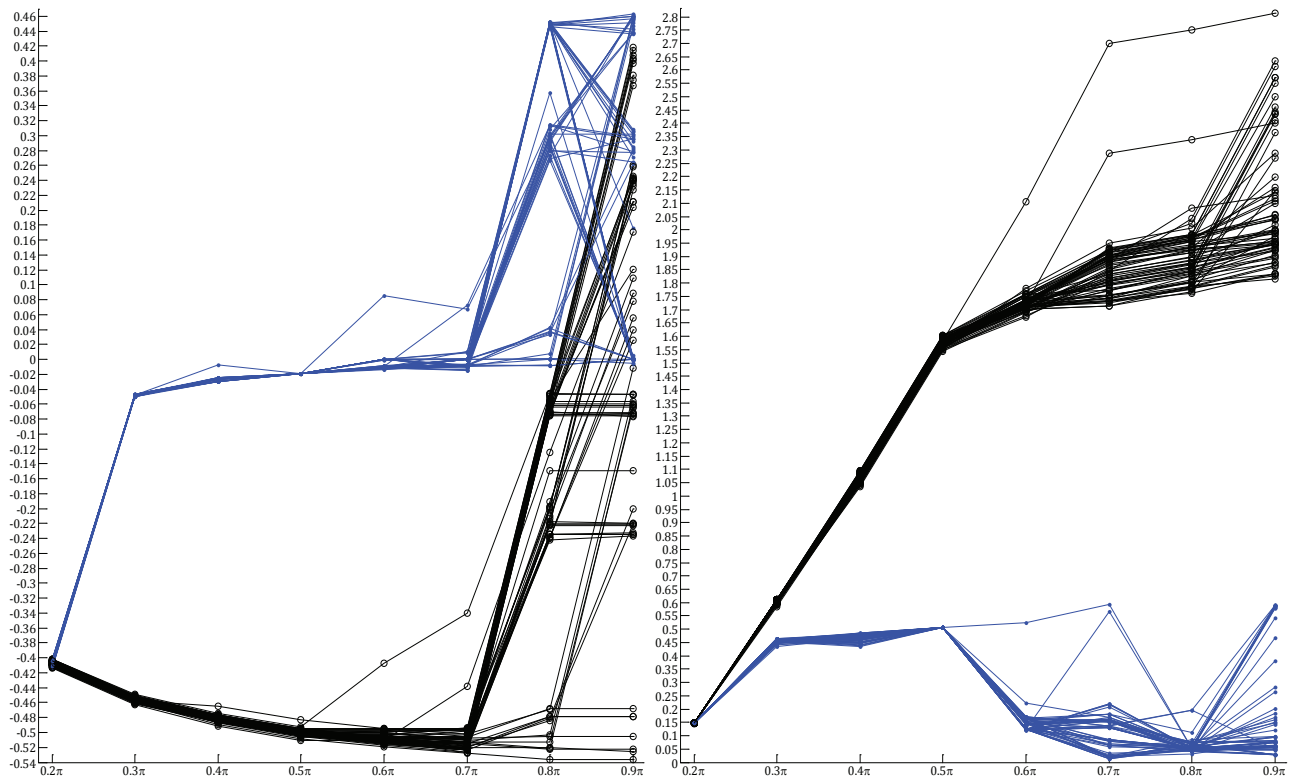


Fig. 7. A bunch of the first player's payoffs (left) and second player's payoffs (right) at the end of every subinterval (dots) and their cumulative sum (circles) by $M = \overline{13, 20}$ and $J = \overline{13, 20}$

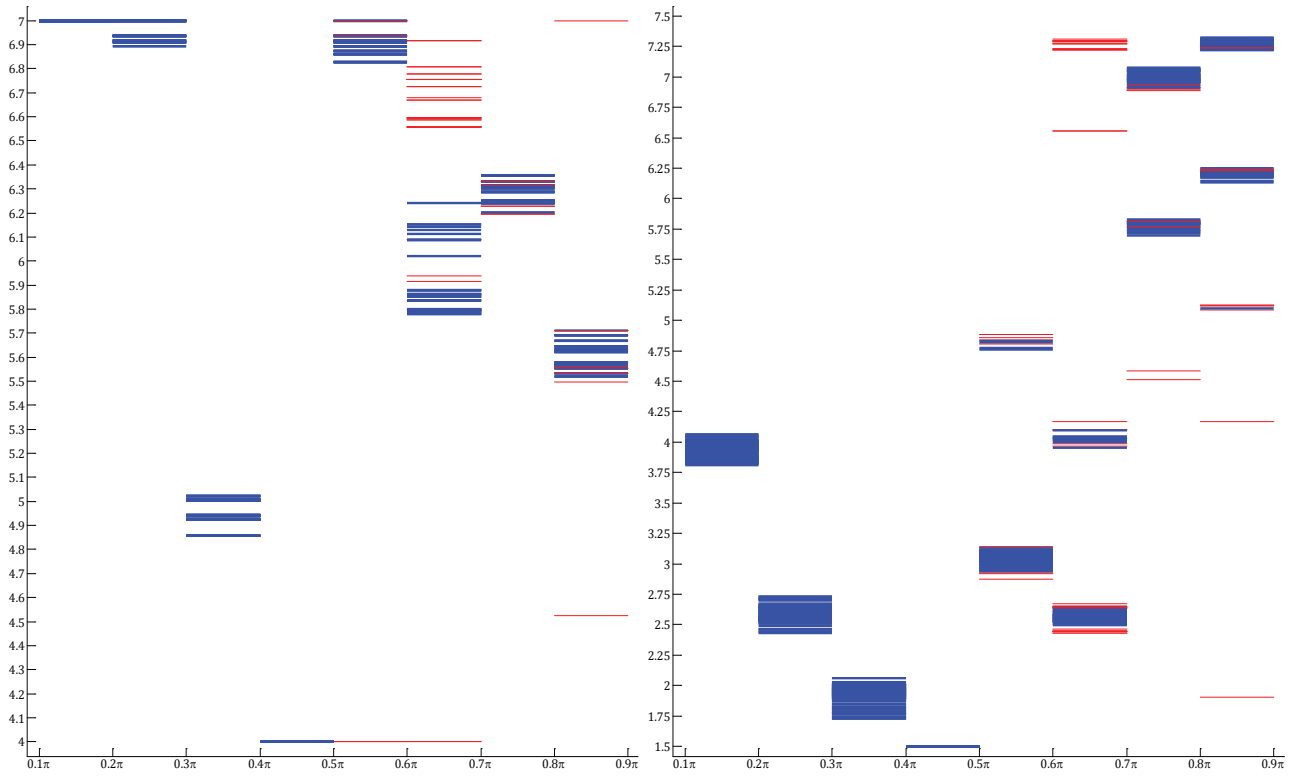


Fig. 8. A bunch of subinterval-wise optimal strategies of the first (left) and second (right) players by $M = \overline{23, 30}$ and $J = \overline{23, 30}$

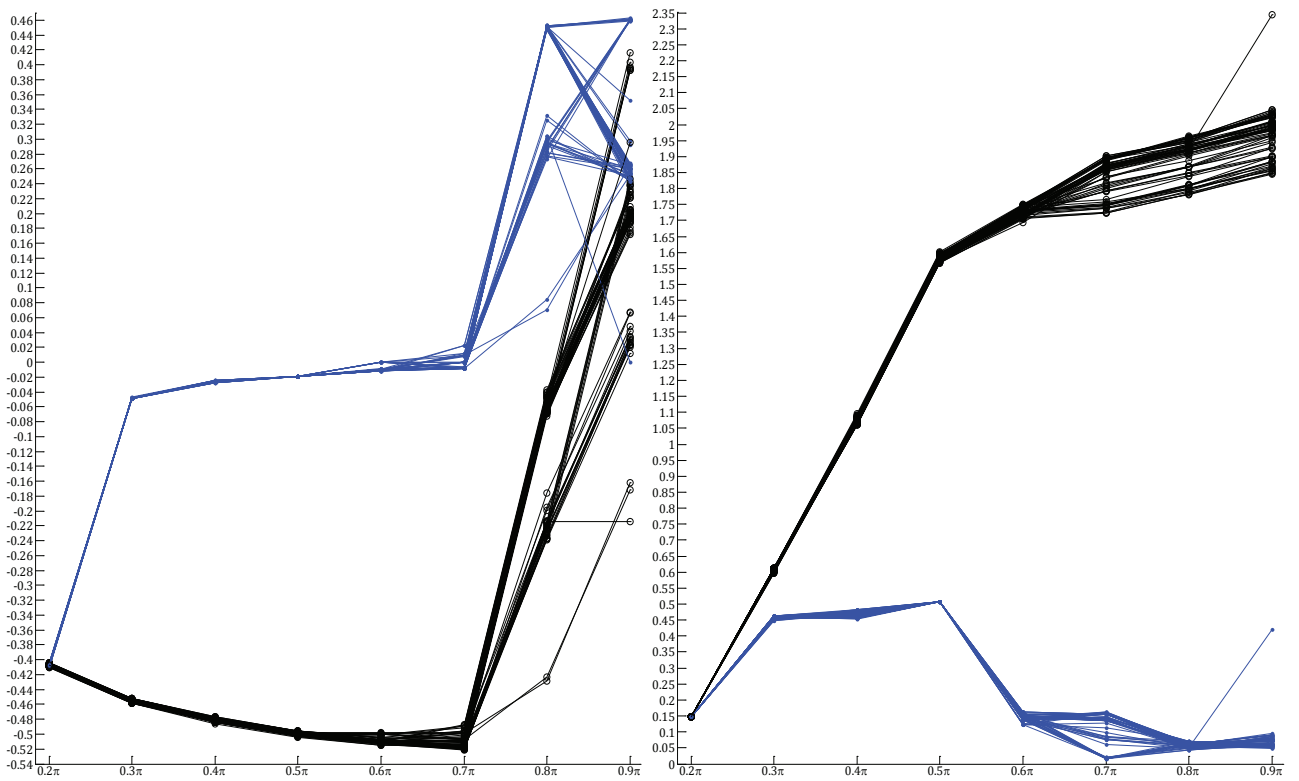


Fig. 9. A bunch of the first player's payoffs (left) and second player's payoffs (right) at the end of every subinterval (dots) and their cumulative sum (circles) by $M = \overline{23, 30}$ and $J = \overline{23, 30}$

Despite the growing multiplicity of equilibria (there are 192 equilibria on the last subinterval over all 64 versions of the sampling), now it is quite clear that the approximate equilibria (stacked equilibria) converge to the respective equilibrium of the staircase game by (120)–(124). This is easily seen by comparing Fig. 4, 6, 8. The convergence of payoffs is even clearer (Fig. 5, 7, 9). The second player’s result seems almost satisfactory unlike that of the first player. It is noteworthy that the bunch of the first player’s payoffs makes a tight bundle at the end of the sixth subinterval. This bundle is tighter than the bundle of the second player’s payoffs at $t = 0.7\pi$ (Fig. 9).

Unfortunately, the players’ equilibrium strategies (stacked equilibria) at these samplings are not even ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent by sufficiently great ε . It is some paradoxical that the first player receives ε -consistent payoffs earlier than the second player does. However, this happens at an inappropriately big payoff consistency relaxation. The “paradox” is easily explained with that the range of the first player’s payoff is far narrower with respect to that of the second player.

Will it be improved when the sampling is denser? Solving bigger games up to 40×40 bimatrix ones confirms the stacked equilibria convergence (Fig. 10). Compared to Fig. 8, no considerable

changes in Fig. 10 are visible. The same concerns the payoffs (Fig. 11), where the tight bundle of the first player’s payoffs is seen at $t = 0.7\pi$. The problem with the payoff consistency remains, though. The first player’s subinterval equilibrium strategies are ε -payoff-consistent on the first four subintervals by

$$\varepsilon = 0.0297 \cdot |v_i^*(M, J)| \quad \text{at } i = \overline{1, 4}$$

by every

$$M = \overline{34, 39} \quad \text{and} \quad J = \overline{34, 39}.$$

So, if the staircase game was defined on just interval $[0.1\pi; 0.5\pi]$, the first player’s stacked equilibrium strategies would be ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent.

Further increasing sampling density (thickening the samplings) does not make sense: stacked equilibria do not change (compare Fig. 12 to Fig. 10) and the payoffs remain with almost the same ranges (compare Fig. 13 to Fig. 11). If the staircase game was defined on just interval $[0.1\pi; 0.5\pi]$, the first player’s stacked equilibrium strategies would be ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent by

$$\varepsilon = 0.016 \cdot |v_i^*(M, J)| \quad \text{at } i = \overline{1, 4}$$

by every

$$M = \overline{44, 49} \quad \text{and} \quad J = \overline{44, 49}.$$

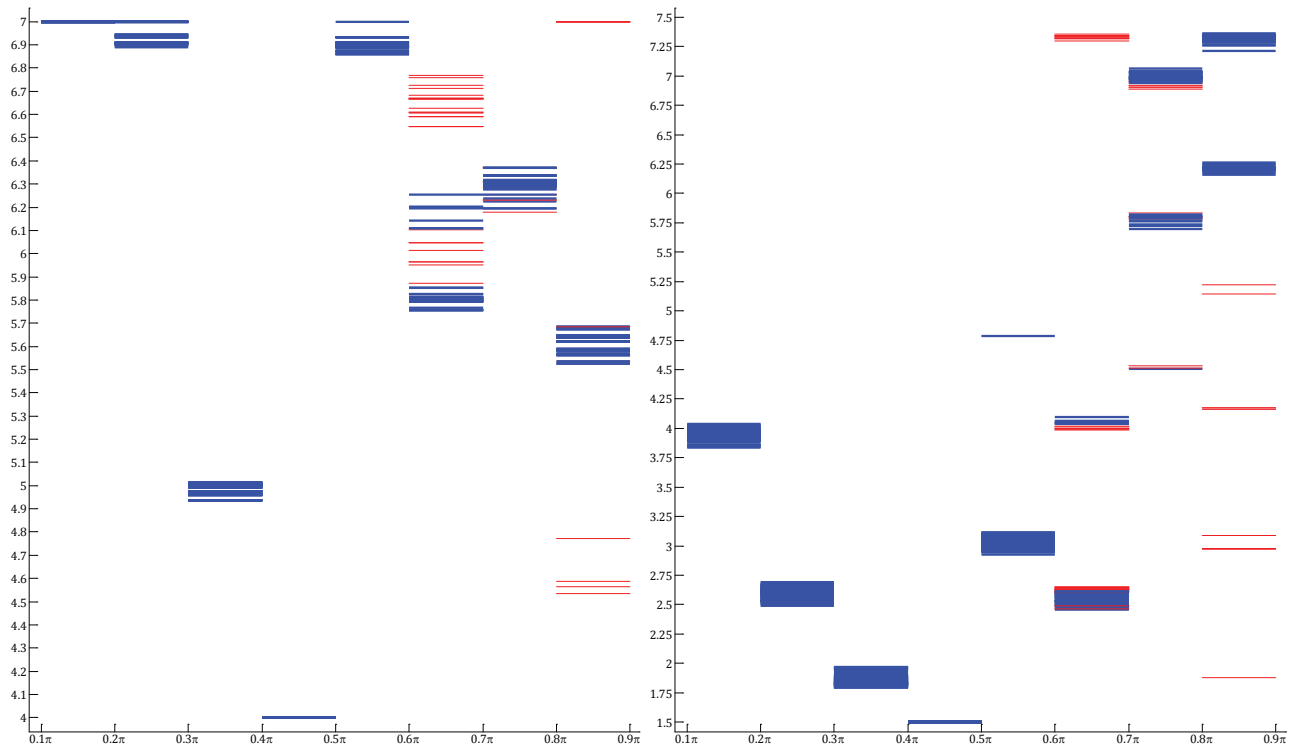


Fig. 10. A bunch of subinterval-wise optimal strategies of the first (left) and second (right) players by $M = \overline{33, 40}$ and $J = \overline{33, 40}$

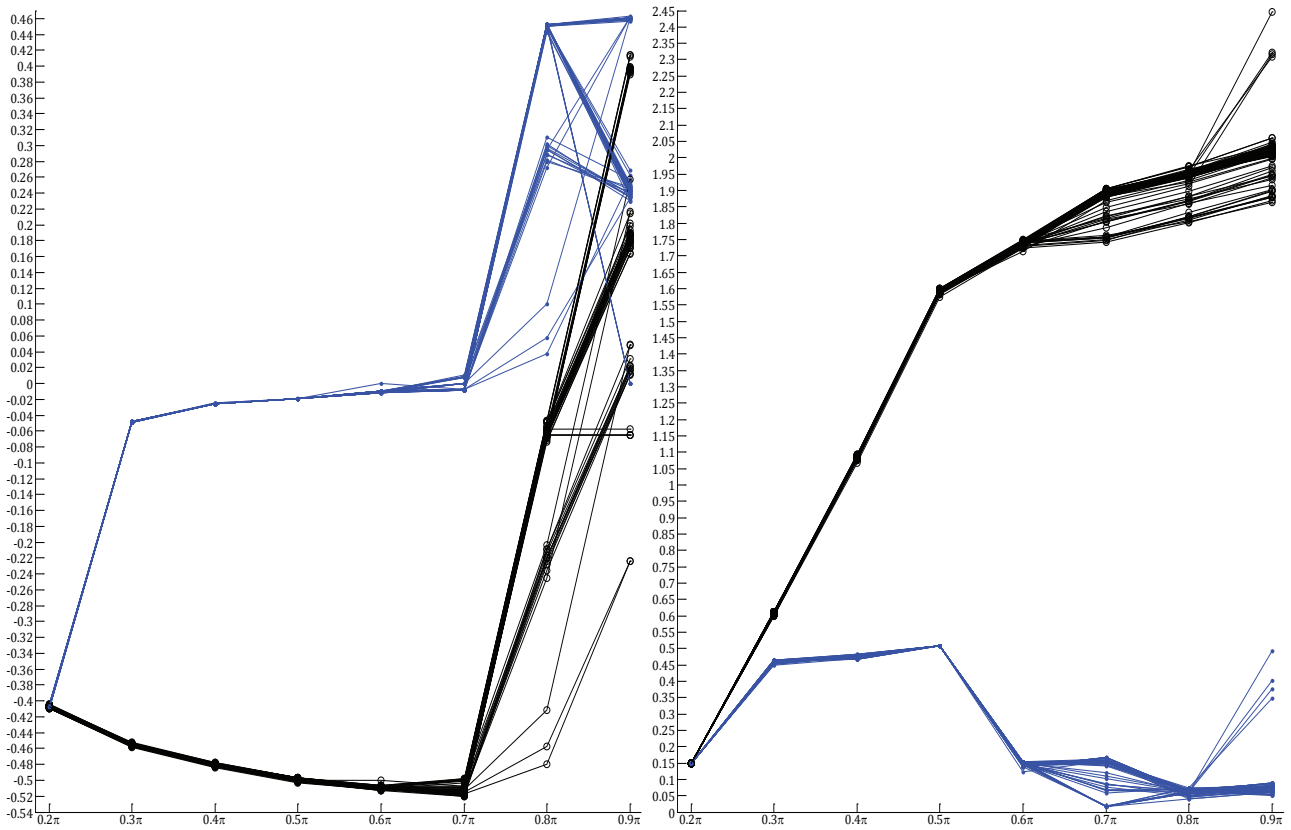


Fig. 11. A bunch of the first player's payoffs (left) and second player's payoffs (right) at the end of every subinterval (dots) and their cumulative sum (circles) by $M = 33, 40$ and $J = 33, 40$

If it was interval $[0.1\pi; 0.6\pi]$, the first player's stacked equilibrium strategies would be ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent by

$$\varepsilon = 0.2016 \cdot |v_i^*(M, J)| \quad \text{at } i = \overline{1, 5}$$

within the same samplings. Herein, if

$$\varepsilon = 0.1073 \cdot |z_i^*(M, J)| \quad \text{at } i = \overline{1, 5},$$

the approximate equilibrium in the staircase game by (120)–(124) would be ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent.

Eventually, this example shows that it may be very hard to find such an ε for which an approximate equilibrium in the staircase game would be ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent. The matter is the range of payoffs of a player's may significantly differ from the range of the other player's payoffs. For instance, in the staircase game by (120)–(124), the first player's payoff varies roughly between -0.5772 and 0.4894 , whereas the second player's payoff varies roughly between 0.0002 and 0.6408 . Unlike the first player's payoff, the second player's payoff is always positive.

However, all the approximate equilibria in **Fig. 12** are ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent by $\varepsilon = 0.4888$ (although it is too big payoff consistency relaxation). Moreover, every approximate equilibrium obtained by

$$M = J \in \{44, 45, 46, 47, 48, 49\}$$

is ε -payoff- $\{M, M\}$ -consistent by $\varepsilon = 0.3553$, whereas every approximate equilibrium obtained by

$$M = J \in \{46, 47, 48, 49\}$$

is ε -payoff- $\{M, M\}$ -consistent by $\varepsilon = 0.2043$, which is relatively not that bad. Although the solution convergence is apparent, the players' equilibrium strategies will not produce more consistent payoffs by further thickening the samplings. This is an evidence of that the solution convergence has reached its saturation, and further thickening the samplings will not improve the solution approximation nor improve the consistency. Therefore, the approximate solution to the 2-person staircase game by (120)–(124) can be accepted by the independent sampling at both players with the integers between 23 and 40 (of course, not necessarily identical).

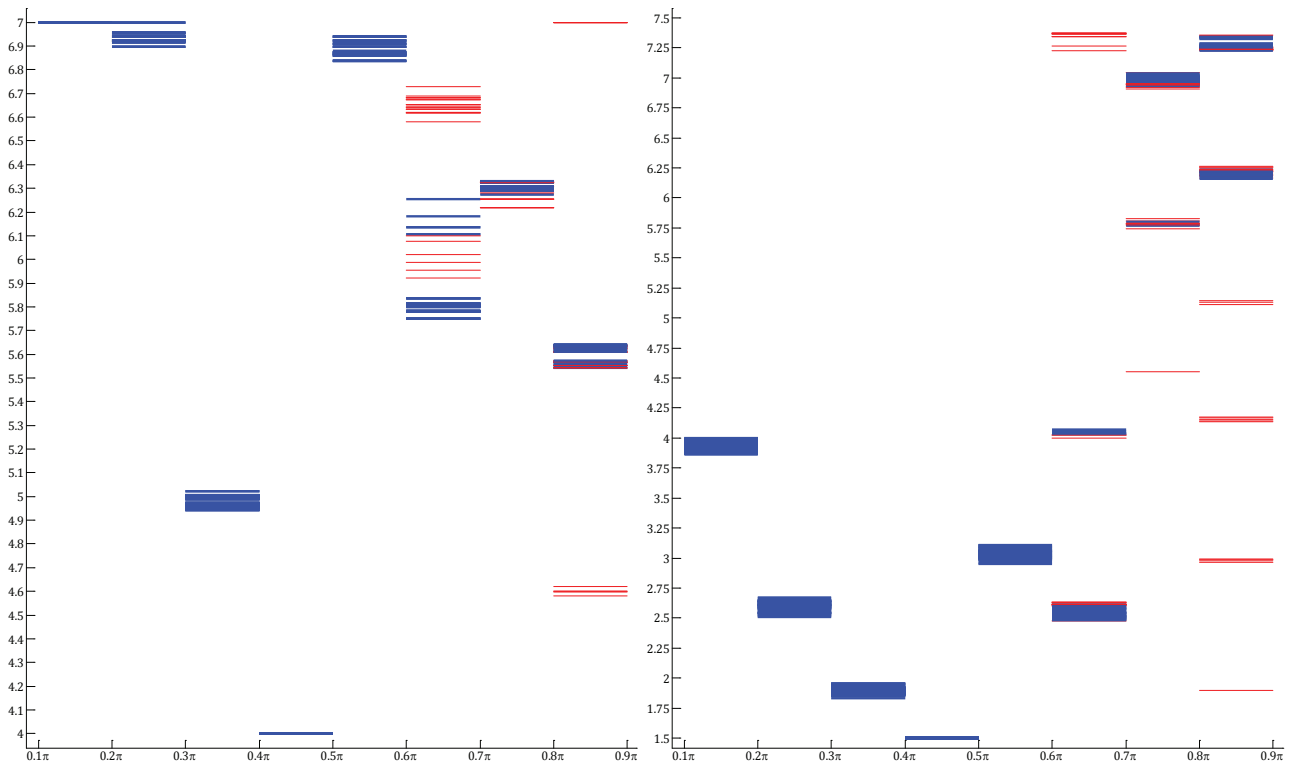


Fig. 12. A bunch of subinterval-wise optimal strategies of the first (left) and second (right) players by $M = \overline{43, 50}$ and $J = \overline{43, 50}$

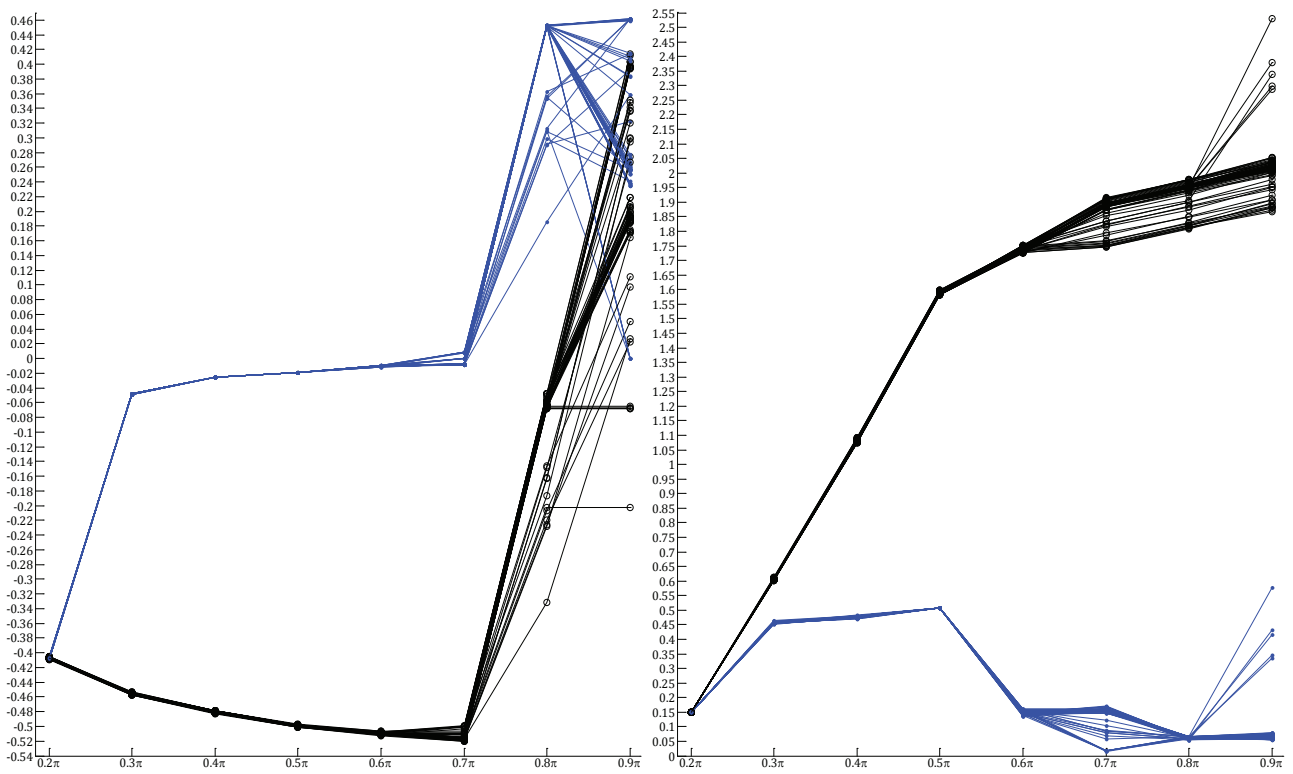


Fig. 13. A bunch of the first player's payoffs (left) and second player's payoffs (right) at the end of every subinterval (dots) and their cumulative sum (circles) by $M = \overline{43, 50}$ and $J = \overline{43, 50}$

Discussion of the contribution

Without considering each subinterval bimatrix game separately, it would be intractable to straightforwardly solve the sampled staircase game. For instance, by sampling the 2-person staircase game given by (120)–(124), where each of the players uses 8-subinterval staircase function-strategies, even with, say, $M = 24$ and $J = 23$, the resulting $24^8 \times 23^8$ bimatrix game (in which, e. g., the first player has 110075314176 pure strategies) cannot be solved in a reasonable time span. Indeed, it is at least hard to store those more than 110 billion pure strategies, let alone processing them (in searching for equilibria). Therefore, solving subinterval bimatrix games (which are obviously “smaller”) separately and then stacking (or stitching, in more understandable terms) their solutions is a far more efficient way to obtain an approximate solution of the initial staircase game. The applicability of this method may be limited to the subinterval bimatrix game size defined by M and J . For instance, the computation time has an exponentially-increasing dependence on the size of the square matrix. Solving bimatrix games, in which each of the players has at least a few hundred pure strategies, may be time-consuming in applications requiring fast updates of the solution (when the structure of the initial staircase game changes itself).

The (weak) consistency of an approximate solution is a criterion of its acceptability. However, a (weakly) consistent approximate solution may not exist at appropriately small (tractable) M and J . So, the consistency decomposition into parts by **Definitions 3–8** and particularly isolating an ε -payoff consistency by **Definition 11** is justified and practically applicable.

There are still many open questions, though. First, the requirement of the proper sampling increment (**Definition 1**) given by strict inequality (48) may seem not enough rigorous. The matter is that it cannot guarantee that the sampled points in a 1-incremented sampling will be closer to each other (see **Fig. 1**). However, the respective requirement in the form of inequality

$$\max_{s=1, \bar{S}} (\lambda^{(s+1)} - \lambda^{(s)}) < \min_{s=1, \bar{S}-1} (\zeta^{(s+1)} - \zeta^{(s)}) \quad (145)$$

guaranteeing the mentioned property appears to be too rigorous. Indeed, if the player follows (145), the proper sampling increment is going to fail if there is a pair of too close points in the previous sampling.

Second, it is not proved that limits

$$\lim_{M \rightarrow \infty, J \rightarrow \infty} v_i^*(M, J) \quad \forall i = \overline{1, N} \quad (146)$$

and

$$\lim_{M \rightarrow \infty, J \rightarrow \infty} z_i^*(M, J) \quad \forall i = \overline{1, N} \quad (147)$$

exist and they are equal to the respective equilibrium values of the subinterval continuous games. Third, if limits (146) and (147) exist, it is not proved that this is followed by that any approximate equilibrium (59) is ε -payoff- $\{M, J\}$ -consistent for any $M \geq M_*$ and $J \geq J_*$ ($M_* \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $J_* \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), let alone the problem of the equilibria multiplicity. The inter-influence among the consistency decomposition parts by **Definitions 3–8** is also uncertain yet.

The question of a possible reconciliation of the difference of the players' sampling step selection is indeed that hard. The players can select their samplings simultaneously but identical samplings are of small likelihood. Even if the ranges of function-strategy values are identical and sampling integers M and J are the same (i. e., $M = J$), implying the uniform samplings, a player's sampling may differ from the other player's sampling due to eventual inaccuracies in selecting points. In the example of 2-person game approximation, this has been modelled by (132) and (133) with using normal “noise” in the point selection. However, at sufficiently great sampling integers M and J , not necessarily equal, significant changes in M and J are expected not to influence the approximate solution much (see **Fig. 8, 10, 12**, and **Fig. 9, 11, 13**). Just like in the above-considered example, the player's equilibrium strategies converge subinterval-wise and the resulting staircase strategy appears to be an acceptable approximate equilibrium strategy in the initial staircase game.

Therefore, the presented method is a significant contribution to the 2-person game theory and its finite approximation supplement. It allows approximately solving 2-person games with staircase-function strategies in a far simpler manner regardless of the fact that the players may sample their sets of function-strategy values differently [14, 20, 24]. Once the (weak) consistency is confirmed (the respective approximate solution should be at least ε -payoff consistent by **Definition 11**), the approximate pure-mixed-strategy solution (like those ones of staircase strategies in **Fig. 8, 10, 12**) can be easily implemented and practiced [6, 7, 9, 12, 20].

Conclusion

A non-cooperative 2-person game played in staircase-function continuous spaces is approximated to a bimatrix game by sampling the players' pure strategy value sets. Each set is irregularly sampled in

its own way so that the resulting samplings may be of different cardinalities and varying densities. While sampled, the requirement of the proper sampling increment (by **Definition 1**) must be followed – the $S + 1$ points in a 1-incremented sampling must be selected denser than S points.

Owing to **Theorem 2**, the solution of the bimatrix game is obtained by stacking the solutions of the “smaller” (“shorter”) bimatrix games, each defined on a subinterval where the pure strategy value is constant. In this research, the Nash equilibrium has been taken as the solution type, although some other types might be considered as well. However, this is a matter of future research.

The stack of the “smaller” bimatrix game equilibria is an approximate solution to the initial staircase game. The (weak) consistency of the approximate solution is studied by how much the payoff and equilibrium change as the sampling density minimally increases by the three ways of the sampling increment: only the first player’s increment, only the second player’s increment, both the players’ increment. Thus, the consistency, equivalent to the approximate solution acceptability, is decomposed into the payoff (**Definition 3**), equilibrium strategy support cardinality (**Definitions 4 and 5**), equilibrium strategy sampling density (**Definitions 6 and 7**), and support probability consistency (**Definition 8**). The weak consistency itself is a relaxation to the consistency, where the minimal decrement of the sampling density is ignored. The suggested method of finite approximation of staircase 2-person games consists in the independent samplings, solving “smaller” bimatrix games, and stacking their solutions if they are consistent.

The most important part is the payoff consistency. It is checked in the quickest and easiest way. In practice, it is reasonable to consider a relaxed payoff consistency. The relaxed payoff consistency

by (114)–(119) means that, as the sampling density minimally increases (in each of the three ways of the sampling increment), the game value change in an appropriate approximation may grow at most by ε for each of the players. The equilibrium strategy support cardinality (weak) consistency is checked even easier, but it takes some resource to calculate the support cardinality, whereas the payoff is received “instantly”. In general, the relaxed payoff consistency is the main (and often the single) item to be controlled for the successful approximation. The finite approximation is regarded appropriate if at least the respective approximate (stacked) equilibrium is ε -payoff consistent (**Definition 11**).

One can notice that, in staircase game (12) decomposed into games (27), the player’s payoff value depends only on the subinterval length if time t is not explicitly included into the function under the respective integral in (8) or (9). If the subinterval length does not change, and time t is not explicitly included into the functions (10), (11) under the integrals in (8), (9), then every subinterval has the same bimatrix game. The triviality of the equal-length-subinterval solution is explained by a standstill of the players’ strategies. For instance, time variable t explicitly included into functional (8) means that the first player may develop one’s actions due to the game-modelled system changes (develops) as time goes by.

Finite approximation of games played in staircase-function continuous spaces will be extended and advanced also for the case of three players sampling their strategy value sets irregularly. The independence of the player’s sampling step selection may have a deeper incompatibility impact in the trimatrix game case, where the problem of the equilibria multiplicity and the varying profitability have far trickier consequences.

References

- [1] N.N. Vorob’yov, *Game theory fundamentals. Noncooperative games*, Moscow, Nauka, 1984, 496 p. (in Russian).
- [2] N.N. Vorob’yov, *Game theory for economists-cyberneticists*, Moscow, Nauka, 1985, 272 p. (in Russian).
- [3] M.J. Osborne, *An introduction to game theory*, Oxford University Press, 2003, 554 p.
- [4] N. Nisan *et al.*, *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007, 778 p. Available: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511800481>
- [5] K. Leyton-Brown and Y. Shoham, *Essentials of game theory: a concise, multidisciplinary introduction*, Morgan & Claypool Publishers, 2008, 104 p. Available: <https://doi.org/10.2200/S00108ED1V01Y200802AIM003>
- [6] R.B. Myerson, *Game theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, 1997, 600 p.
- [7] V.V. Romanuke, *Theory of Antagonistic Games*, Lviv, New World, 2000, 2010, 294 p. (in Ukrainian).
- [8] V.V. Romanuke, “Finite approximation of continuous noncooperative two-person games on a product of linear strategy functional spaces”, in *Journal of Mathematics and Applications*, 2020, vol. 43, pp. 123–138. Available: <https://doi.org/10.7862/rf.2020.9>
- [9] T.C. Schelling, *The Strategy of Conflict*, Harvard University, 1980, 328 p.

- [10] S. Rahal *et al.*, “Hybrid strategies using linear and piecewise-linear decision rules for multistage adaptive linear optimization”, in *European Journal of Operational Research*, 2021, vol. 290, iss. 3, pp. 1014–1030. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.054>
- [11] S.P. Coraluppi and S. I. Marcus, “Risk-sensitive and minimax control of discrete-time, finite-state Markov decision processes”, in *Automatica*, 1999, vol. 35 (2), pp. 301–309. Available: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(98\)00153-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(98)00153-8)
- [12] H. Khaloie *et al.*, “Coordinated wind-thermal-energy storage offering strategy in energy and spinning reserve markets using a multi-stage model”, in *Applied Energy*, 2020, vol. 259, 114168. Available: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.114168>
- [13] S. Kim *et al.*, “Flexible risk control strategy based on multi-stage corrective action with energy storage system”, in *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2019, vol. 110, pp. 679–695. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2019.03.064>
- [14] V.V. Romanuke, “Approximation of unit-hypercubic infinite two-sided noncooperative game via dimension-dependent irregular samplings and reshaping the multidimensional payoff matrices into flat matrices for solving the corresponding bimatrix game”, in *Computer Modelling and New Technologies*, 2015, vol. 19, no. 3A, pp. 7–16.
- [15] E.B. Yanovskaya, “Minimax theorems for games on the unit square”, in *Probability theory and its applications*, 1964, no. 9 (3), pp. 554–555.
- [16] S. Adlakha *et al.*, “Equilibria of dynamic games with many players: Existence, approximation, and market structure”, in *Journal of Economic Theory*, 2015, vol. 156, pp. 269–316. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jet.2013.07.002>
- [17] P. Bernhard and J. Shinar, “On finite approximation of a game solution with mixed strategies”, in *Applied Mathematics Letters*, 1990, vol. 3 (1), pp. 1–4. Available: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(90\)90054-F](https://doi.org/10.1016/0893-9659(90)90054-F)
- [18] E.B. Yanovskaya, “Antagonistic games played in function spaces”, in *Lithuanian Mathematical Bulletin*, 1967, no. 3, pp. 547–557.
- [19] J. Yang *et al.*, “Group formation in the spatial public goods game with continuous strategies”, in *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, vol. 505, pp. 737–743. Available: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.03.057>
- [20] V.V. Romanuke and V. G. Kamburg, “Approximation of isomorphic infinite two-person noncooperative games via variously sampling the players’ payoff functions and reshaping payoff matrices into bimatrix game”, in *Applied Computer Systems*, 2016, vol. 20, pp. 5–14. Available: <https://doi.org/10.1515/acss-2016-0009>
- [21] R.E. Edwards, *Functional Analysis: Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, 781 p.
- [22] F.L. Lewis *et al.*, *Optimal Control*, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2012, 552 p. Available: <https://doi.org/10.1002/9781118122631>
- [23] V.V. Romanuke, “Finite approximation of zero-sum games played in staircase-function continuous spaces”, in *KPI Science News*, 2021, no. 4, pp. 19–38. Available: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2021.4.242769>
- [24] V.V. Romanuke, “Adaptive finite approximation of continuous noncooperative games”, in *Journal of Automation and Information Sciences*, 2020, vol. 52, iss. 10, pp. 31–41. Available: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i10.20>

В. В. Романюк

СКІНЧЕННА АПРОКСИМАЦІЯ БЕЗКОАЛІЦІЙНИХ ІГОР ДВОХ ОСІБ, ЩО РОЗІГРУЮТЬСЯ У НЕПЕРЕРВНИХ ПРОСТОРАХ СХОДИНКОВИХ ФУНКЦІЙ

Проблематика. Існує відомий спосіб апроксимації неперервних безкоаліційних ігор двох осіб, де наближений розв’язок (ситуація рівноваги) вважають прийнятним, якщо він змінюється мінімально за мінімальної зміни кроку дискретизації. Однак цей метод не можна прямо застосувати до гри двох осіб, що розігрується зі стратегіями у формі сходиноквих функцій. Крім того, слід брати до уваги незалежність вибору гравцем кроку дискретизації.

Мета дослідження. Мета полягає у тому, щоб розробити метод скінченної апроксимації ігор двох осіб, які розігруються у неперервних просторах сходиноквих функцій, беручи до уваги, що гравці, ймовірно, дискретизують множини своїх чистих стратегій самостійно.

Методика реалізації. Для досягнення зазначеної мети формалізується гра двох осіб, в якій стратегії гравців є сходиноквими функціями часу. У такій грі множина чистих стратегій гравця є континуумом сходиноквих функцій часу, і час вважають дискретним. Умови дискретизації множини можливих значень чистої стратегії гравця викладаються так, що гра стає визначеною на добутку скінченних просторів сходиноквих функцій. Загалом крок дискретизації у кожного гравця різний, і розподіл вибірових точок (значень функції-стратегії) неоднорідний.

Результати дослідження. Подано метод скінченної апроксимації ігор двох осіб, які розігруються у неперервних просторах сходиноквих функцій. Метод полягає у нерегулярній дискретизації множини значень чистої стратегії гравця, знаходженні найкращих ситуацій рівноваги у “менших” біматричних іграх, кожна з яких визначена на підінтервалі, де значення чистої стратегії є постійним, й укладанні цих рівноважних ситуацій, якщо вони є узгодженими. Уклад рівноваг у “менших” біматричних іграх є наближеною рівновагою у вихідній сходиноквій грі. Досліджується (слабка) узгодженість наближеної рівноваги тим, наскільки змінюється вигреш та рівноважна ситуація, коли щільність дискретизації мінімально збільшується трьома способами: лише приріст у першого гравця, лише приріст у другого гравця, приріст в обох гравців. Узгодженість розкладається на узгодженість вигрешів, узгодженість потужності спектра рівноважної стратегії, узгодженість щільності дискретизації рівноважної стратегії та узгодженість спектральних імовірностей. Із практичної точки зору доцільно розглядати релаксовану узгодженість вигрешів.

Висновки. Запропонований метод скінченної апроксимації сходиноквих ігор двох осіб полягає у незалежних дискретизаціях, розв’язуванні “менших” біматричних ігор за прийнятний проміжок часу та укладанні їхніх розв’язків, якщо вони є узгодженими.

Скінченне наближення вважають прийнятним, якщо принаймні відповідна наближена (укладена) рівновага є узгодженою за ε -виграшами.

Ключові слова: теорія ігор; функціонал виграшів; стратегія у формі сходиноквої функції; біматрична гра; нерегулярна дискретизація; узгодженість наближеної рівноваги.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
26 грудня 2022 року

Прийнята до публікації
20 лютого 2023 року

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

DOI 10.20535/kpissn.2023.1-4.304695

UDC 621.789

Chenjian Dong¹, Yibiao Zhang², Lei Zhang³, Kraiev Maksym^{4*}, Geichuk Volodymyr⁵

¹Yancheng Polytechnic College, Yancheng, China

²Yancheng Jinzhou Machinery Manufacturing Co., Ltd, Yancheng, China

³Zhongjing Wanye (Beijing) Technology Group Co., Ltd, Beijing, China

⁴Rocket and space industry, Dnipro, Ukraine

⁵National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: mkraev79@gmail.com

REASONS AND REGULARITIES OF THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELDS ON THE MECHANICAL PROPERTIES AND STRUCTURE OF DEFORMABLE METALS

Background. The strength of metals greatly limits the possibility of obtaining products by plastic deformation. The electromagnetic nature of the processes of structure formation and plastic deformation provided the basis for the application of additional influence of the magnetic field. A fairly large volume of research material has been accumulated on the topic of additional influence of the magnetic field on ferro-, dia- and paramagnetic metals. The researches of recent years have an applied nature of studying the magnetoplasticity of technical alloys. Their generalization will make it possible to move from laboratory research to the development of equipment and technologies for combined pressure processing of metal products in a weak magnetic field.

Objective. Generalization and analysis of the results of laboratory and theoretical studies of the additional application of the magnetic field in the processes of mechanical testing of metals and alloys.

Methods. Literary review of materials of articles, monographs, dissertations.

Results. Reasonable use of a magnetic field for plastic deformation of metals. The explanation of the mechanism of the influence of the magnetic field on the structural elements of metals based on the effect of magnetoplasticity has been made. The description of changes in the mechanical properties of metals and alloys under the additional influence of a magnetic field is given.

Conclusions. The phenomenon of magnetoplasticity has been studied for a wide range of materials such as pure metals and their alloys, including industrial steels and alloys. Various types of positive effects of a magnetic field on the mechanical properties of metals have been established: a decrease in the yield strength and deformation resistance, an increase in strain, relaxation of internal stresses, and a decrease in dislocation density. There is also a reverse, negative effect of the influence of a magnetic field: increased rate of hardening, embrittlement, increased creep of metals. What will be the effect of a magnetic field on a specific metal cannot be guaranteed with high accuracy.

Keywords: Magnetic field; magnetoplasticity; mechanical properties; tension; dislocation.

Introduction

Metals are reliable structural materials due to their high strength and ability to be processed by various methods. The requirements for metal products and the intensification of processing methods continue to increase. The strength of metals greatly limits the possibility of obtaining products by plastic deformation. The impact of a complex of mechanical, electrical or magnetic energy influenced by

the rheological properties of the processed metals. A number of new technologies for plastic deformation of metals have been created. Their use is especially important when processing hard-to-deform, alloyed, precious metals and high-value alloys, where even a small increase in the efficiency of the processing process is of great economic importance. The theory is developed towards a description of micro- and nanostructural processes of plastic deformation, atomic and electronic level interactions in metals.

Пропозиція для цитування цієї статті: Ченджан Донг, Джибао Чанг, Лей Чанг, Максим Краєв, Володимир Гейчук, “Причини і закономірності впливу магнітних полів на механічні властивості і структуру металів, що деформуються”, *Наукові вісті КПИ*, № 1–4, с. 45–53, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.304695

Offer a citation for this article: Chenjian Dong, Yibiao Zhang, Lei Zhang, Kraiev Maksym, Geichuk Volodymyr, “Reasons and regularities of the influence of magnetic fields on the mechanical properties and structure of deformable metals”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 45–53, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.304695

The rheological properties of crystalline materials are determined by the presence of lattice defects in them, primarily dislocations. The dynamics of their origin and movement under the influence of external stresses determines the mechanical properties of the material. The nucleation and movement of a dislocation is a process of interaction between atoms of the crystal lattice. This interaction of atoms is carried out due to the electrons in their outer shells by changing their structure, redistributing electrons from atom to atom or into the general “electron gas” of the crystal. The bonding of atoms is the result of electrostatic interaction between the nuclei and all electrons of atoms [1].

Problem statement

Generalization and analysis of the results of laboratory and theoretical studies of the additional application of the magnetic field in the processes of mechanical testing of metals and alloys. Justification of the application of the magnetic field, explanation of the mechanism of the influence of the magnetic field of the structural elements of metals, description of the change in the mechanical properties of metals and alloys under the additional influence of the magnetic field.

Presentation of the main research results

The electromagnetic nature of the processes of structure formation and plastic deformation gave rise to the use of additional exposure to a magnetic field (MF). The beginning of experiments on the use of MF can be considered the mid-twentieth century [2–4], where changes in polymorphic transformations in metals were recorded, which served as the basis for the creation of the first heat treatment technologies with the external influence of MF. A fairly large amount of research material has been accumulated; there are review articles and monographs [5, 6, 11, 15, 18–21, 23] on the topic of additional effects of MF on metals, alkali halide crystals, semiconductors, fullerenes, and polymers.

The research is so numerous that a separate work needs to be devoted to the chronology and systematization of tested materials. However, general conclusions can be formulated based on the opinions of many authors. There are several bright groups of scientists who studied various aspects of the influence of MF: M.L. Bernstein, V.N. Pustovoyt – for heat treatment of steels [5–8]; M.A. Krivoglaz, V.D. Sadovsky, V.M. Schastlivtsev, E.A. Fokina – on phase transformations in steels [9, 10]; V.I. Als-

hits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, Yu.I. Golovin – on the magnetoplasticity of solids [11–15]; V.E. Gromov, S.V. Konovalov, Yu.F. Ivanov – on strength and plastic deformation of metals [11–15]. In addition to groups of scientists, this topic is being studied by many individual researchers, the results of whose work are given in the following description.

Most of the works describe the experimental results of the influence of MF on the mechanical properties of solids. Among them, the most numerous are tensile and compression tests. Changes in the properties of many metals, both in pure form and their alloys, including become. For example: Cu, Ag [16, 17, 23, 28]; Al [16; 17, 21, 23, 28, 29, 33]; Ni, Fe, Co, Ni-Co, Ti, Nb, Mo, Bi, bronze [23]; steel [23–27]. Changes in the mechanical properties of metals under the influence of the MF can manifest themselves in many ways in an increase or decrease in their values, or may not have a significant effect.

The greatest practical interest, based on its wide distribution, is caused by studies of the deformation of iron and its alloys. Tensile tests of technical Fe [23–25] at a strain rate of $2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ showed that when a constant MF (500 Oe) is turned on, the yield strength decreases (Fig. 1) by 30 MPa, and the abrupt change in its value disappears (yield tooth) in the initial period of plastic deformation, the length of the yield plateau is reduced. In the presence of a transverse MF, these effects are significantly less. Longitudinal variable MF (50 Hz, 500 Oe) reduces the value of both the lower and upper yield limits.

The same works [23–25] established that constant MF has little effect on the mechanical properties of technical iron, but noticeably changes the characteristics of pure iron. For example, the elongation increases by 1.7 times. A deformation test under constant load [21] in the presence of constant MF (860 Oe) showed that creep in the case of high purity Fe is accelerated in MF at loads above the yield strength, up to the ultimate strength. MF also affects the increase in total elongation. For example, at a load of 76 MPa, the creep rate at the second stage is $0.9 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ without MF and $2.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ in MF, respectively. At this load, pure iron samples were destroyed in the MP after 25–100 minutes, and without a field in more than 600 minutes. The effect of accelerating creep with the application of a constant MF in the case of samples made of technical Fe is observed only at loads close to the tensile strength of this material. The time to failure at $\sigma = 294 \text{ MPa}$ in MF decreases approximately by half. In a weak MF at an intensity of 200 Oe, the effect of its influence on the mechanical properties of iron has not been established. According to the

authors of [25], the features of tension and creep of iron in MF are due to the fact that in a constant MF of sufficient strength there are no domain boundaries that serve as places for the accumulation and pinning of dislocations. Therefore, domains do not have an inhibitory effect on the process of plastic deformation, in particular on the acceleration of creep and increasing tensile elongation. The effects are more pronounced in iron that is purer in terms of impurities, since impurity atoms do not block dislocations, and the role of domain boundaries turns out to be more significant.

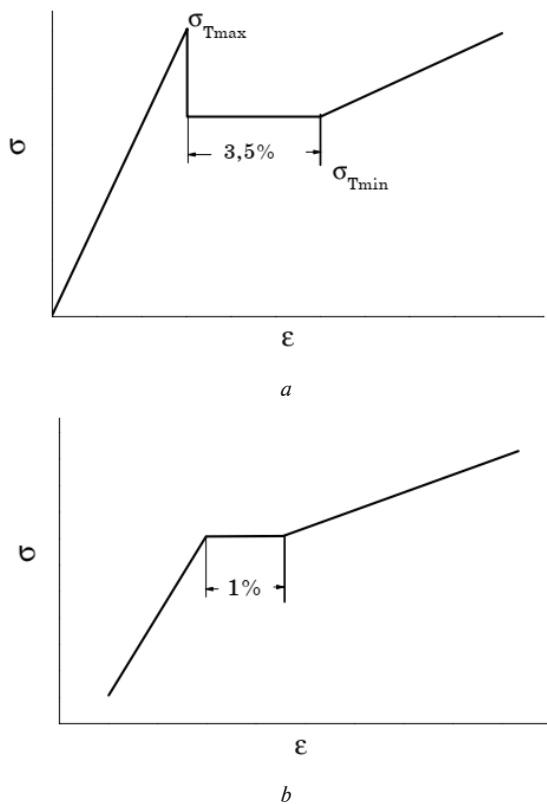


Fig. 1. Diagram of the tensile yield area of technical Fe:
 a – without MF ($\sigma_{Tmax} = 343$ MPa; $\sigma_{Tmin} = 274$ MPa);
 b – in the longitudinal MF ($\sigma_{Tmax} = \sigma_{Tmin} = 245$ MPa)

Tensile tests of samples made of St3 (similar S235) steel in constant (500–700 Oe) and alternating (50 Hz, 500–700 Oe) MF were carried out for the first time in [26]. The directions of MF and deformation coincided. The strain rates were 20 and 250 mm/min. Analysis of the stress-elongation curves showed that in MF plastic deformation begins and proceeds at a lower deformation stress. Depending on the deformation rate and MF intensity, the effect of reducing deformation stress lies in the range of 5–10 %. However, the relative elongation decreased by approximately two times. In [27],

the tensile curves of St3 steel in a high-strength MF ($H = 50$ kOe) were also studied. Deformation of pre-annealed samples was carried out at room temperature at a speed of 0.5 mm/min. Tests have shown that in MF the maximum elongation of the sample decreases by 20–30 %, and the hardening increases slightly.

The presented studies motivated us to conduct our own tests, which also yielded positive results. When steels are stretched in a magnetic field with an induction of 1.2 T (Fig. 2), a reduction in deformation resistance of up to 25 % is achieved. The greatest influence is on the deformation of high-strength steels [35].

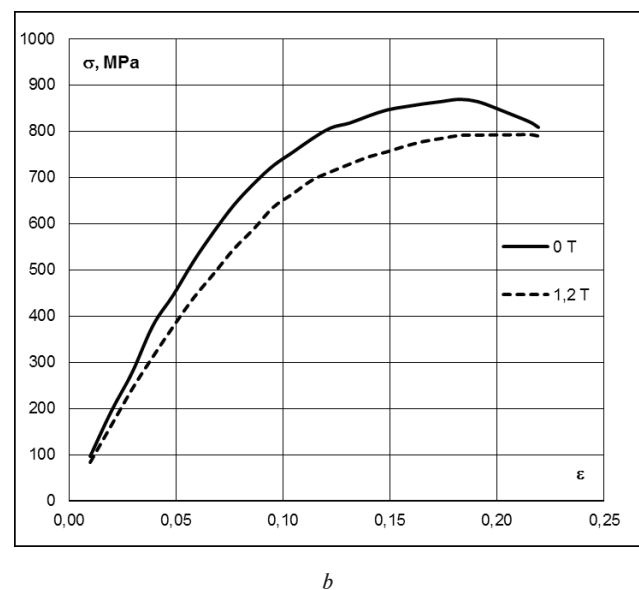
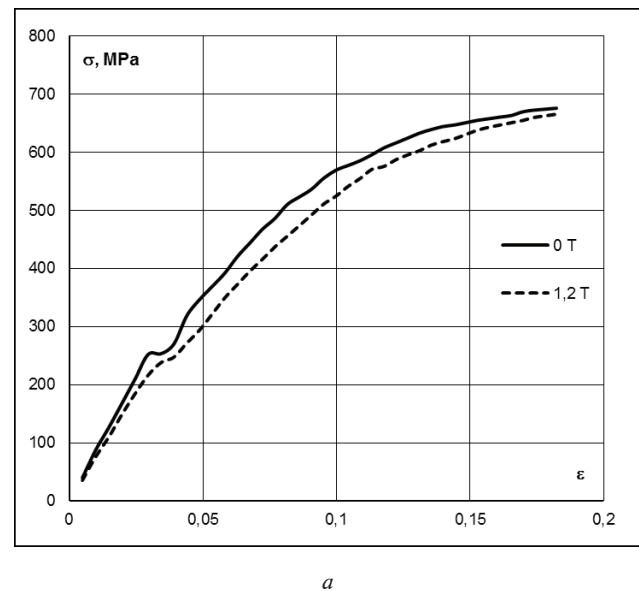


Fig. 2. Tensile curves of steels: a – S235; b – 41Cr4

In addition to ferromagnetic iron alloys, the effect of magnetic fields on paramagnetic alloys has been widely studied. The authors of [33] studied the effect of a pulsed magnetic field with an induction of up to 7 T on the tensile strength of 7055 aluminium alloy (Fig. 3).

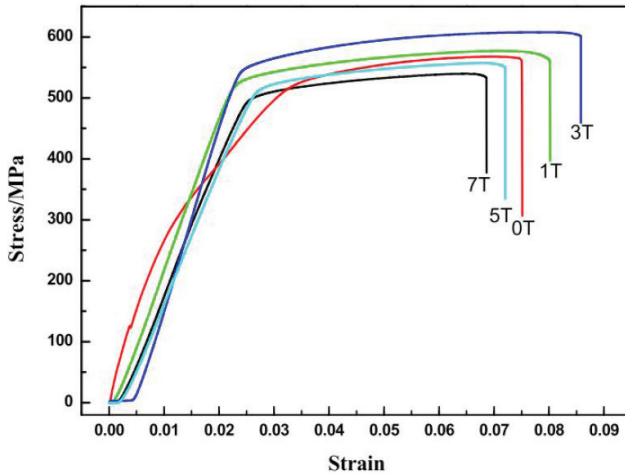


Fig. 3. Tensile curves of alloy 7055 at various values of magnetic induction

The existence of a threshold for exposure to a magnetic field has been revealed; for this experiment, this is a field with an induction of 3 T. As long as the induction is less than the threshold value, its effect on stretch performance is positive. As the induction exceeds the threshold value, the influence of the MF becomes negative. At the peak of the 3 T induction threshold value, the tensile strength and elongation reaches an increase of relative 8 % and 20 % compared to the values of the sample without magnetic field treatment.

A similar experiment with similar results was carried out in tension of titanium alloy Ti6Al4V (TC4) [33]. Here, an induction of 3 T is also the threshold value for the growth of mechanical properties and dislocation density. At an induction of 3 T, the elongation reaches a maximum value, which increases by a relative 24 % compared to the values of the sample without treatment with a MF.

Two-phase titanium alloys, as a Ti6Al4V (TC4) [32], actually contain magnetic elements reacting to a magnetic field positively, which the magnetic elements include titanium and iron. They are able to align under the influence of a magnetic field and form aggregated structures. Magnetic particles inside magnetic materials would be aligned with the direction of an external magnetic field. This phenomenon is clarified by magnetic filler interactions of

magnetic particles in a presence of a magnetic field. In the condition of zero magnetic field intensity, magnetic particles may move randomly to other particles because of the van der Waals forces. With a presence of a magnetic field, magnetic dipole energy is large enough to overcome the thermal energy so that magnetic particles tend to align with the direction of the external field. After that, the aligned particles become linear chains [30–32].

There is a fact of instability of test results for the same materials by different authors. This indicates the decisive importance of the thermal and deformation history of the samples, i.e. their structures before testing. Also, an influential factor is the magnetic field itself in the metal deformation zone: its strength, direction of action relative to the axis of the main deformations, duration of exposure. The inconsistency of the results of using MF is still a barrier to recognizing the effectiveness of its use and the practical value of continuing research.

One of the physical quantities that make it possible to assume the causes and mechanism of the influence of a magnetic field on the mechanical properties of a solid [2] can be the energy imparted by the magnetic field to any structural element in a magnetic environment:

$$\Delta U_m \approx \mu_B g B,$$

where μ_B is the Bohr magneton; B – magnetic field induction; g – g-factor.

For weak magnetic fields with induction $B = 1 - 2 T$, $\Delta U_m \sim 10^{-5} - 10^{-4} eV$. In [3] a comparison of magnetic energy with the energies that determine the mechanical properties of metals at the macroscopic level is given. The energy required to move a dislocation in steel per atom is $\Delta U_{dist} \sim 10^{-3} eV$, migration energy of point defects (vacancies) – $\Delta U_{p.defects} \sim 10^{-2} eV$, elastic energy of the grain boundary (at a misorientation angle of $3-5^\circ$) – $\Delta U_{gb} \sim 10^{-2} - 10^{-3} eV$. According to estimates [1], the activation energy of overcoming the stopper $\Delta U_a \sim 0,1 - 1 eV$, exchange energy of dislocation-stopper bond $\Delta U_{ex} \sim 1 eV$. These estimated values indicate that weak MF cannot have a direct effect on the mechanical properties of metals at the macroscopic level. The low energy of the MF leads to the conclusion that the effect of MF on the mechanical properties of solids most likely occurs at the electronic level.

In an ideal crystal, magnetic fields can cause ordering by dipole and magnetic moments, changes in the electronic and phonon spectrum, as well as phase transitions. As for point defects, although they

themselves are rarely the cause of material failure, an important factor is their interaction with dislocations. For example, if a defect has a dipole or magnetic moment and elastic anisotropy, then its orientation in the MF will cause a decrease in the flow stress in some planes and an increase in others. In metals, a change in the MF state of the electron gas (which can be considered as a set of point stoppers for dislocations) can affect the plastic properties due to the effect of electron-dislocation interaction [22].

The reason for the change in the mechanical properties of crystalline materials is associated with the manifestation of the magnetoplasticity effect. The magnetoplastic effect (MPE) was first discovered in 1985 at the Institute of Crystallography named after Shubnikov RAS by V.I. Alshits' group [11]. The effect consisted of a displacement of newly introduced edge dislocations in NaCl crystals placed in a constant magnetic field with an induction of up to 1 T; a change in dislocation paths and microhardness was also observed in the crystals. MPE exists for a variety of non-magnetic and magnetic materials, particularly in ionic, ionic-covalent, covalent, molecular and metallic solids. Almost the entire variety of observed physical patterns characterizing this phenomenon in nonmetallic materials has found its explanation within the framework of the concept of spin-dependent electronic transitions in an external MF [23]. According to this concept, MF leads to the evolution of the spin state in the "dislocation-paramagnetic centre (defect)" system, which causes the lifting of the spin ban on certain electronic transitions. The latter radically change the configuration of the system, leading, in particular, to the detachment of dislocations from point defects, which leads to a change in the mechanical properties of the material.

The authors of [33] clearly described the mechanism of magnetoplasticity due to the movement of dislocations. The start of a dislocation motion is controlled by its release from the obstacles. This becomes reasonable under the action of a strong enough mechanical stress. More importantly, the dislocation mobility is the key factor to determine its moving characteristic. When the tensile test is performed under a magnetic field, the influence of the magnetic field on the dislocation, namely, the magnetoplasticity, will take effect. Fig. 4 illustrates the dislocation movement in one period in the presence of a magnetic field and external stress, where the parallelogram plane represents the sliding plane and the shadow represents the region that has slid.

The whole process can be divided into four main steps, as per Fig. 4(a)~(d). Fig. 4(a) (step 1) shows the initial state of dislocation. Under the con-

dition of external stress, the dislocation is free from the obstacles and moves forward along the sliding direction indicated by the arrow. The required characteristic time is $10^{-3}\sim 10^{-8}$ s. The accurate time is determined by the distance (L) between the adjacent obstacles.

Step 2 is the most complicated one during the whole process, which is displayed in Fig. 4(b), (e) and (f). During this period, the dislocation is close to the next obstacle. The relationship between the dislocation and obstacles are determined by L, which is relevant to the radical pair state. When the L is larger than L^* (about 10^{-9} m), which is the critical length to distinguish the state of the radical pair, the moving dislocation will pass the S, T resonance area where the electron spin directions are random (Fig. 4(e)). In the presence of a magnetic field, when the L is smaller than L^* , the free electrons will be stimulated between the dislocation and obstacle (Fig. 4(b)). Two free electrons will generate some new radical pairs. The required time to form a radical pair is $10^{-14}\sim 10^{-6}$ s. The transitory time implies that the free electron stimulation and radical pair formation will be completed instantaneously. Under the Δg mechanism, the radical pairs were impelled to transform from the S state to T0 by an external magnetic field. Further, the magnetic field will influence the electron spin and induce the atomic rearrangement, which directly results in the spin lattice relaxation. Under this condition, the radical pair will transit from a T0 to T+, T- state (Fig. 4(f)) [36].

The characteristic time for the atomic arrangement is $10^{-12}\sim 10^{-8}$ s. In view of the energy difference, the S state of the radical pair implies a higher bonding energy between the dislocation and obstacle when compared to the arbitrary T0, T+, T- state. Therefore, a high coverage of radical pairs in the T state will contribute to the enhancement of the plasticity of the material, which can be achieved in the presence of a magnetic field. The experimental phenomenon is referred to as the MPE. Apparently, the analysis and discussion about MPE is in the quantum scale.

As shown in Fig. 4(c) (step 3), the dislocation is hindered and stays at the obstacles. Though the radical pair is at the T state with lower bonding energy, the necessary impulsive energy is still needed. The possible energy resource comes from the stressor, sometimes, heat energy. The relevant characteristic time of this period is 10^{-5} s to ∞ . The meaning of " ∞ " means that if there is not enough energy to stimulate the dislocation movement, the dislocation will stay at the obstacles for long periods.

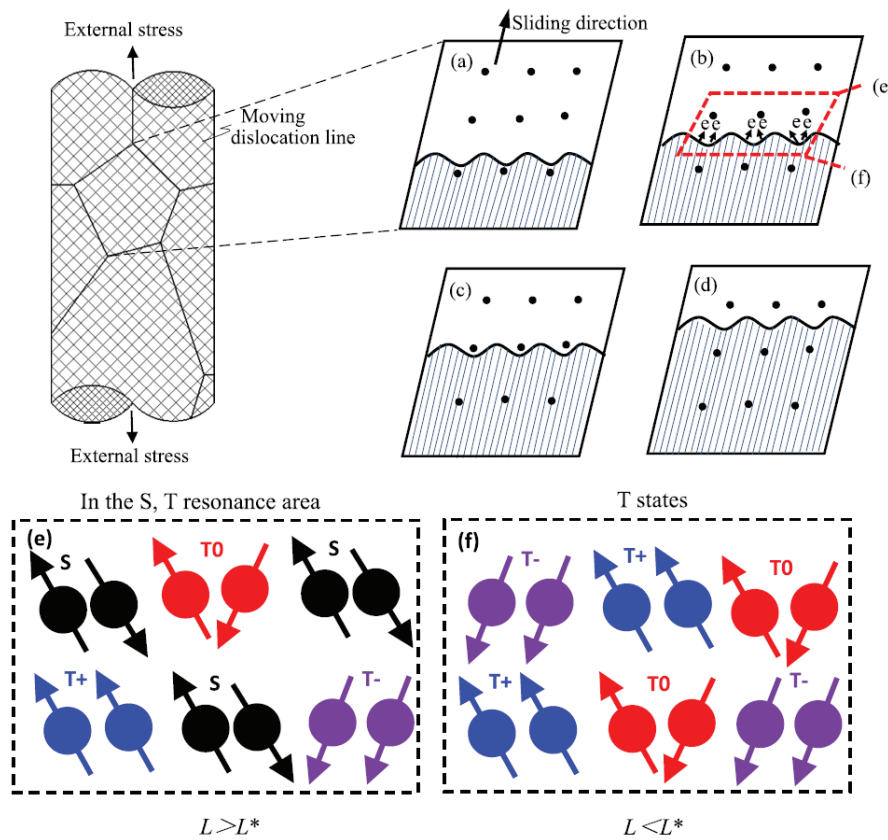


Fig. 4. The schematic of the dislocation movement in the presence of a magnetic field: (a) shows surmounting the previous obstacle and moving forward; (b) displays the motions close to the obstacles, in the cases of $L > L^*$ (e) and $L < L^*$ (f), with L being the distance between dislocation and obstacles, and L^* the critical one; (c) refers to the stay at the obstacles; (d) indicates the surmounting the obstacles and moving forward

In Fig. 4(d), when the critical demanded energy is absorbed, the dislocation will depend from the obstacle and move forward. The required time is $10^{-5} \sim 10^{-10}$ s. One period of dislocation movement will be terminated.

Compared to the characteristic time of the four steps, it can be concluded that step 2, which includes the electron stimulated and atomic arrangement, can end up in momentary time, which meanwhile demonstrates the high efficiency of the magnetic field treatment. Nevertheless, the delay of the dislocations at the obstacle in step 3 is the most time-consuming period. It is regularly the rate-limiting step when performing the tensile test.

The author of this article also made an attempt to explain the effect of a MF on a dislocation core. The change in the total energy of a small fragment of an idealized Fe crystal lattice with a moving edge dislocation has been calculated. Calculations were performed for conditions of external influence of a constant MF and without it. Calculations were carried out using the density functional theory method

in the Kohn-Sham version using the GAUSSIAN 09 software package [37]. The movement of a dislocation increases the energy of the Fe atomic system and increases it to an even greater extent in the presence of an interstitial atom. The influence of a MF reduces the energy of a system of atoms in various configurations of their arrangement. The movement of a dislocation increases the magnetic susceptibility of a system of atoms. When a dislocation moves in a MF, either the magnetic susceptibility of a system of atoms decreases or the intensity of its growth decreases. The MF has a positive effect on the uniformity of the distribution of electrons within a system of atoms with distortion of the crystal lattice, especially in the presence of impurity atoms. This result may be one of the justifications for the effect of magnetoplasticity in ferromagnets. The greatest change occurred in the system of pure Fe atoms. Impurity atoms reduce the effectiveness of MF exposure.

A summary of the studied influence of the magnetic field on the process of deformation of metals is presented in Table 1.

Table 1. Results of a study of the influence of a magnetic field on metals

Researched	Determined
Polymorphic transformations in metals and other materials	Changes in the kinetics of polymorphic transformations with the release of ferromagnetic phases, changes in the structure of the resulting phases
Mechanical properties of metals and alloys	The phenomenon of magnetoplasticity in microscopic volumes of material, changes in the strength and plasticity of macroscopic samples at various stages of deformation under conditions of tensile, compression, and creep tests have been revealed
The strength of the magnetic field, its direction relative to the main axis of deformation, constant or pulsed action during processing	Exposure to weak to strong magnetic fields, constant and alternating magnetic fields is effective. A magnetic field perpendicular to the direction of deformation of materials has a greater influence
Dislocation structure of the material	The mechanism of magnetoplasticity based on the interaction of moving dislocations with stoppers. Change in the energy of a system of atoms of a dislocation core in a magnetic field

The mechanism of the effect of MF on metals is determined by various factors and is still insufficiently studied. This is also due to the fact that there is no simple, unambiguous connection between the mobility of individual dislocations and macroplastic deformation characteristics.

Research in recent years has an applied nature in the study of magnetoplasticity of technical alloys. The relevance of the transition to the development of equipment and technologies for combined forming processing of metal products in a weak magnetic field arises.

Conclusions

a) The phenomenon of magnetoplasticity has been studied for a wide range of materials such as pure metals and their alloys, including industrial steels and alloys. Prominent scientists and teams of authors took part in the research, their works are presented in the form of numerous articles, monographs and dissertations. All types of metals are susceptible to the influence of a magnetic field: ferro-, para- and diamagnetic.

b) Various types of positive effects of a magnetic field on the mechanical properties of metals have been established: a decrease in the yield strength and deformation resistance, an increase in strain, relaxation of internal stresses, and a decrease in dislocation density. There is also a reverse, negative effect of the influence of a magnetic field: increased rate of hardening, embrittlement, increased creep of metals.

c) What will be the effect of a magnetic field on a specific metal cannot be guaranteed with high accuracy. The low energy of the magnetic field and its effect on the microstructural, atomic and electronic levels make it difficult to predict the behaviour of the metal.

Acknowledgements

This research is funded by 2023 Provincial Science and Technology Plan Special Fund (Foreign Experts Hundred Talents Plan) Project and 2022 Yancheng City Policy Guidance Plan (Introducing Intelligence) Project. We also thank the support from Jiangsu Province Foreign Expert Studio Project.

References

- [1] B.K. Vainshtein, V.M. Fridkin, V.L. Idenbom, *Modern crystallography*. Vol. 2, Moscow: Nauka, 1979.
- [2] B.T. Geilikman, "On the influence of magnetic and electric fields on phase transformations". *JETP*, Vol. 8, no. 10–11, P. 1136–1146, 1938.
- [3] A.J. Meyer, P. Taglang, "Effect of magnetic field on polymorphic transformation in ferromagnets". *Journal de Physique et Le Radium*, Vol. 14, P. 82, 1953.
- [4] R. Smoluchowski, R.W. Turner, "Influence of Magnetic Field on Recrystallization". *J. Appl. Phys.*, vol. 20, no. 8, pp. 745–746, August, 1949. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1698523>
- [5] M.L. Bernstein, *Thermomagnetic treatment of steel*, Moscow: Metallurgy, 1968.
- [6] M.L. Bernstein and V.N. Pustovoit, *Heat treatment of steel products in a magnetic field*, Moscow: Mechanical Engineering, 1987.
- [7] V.N. Pustovoit, Yu.V. Dolgachev, V.M. Salynskikh, V.Yu. Stiopka, "Kinetics of martensitic transformation in steel under the action of an external magnetic field", *International Journal of Applied Sciences and Technologies "Integral"*, no. 4, pp. 224–229, 2018.

- [8] V.N. Pustovoit and Yu.V. Dolgachev, “Structural State of Martensite and Retained Austenite in Carbon Steels after Quenching in Magnetic Field”, *Met Sci Heat Treat*, 64, pp. 688–692, 2023. Available: <https://doi.org/10.1007/s11041-023-00873-7>
- [9] M.A. Krivoglaz, V.D. Sadovsky, L.V. Smirnov, E.A. Fokina, *Hardening of steel in a magnetic field*, Moscow: Nauka, 1977.
- [10] V.M. Schastlivtsev, Yu.V. Kaletina, E.A. Fokina, *Martensitic transformation in a magnetic field*. Ekaterinburg: Ural Branch of the RAS, 2007.
- [11] V.I. Alshits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, et al. “Magnetoplastic effect: Basic properties and physical mechanisms”, *Crystallogr. Rep.*, 48, pp. 768–795, 2003. Available: <https://doi.org/10.1134/1.1612598>
- [12] V.I. Alshits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, et al. “Resonance magnetoplasticity in the EPR scheme under ultralow magnetic fields”, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 78, pp. 1041–1051, 2014. Available: <https://doi.org/10.3103/S1062873814100037>
- [13] V.I. Alshits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, et al. “Experimental studies and computer simulations of magnetoplastic effect”, in 2016 *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, Shanghai, China, 2016, pp. 1907–1907. Available: <https://doi.org/10.1109/PIERS.2016.7734825>
- [14] V.I. Alshits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, et al. “Resonance magnetoplasticity in ultralow magnetic fields”, *Jetp Lett.*, 104, pp. 353–364, 2016. Available: <https://doi.org/10.1134/S0021364016170045>
- [15] Yu.I. Golovin, “Magnetoplasticity of solids”, *Physics of solids*, vol. 46, no. 5, pp. 769–803, 2004.
- [16] J.M. Galligan, T.H. Lin, C.S. Pang, “Electron-Dislocation Interaction in Copper”, *Phys. Rev.Lett.*, vol. 38, no. 8, pp. 405–407, 1977. Available: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.405>
- [17] J.M. Galligan and C.S. Pang, “The electron drag on mobile dislocations in copper and aluminum at low temperatures-Strain rate, temperature, and field dependence”, *Appl. Phys.* vol. 50, no. 10, pp. 6253–6256, 1979. Available: <https://doi.org/10.1063/1.325762>
- [18] A.A. Urusovskaya, V.I. Alshits, A.E. Smirnov, N.N. Bekkauer, “Effects of magnetic influence on the mechanical properties and real structure of non-magnetic crystals”, *Crystallography*, vol. 48, no. 5, pp. 855–872, 2003.
- [19] R.B. Morgunov, “Spin micromechanics in the physics of plasticity”, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, vol. 174, no. 2, pp. 131–153, 2004.
- [20] V.I. Alshits, E.V. Darinskaya, M.V. Koldaeva, E.A. Petrzhih, “Chapter 86. Magnetoplastic Effect in Nonmagnetic Crystals», *Dislocations in Solids*, vol. 14, pp. 333–437, 2008. Available: [https://doi.org/10.1016/S1572-4859\(07\)00006-X](https://doi.org/10.1016/S1572-4859(07)00006-X)
- [21] S.V. Konovalov, V.E. Gromov, Yu.F. Ivanov, *The influence of electromagnetic fields and currents on plastic deformation of metals and alloys*, Novokuznetsk: Publishing House “Inter-Kuzbass”, 2013.
- [22] A.V. Komshina, A.S. Pomel’nikova, “Promising method of low-energy materials processing using a magnetic field”, *Science & Education. Bauman Moscow State Technical University*, Issue 9, 2012. Available: <https://doi.org/10.7463/0912.0454270>.
- [23] M.A. Vasiliev, “Features of Plastic Deformation of Metals and Alloys in a Magnetic Field. The Review”, *Usp. Fiz. Met.*, vol. 8, pp. 65–105, 2007. Available: <https://doi.org/10.15407/ufm.08.01.065>
- [24] D.S. Kamenetskaya, I.B. Piletskaya, V.I. Shiryaev, “On the influence of a magnetic field on the plastic deformation of iron”, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 199, no. 6: 1289, 1971.
- [25] D.S. Kamenetskaya, I.B. Piletskaya, V.I. Shiryaev, *Physics of Metals and Metallography*, 35, no. 2: 318, 1973.
- [26] A. Balevski, T. Kortenski, I. Tsankov et al., *Mechanical Engineering*, no. 12: 16, 1963.
- [27] T.V. Efimova, V.V. Polotnyuk, *Ukr. J. Phys.*, 26, no 7: 1149, 1981.
- [28] P.A. Alexandrov, V.V. Budaragin, M.N. Shakhov, N.I. Nikanorova, E.S. Trofimchuk, “Mechanical properties of some materials in a magnetic field”, *Questions of atomic science and technology. Ser. Thermonuclear fusion*, issue. 1, pp. 24–30, 2005.
- [29] D.V. Zagulyaev, “The influence of weak magnetic fields on microhardness and creep of aluminum”, dissertation cand. tech. Sci. Novokuznetsk, 2011.
- [30] V.V. Sorokin, et al. “Experimental study of the magnetic field enhanced Payne effect in magnetorheological elastomers”, *Soft Matter*, vol. 10, pp. 8765–8776, 2014.
- [31] I. Nkurikiyimfura, Y. Wang, Z. Pan, “Effect of chain-like magnetite nanoparticle aggregates on thermal conductivity of magnetic nanofluid in magnetic field”, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, vol. 44, pp. 607–612, 2013. Available: <https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2012.08.024>
- [32] W.S. Yip, S. To, “Control of the ductile and brittle behavior of titanium alloys in diamond cutting by applying a magnetic field”, *Sci Rep*, vol. 9, 4056, 2019. Available: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-40702-7>
- [33] G.R. Li, J.F. Cheng, H.M. Wang, P.S. Li, C.Q. Li, “Influence of a high pulsed magnetic field on the tensile properties and phase transition of 7055 aluminum alloy”, *Mater. Res. Express*, 3, 106507, 2016. Available: <https://doi.org/10.1088/2053-1591/3/10/106507>
- [34] G.R. Li, F.F. Wang, H.M. Wang, R. Zheng, F. Xue, J.F. Cheng, “Influence of high pulsed magnetic field on tensile properties of TC4 alloy”, *Chinese Physics B*, vol. 26, no. 4, 2017.
- [35] M.V. Kraiev, V.S. Kraieva, “The influence of a constant magnetic field on the resistance to deformation and hardening of metals”, *60th International Scientific Conference “Current Problems of Strength”*, Vitebsk, Belarus, 2018, pp. 93–95.

- [36] M.F. Ashby and K.L. Johnson, "On the generation of dislocations at misfitting particles in a ductile matrix", *Phil. Mag. A*, 20, pp. 1009–1022, 2006.
- [37] M. Kraiev, E. Voronkov, V. Kraieva, «Calculation of energy and magnetic susceptibility of Fe atomic system during dislocation motion in magnetic field», *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, vol. 17, no. 6, pp. 1183–1192, 2021. Available: <https://doi.org/10.1108/MMMS-02-2021-0026>.

Ч. Донг, Д. Чанг, Л. Чанг, М.В. Краєв, В.М. Гейчук

ПРИЧИНИ І ЗАКОНОМІРНОСТІ ВПЛИВУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ НА МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І СТРУКТУРУ МЕТАЛІВ, ЩО ДЕФОРМУЮТЬСЯ

Проблематика. Міцність металів сильно обмежує можливість одержання виробів з використанням пластичної деформації. Електромагнітна природа процесів структуроутворення та пластичної деформації дала основу для застосування додаткового впливу магнітного поля. Накопичено досить великий обсяг дослідницького матеріалу з тематики додаткового впливу магнітного поля на феро-, діа- та парамагнітні метали. Дослідження останніх років мають прикладний характер вивчення магнітопластичності технічних сплавів. Їхнє узагальнення дозволить перейти від лабораторних досліджень до розробки обладнання та технологій комбінованої обробки тиском металевих виробів у слабкому магнітному полі.

Мета дослідження. Узагальнення й аналіз результатів лабораторних і теоретичних досліджень додаткового застосування магнітного поля у процесах механічних випробувань металів та сплавів.

Методика реалізації. Літературний огляд матеріалів статей, монографій, дисертаційних робіт.

Результати дослідження. Обґрунтовано застосування магнітного поля для пластичної деформації металів. Виконано пояснення механізму впливу магнітного поля на структурні елементи металів на основі ефекту магнітопластичності. Наведено опис зміни механічних властивостей металів і сплавів під додатковим впливом магнітного поля.

Висновки. Явище магнітопластичності досліджено для широкого кола матеріалів, таких як чисті метали та їх сплави, у тому числі промислові сталі та сплави. Встановлено різні види позитивного впливу магнітного поля на механічні властивості металів: зниження межі плинності та опору деформації, збільшення відносного подовження, релаксація внутрішніх напружень, зниження щільності дислокацій. Також існує і зворотний, негативний ефект впливу магнітного поля: збільшена швидкість зміцнення, крихка, збільшена повзучість металів. Яким буде вплив магнітного поля на конкретний метал, не можна гарантувати з високою точністю.

Ключові слова: Магнітне поле; магнітопластичність; механічні властивості; напруження; дислокація.

Рекомендована Радою
НН механіко-машинобудівного інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
20 листопада 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-4.304818

УДК 621.73.043

В. В. Піманов^{1*}, М. В. Орлюк¹, А. М. Гончар¹, С. В. Ситник¹¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: pimanov@ukr.net

АНАЛІЗ ТЕХНОЛОГІЇ ВИГОТОВЛЕННЯ НАПІВФАБРИКАТУ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОЇ ДЕТАЛІ СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЇ ГАРЯЧОГО ОБ'ЄМНОГО ШТАМПУВАННЯ

Проблематика. Нині актуальними питаннями у виробництві виробів з металів є економія матеріалів та продуктивність виробництва, оскільки це досить суттєво впливає на собівартість готових виробів. Особливо це пов'язано з порожнистими виробами складної геометричної форми. До таких виробів належать деталі або напівфабрикати, які мають глухі порожнини та додаткові елементи в конструкції у вигляді фланців, або змінну товщину стінки за висотою виробу. Такі деталі широко розповсюджені в машинобудуванні, авіабудуванні та у виробництві виробів спеціального призначення, зокрема у галузі виготовлення боеприпасів. Тому технологія виготовлення таких деталей повинна забезпечити масове виробництво і мати економічний ефект.

Мета. Розрахунковим шляхом за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) у програмному середовищі DEFORM визначити варіант штампування, із заготовок різного діаметра, напівфабрикату порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування та проаналізувати запропонований технологічний процес отримання напівфабрикату.

Методика реалізації. Використовуючи МСЕ в програмному середовищі DEFORM проведено моделювання гарячого об'ємного штампування напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми із заготовок різного діаметра. Таким чином обрано варіант отримання напівфабрикату із мінімальною кількістю переходів і гарантованою можливістю реалізації технологічного процесу формоутворення. Для обраного варіанта проведено аналіз силових режимів формоутворення, нормальних напружень на контактних поверхнях заготовки з інструментом та напружено-деформованого стану деформованого металу.

Результат. Запропоновано технологію виготовлення напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування. Така технологія буде впроваджена у виробництві деталі «Корпус-перехідник», який використовується в конструкції міни калібром 120 мм. Розрахунковим шляхом за допомогою МСЕ в програмному середовищі DEFORM визначено варіант формоутворення напівфабрикату для деталі «Корпус-перехідник» з використанням технології гарячого об'ємного штампування та проведено аналіз технологічної операції формоутворення напівфабрикату. Визначено температурний режим процесу, технологічні зусилля, параметри напружено-деформованого стану деформованого матеріалу, розподіл нормальних напружень на деформуючому інструменті. Результати проведеного комп'ютерного моделювання дають змогу врахувати конструктивні особливості та підібрати необхідне технологічне обладнання для масового виробництва.

Висновки. Розроблено та обґрунтовано технологію для серійного виготовлення напівфабрикату гарячим об'ємним штампуванням. Така технологія дозволила підвищити коефіцієнт використання матеріалу у два рази порівняно з технологією отримання деталі механічною обробкою з сортового прокату.

Ключові слова: метод скінченних елементів, боеприпас, штампування, гаряче зворотне видавлювання, зусилля, напруження, деформації, температура, критерій руйнування, коефіцієнт використання матеріалу.

Вступ

Сучасне виробництво виробів з металів потребує впровадження нових або удосконалення

наявних технологій, які спрямовані не тільки на підвищення продуктивності виробництва, але й на ефективне використання матеріалів та прогнозовану якість виробів. Щодо ефектив-

Пропозиція для цитування цієї статті: В. В. Піманов, М. В. Орлюк, А. М. Гончар, С. В. Ситник, "Аналіз технології виготовлення напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування", *Наукові вісті КПІ*, № 1–4, с. 54–61, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.304818

Offer a citation for this article: V. V. Pimanov, M. V. Orliuk, A. M. Honchar, S. V. Sytnyk, "Analysis of the technology of manufacturing a semi-finished part for a hollow part of a complex geometric form using the technology of hot volume stamping", *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 54–61, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.30481

ності використання матеріалів, слід особливо звернути увагу на отримання напівфабрикатів методами пластичного формоутворення. Такі технології ефективні у виготовленні напівфабрикатів для порожнистих деталей складної геометричної форми. До таких виробів належать деталі, або напівфабрикати, які мають глухі порожнини та додаткові елементи в конструкції у вигляді фланців, або змінну товщину стінки виробу. Такого класу деталі широко використовують у машинобудуванні, авіабудуванні, виробництві боєприпасів та в інших галузях.

Нині в Україні досить активно відновлюється та розвивається військово-промисловий комплекс, особливо виробництво боєприпасів [1].

Особливо з усієї лінійки боєприпасів, що використовуються, до критично необхідних належать і мінометні постріли. Одним з таких є мінометний боєприпас калібром 120 мм [2, 3]. За конструкцією він складається з комплектуючих деталей, які виготовляються з використанням різних технологічних процесів. Схематично конструкцію міни калібром 120 мм показано на рис. 1.

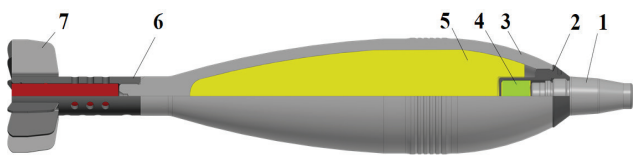


Рис. 1. Конструкція міни калібром 120 мм

Цю схему конструкції міни створено авторами статті в програмному середовищі SolidWorks. Міна складається з корпусу 3, який виготовляють з використанням технології лиття із сталі або сталючого чавуну [4]. До корпусу 3 кріпиться стабілізатор, що складається з трубки 6 та хвоста 7. Корпус 3 споряджається вибуховою речовиною 5. У корпус 3 встановлюється корпус-перехідник 2, у якому розміщується додатковий заряд 4 та підричник 1. Корпус-перехідник 2 дозволяє конструктивно розширити отвір у корпусі 3 для більш зручного його заповнення вибуховою речовиною 5.

Розроблення технології виготовлення напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування

Ескіз деталі «Корпус-перехідник», який виготовляють із конструкційної вуглецевої сталі 45 підвищеної якості зображено на рис. 2.

«Корпус-перехідник» 2 технологічно виготовляють або із застосуванням ливарних технологій, або за допомогою механічної обробки сортового прокату.

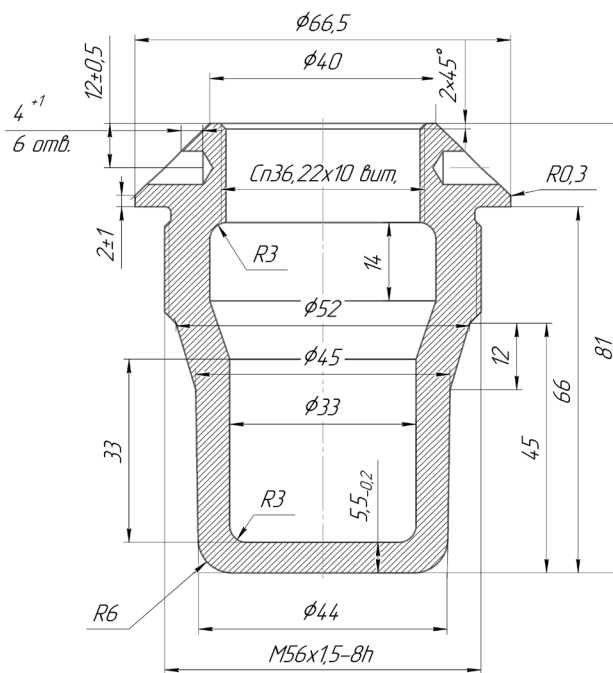


Рис. 2. Ескіз деталі «Корпус-перехідник»

Однак у процесі виготовлення напівфабрикатів методом лиття виникає великий відсоток браку [5, 6]. До того ж напівфабрикати, отримані литтям, мають низьку точність, а їх подальша механічна обробка значно ускладнюється. Так само під час виготовлення виробів за допомогою механічної обробки з суцільного прокату трапляється неефективне використання матеріалу та низька продуктивність виробництва.

Так, наприклад, під час виготовлення цього виробу (рис. 2) механічною обробкою із сортового прокату (ДСТУ 4738) із заготовки діаметром 68 мм та завдовжки 90 мм коефіцієнт використання матеріалу становитиме лише 26,5 %, що в сучасних умовах є неприпустимим.

З погляду організації серійного та масового виробництва виробів спеціального призначення доцільно під час виготовлення напівфабрикатів за можливості здійснювати до них перехід від ливарних технологій до технологій холодного або гарячого об'ємного штампування у штампах [7, 8].

Це підвищить якість та точність напівфабрикатів, а також дозволить звести до мінімуму їх наступну механічну обробку [10].

Тому для розроблення технологічного процесу виготовлення деталі «Корпус-перехідник» необхідно розробити оптимальну для масового виробництва технологію штампування напівфабрикату, яка при цьому матиме відчутний економічний ефект.

Для цього запропоновано технологію виготовлення напівфабрикату для порожнистої деталі складної геометричної форми з використанням технології гарячого об'ємного штампування для деталі «Корпус-перехідник».

Суть технології полягає у виборі варіанта конструкції штампованого напівфабрикату, який забезпечить не тільки ефективність використання матеріалу, але і дозволить реалізувати процес за мінімальну кількість технологічних переходів. Таким чином під час розроблення

технології враховується форма та розміри деталі, яку необхідно отримати, форма та розміри вихідної заготовки, спосіб отримання напівфабрикату та режими формоутворення.

Використання різних способів штампування дозволяє отримувати для нашого виробу напівфабрикати різної складності, від простих (рис. 3, а–в), для виготовлення яких є типові технології до складних (рис. 3, г), які забезпечують найвищий коефіцієнт використання матеріалу, але потребують або витратних натурних експериментів для відпрацювання багатоопераційного штампування (напівфабрикати складної форми зазвичай штампують за декілька операцій), або дослідження різних варіантів штампування за допомогою комп'ютерного моделювання.

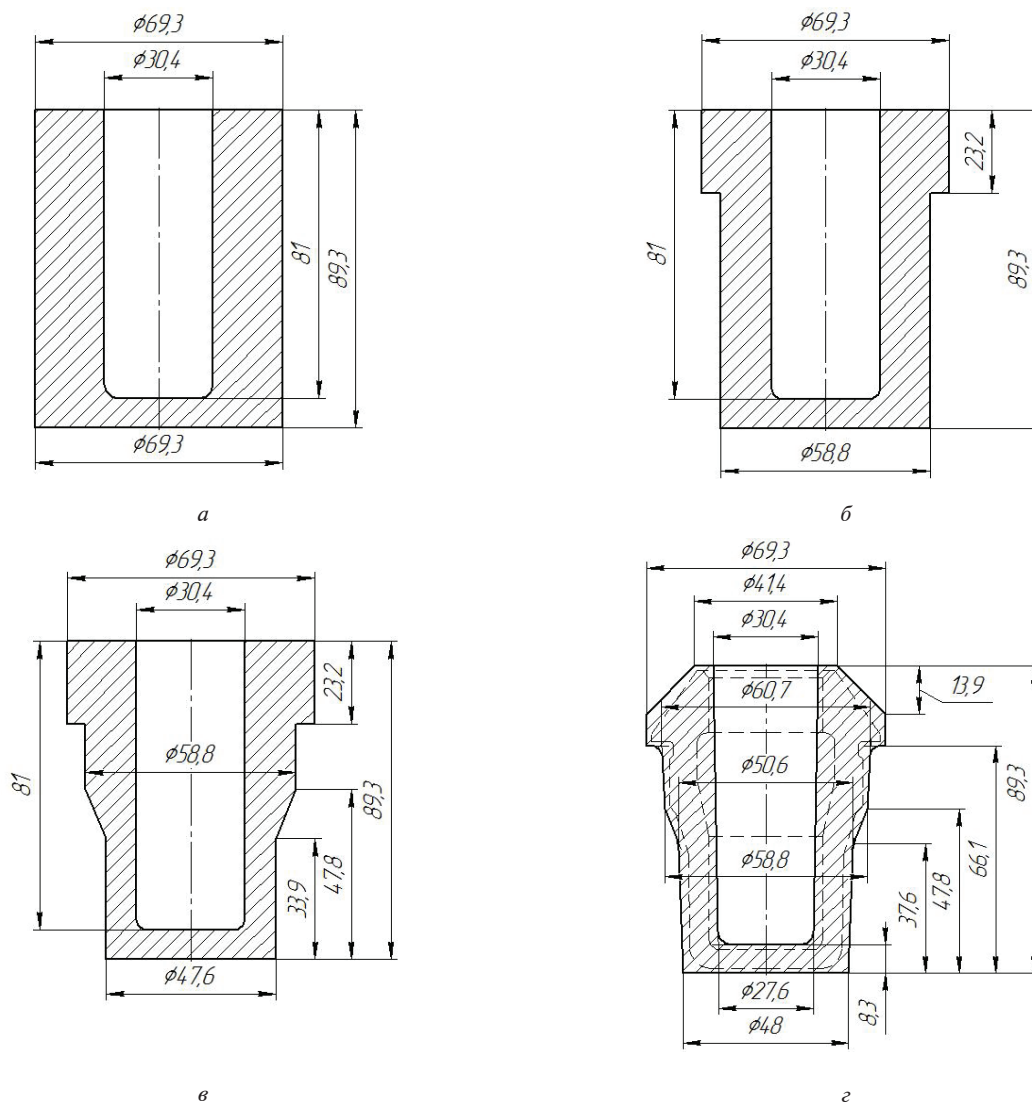


Рис. 3. Варіанти конструкцій штампованого напівфабрикату

Оскільки сталь 45 належить до матеріалів, що важко деформуються у холодному стані, то напівфабрикати з цього матеріалу зазвичай штамнуються у гарячому, рідше напівгарячому станах.

Тому в надалі під час розроблення технології отримання складного напівфабрикату (рис. 3, з) для деталі «Корпус-перехідник» використовуємо спосіб гарячого штампування. За цієї геометрії напівфабрикату (рис. 3, з) коефіцієнт використання матеріалу становитиме 53 %.

Комп'ютерне моделювання процесу гарячого об'ємного штампування напівфабрикату для деталі складної геометричної форми в програмному комплексі DEFORM 2D.

Оскільки напівфабрикат (рис. 3, з) вісесиметричний, то для проведення чисельних розрахунків застосовується метод скінченних елементів (МСЕ) у програмному комплексі DEFORM-2D [9], який забезпечує достатньо високу відповідність результатів моделювання та результатів натурних експериментів за незначних витрат часу на проведення моделювання.

Під час моделювання використовуються криві зміцнення матеріалу DIN-C45[70-2000(20-1100C)], що є аналогом сталі 45.

Температурний інтервал гарячого штампування сталі 45...750–1250 °С.

Модель матеріалу – пластична. Фактор тертя за Зібелем задано з постійною величиною 0,3, коефіцієнт контактного теплообміну – 5 Н/с/мм/С (5000 Вт/(м²ЧК)), критерій руйнування Normalized C&L.

Об'єм заготовки визначений з умови сталості об'єму за допомогою програмного забезпечення SolidWorks і становить 163448,6 мм³.

Початкова температура деформуючих інструментів (пуансона та матриці) не повинна перевищувати 400 °С, швидкість переміщення пуансона має забезпечити у процесі деформування час, за який заготовка не встигне охолонути до мінімальної температури – 750 °С (відповідно до температурного інтервалу штампування).

Основна задача моделювання – пошук варіанта штампування напівфабрикату з мінімальною кількістю формозмінних операцій.

Варіанти штампування напівфабрикату та результати моделювання формоутворення напівфабрикату для деталі «Корпус-перехідник»

Під час пошуку оптимального варіанта штампування напівфабрикату, за допомогою

МСЕ в програмному комплексі Deform було виконано низку моделювань формоутворення заготовок різних діаметрів за різними технологічними схемами.

Результати комп'ютерного моделювання показали, що оптимальним для отримання проміжного напівфабрикату під подальшу механічну обробку є спосіб гарячого зворотного видавлювання з роздачею заготовки діаметром 48 мм та завдовжки 90,4 мм (рис. 4, а).



Рис. 4. Варіанти штампування напівфабрикату виробу із заготовок різного діаметра: а – одноопераційне штампування із заготовки діаметром 48r90,4; б – одноопераційне штампування із заготовки діаметром 58r61,9; в – штампування після попереднього формування заготовки діаметром 58r61,9

Також за результатами моделювання було встановлено, що під час використання заготовки діаметром 58 мм та завдовжки 61,9 мм відштампувати напівфабрикат за подібною схемою неможливо (рис. 4, б). Як видно з рисунку в нижній частині напівфабрикату спостерігається неповне заповнення донної частини напівфабрикату, аналіз параметрів напружено-деформованого стану процесу вказує на високу ймовірність руйнування напівфабрикату у процесі деформування.

Отримати якісний напівфабрикат із заготовки діаметром 58 мм можливо лише за попереднього профілювання вихідної циліндричної заготовки (рис. 4, в)

Тому подальші дослідження були зосереджені на визначенні раціональних параметрів процесу штампування за схемою рис. 4, а.

За результатами комп'ютерного моделювання було встановлено, що у разі підігрівання пуансона та матриці до 300 °C та швидкості переміщення пуансона 100 мм/с необхідний температурний інтервал штампування витримується за температури нагрівання заготовки не менше 1100 °C. Як видно з рис. 5, а в кінці процесу деформування температура у поперечному перерізі напівфабрикату не опускається нижче 750 °C, за винятком незначної застійної зони в кутовій частині напівфабрикату, що не вплине на якість штампованого напівфабрикату.

Водночас максимальне значення критерію руйнування Normalized C&L дорівнює 0,367 (рис. 5, б) та не перевищує граничного значення [10], тобто деформування заготовки за цією схемою буде проходити без руйнування.

Розподіл інтенсивності деформацій у поперечному перерізі штампованого напівфабрикату (рис. 5, в) свідчить про ретельне пропрацювання структури вихідної заготовки. Однак найбільше пропрацювання спостерігається на внутрішній поверхні напівфабрикату (з боку пуансона). Тут інтенсивність деформацій коливається в межах 2...7 одиниць, а таке інтенсивне деформування може призводити до значного додаткового нагрівання пуансона і конструкція штампу потребуватиме додаткового охолодження пуансона.

Питомі зусилля на деформуючих поверхнях пуансона та матриці (рис. 5, г) не перевищують 1000 МПа, що може свідчити про високу стійкість інструмента у процесі деформування, при цьому в радіальному напрямку на поверхні матриці діють питомі зусилля в межах 450...650 МПа, що вказує на можливість використання однобандажованої матриці.

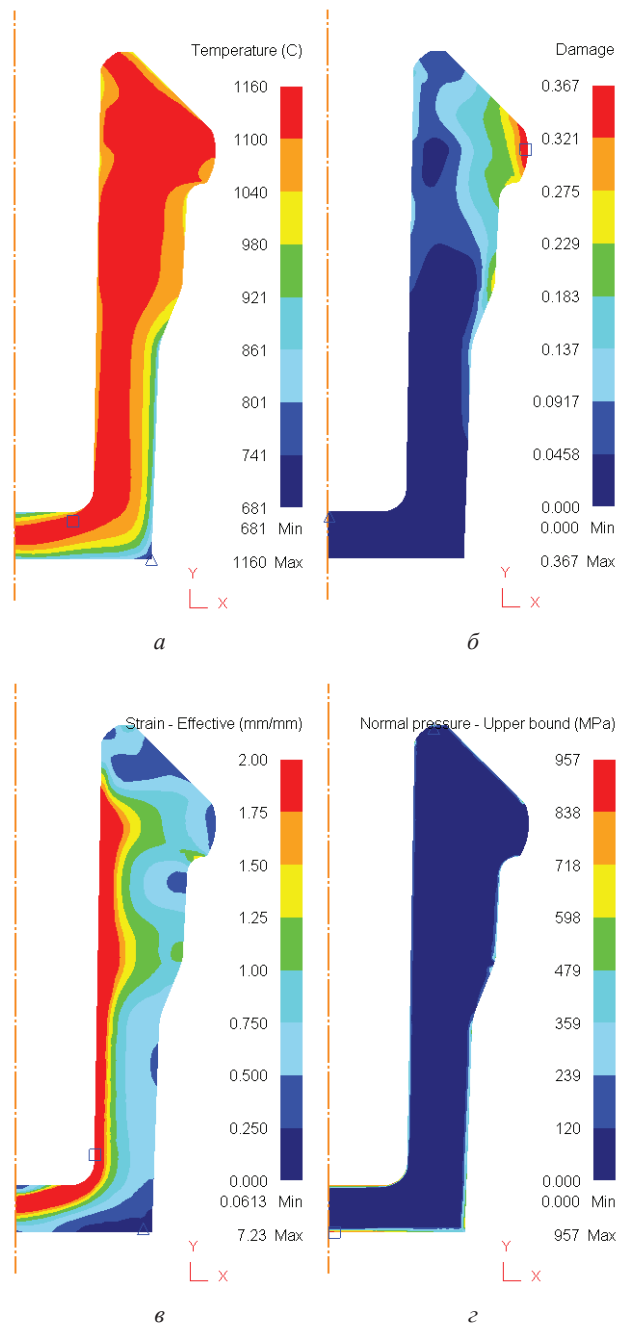


Рис. 5. Результати моделювання процесу деформування: а – розподіл температур; б – розподіл значень критерію руйнування Normalized C&L; в – розподіл інтенсивності деформацій; г – розподіл питомих зусиль на деформуючих поверхнях інструмента

Максимальне технологічне зусилля за результатами моделювання (рис. б) становить приблизно 1300 кН (136 тс), тобто запропонований процес може бути реалізований на наявному технологічному обладнанні.

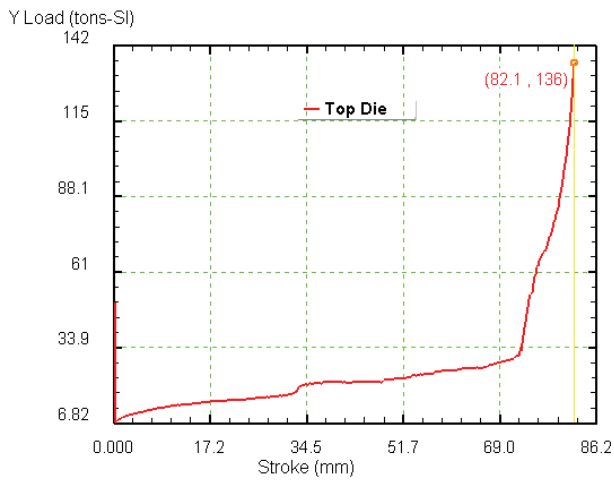


Рис. 6. Графік зміни технологічного зусилля

Конструювання принципової схеми штампу для виготовлення напівфабрикату для деталі «Корпус-перехідник»

Для реалізації процесу формоутворення напівфабрикату за допомогою гарячого об'ємного штампування було розроблено конструкцію штампу. Принципову схему штампа зображено на рис. 7.

Для ефективного видалення відштампованого напівфабрикату із зони штампування у штампі передбачено виштовхувач 22 та знімач оригінальної конструкції, який складається з матриці верхньої 4, тримача верхнього 5, який кріпиться гвинтом 6 до плити рухомої 7.

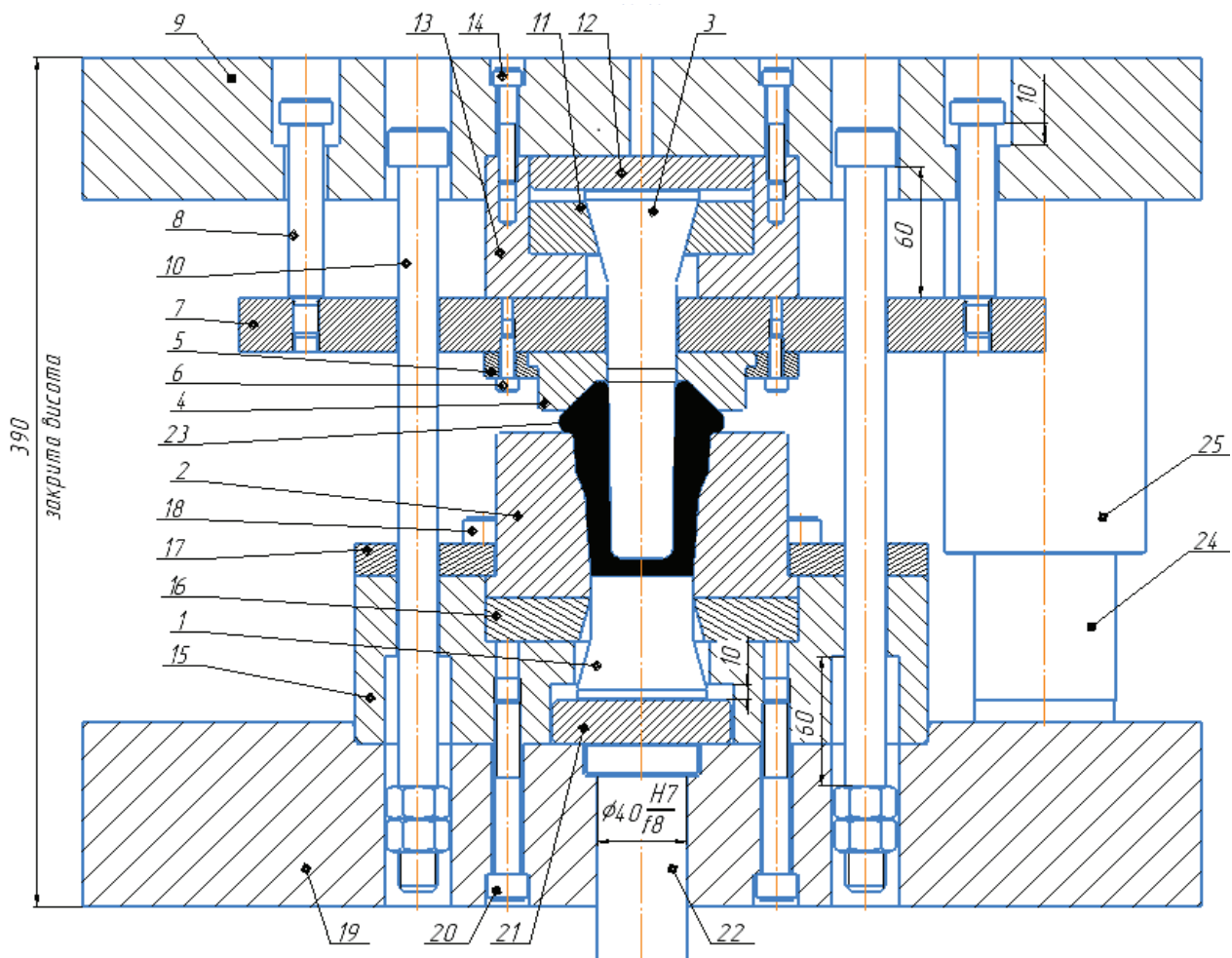


Рис. 7. Принципова схема штампу: 1 – виштовхувач; 2 – матриця; 3 – пуансон; 4 – матриця верхня; 5 – тримач верхній; 6 – гвинт; 7 – плита рухома; 8 – гвинт упорний; 9 – плита верхня; 10 – тяга; 11 – шайба опорна; 12 – плита підкладна; 13 – пуансонотримач; 14 – гвинт; 15 – обойма; 16 – опорна плита нижня; 17 – тримач матриці; 18 – гвинт; 19 – плита нижня; 20 – гвинт; 21 – опора; 22 – виштовхувач; 23 – напівфабрикат; 24 – колонка направляюча; 25 – втулка направляюча

Висновки

Результати досліджень, отримані під час пошуку оптимального варіанта гарячого штампування напівфабрикату для деталі «Корпус-перехідник», свідчать про те, що оптимальною з погляду мінімізації кількості штампувальних операцій під час виготовлення напівфабрикатів подібного типу є схема гарячого зворотного видавлювання з роздачею.

Запропонована в роботі схема штампу, порівняно з іншими можливими, дозволяє під час використання заготовки з розмірами діаметром 48–90,4 мм отримати задану геометрію напівфабрикату для деталі «Корпус-перехідник» за одну формозмінну операцію.

За результатами комп'ютерного моделювання з використанням МСЕ за певних початкових параметрів процесу (фактор тертя за Зібелем – 0,3, коефіцієнт контактного теплообміну – 5 Н/с/мм/С, підігрівання інструмента – 300 °С) були встановлені інші необхідні для реалізації процесу штампування технологічні параметри, такі як початкова температура нагрівання вихідної заготовки – 1100 °С та швидкість переміщення пуансона 100 мм/с, за яких температура напівфабрикату в кінці процесу не опускається нижче нижньої границі температурного інтервалу (750 °С) для сталі 45. Зрозуміло, що зміна будь-якого параметра процесу штампування потребуватиме додаткової оптимізації інших параметрів процесу.

Також за результатами комп'ютерного моделювання для відповідних вихідних параметрів процесу були встановлені енергосилові параметри процесу та параметри напружено-деформованого стану в напівфабрикаті у процесі штампування.

Так, максимальне зусилля штампування для запропонованих початкових умов становить 1300 кН (136 тс), а питомі зусилля на деформуючих поверхнях пуансона та матриці не перевищують 1000 МПа.

Отримані результати свідчать про те, що цей процес не потребує специфічних умов та може бути реалізований на наявному технологічному оснащенні зусиллям 1600 кН (або більшим). Під час розрахованих питомих зусиль у 1000 МПа прогнозована стійкість штампового оснащення буде достатньою для серійного та масового виробництва. Водночас максимальне значення критерію руйнування Normalized C&L за результатами моделювання дорівнює 0,367, що дозволяє з високою ймовірністю прогнозувати відсутність браку, пов'язаного з руйнуванням матеріалу у процесі штампування.

Збільшення коефіцієнта використання матеріалу під час штампування за запропонованою схемою (до 53 % порівняно з 26,5 % за механічної обробки із сортового прокату) свідчить про суттєву економічну ефективність запропонованої технології.

Reference

- [1] “European arms hub”. How Ukraine is increasing the production of weapons. Available: <https://www.unian.ua/weapons/yak-ukrajina-naroshchuye-virobnictvo-vlasnoji-zbroji-12409137.html/> (29.09.2023).
- [2] New 120-mm mines, the production of which was announced in February, “lit up” in Ukraine. Available: https://defence-ua.com/news/v_ukrajini_zasvitilisja_novi_120_mm_mini_pro_virobnitstvo_jakih_bulo_ogolosheno_v_ljutomu-11307.html (16.04.2023).
- [3] Construction and operation of the 120-mm mortar 2C12: Training manual / O.M. Droban, S.V. Bondarenko, B.S. Fedor [and others]. – Lviv: ASV, 2012. – 184 p.
- [4] Khrychikov V.E., Menyaylo O.V. Foundry production of ferrous and non-ferrous metals: Education. manual. – The second edition, revised. – Dnipropetrovsk: NMetAU, 2015. – 89 p.
- [5] Fedorov G.E., Yamshinskyi M.M., Fesenko A.M., Fesenko M.A. Product quality control in mechanical engineering. – Kramatorsk: DDMA, 2008. – 332 p.
- [6] J.K. Hatsu, A.K. Sunnu, G.K. Ayetor, G. Takyi, Investigation of shell mold casting technique in Ghana using indigenous materials, *Scientific African* (2021), doi: 10.1016/j.sciaf.2021.e01052.
- [7] Orlyuk, M., Pimanov, V., Zhukov, V. (2021). Cold stamping of a 40x53 mm grenade launcher shell blank. *Mechanics and Advanced Technologies*, 5(3), 359–365. doi: 10.20535/2521-1943.2021.5.3.248054.
- [8] V.L. Kalyuzhny. The use of cold stamping to obtain a hollow product with the necessary properties of deformed metal / V.L. Kalyuzhny, A.S. Tsybenko, Y.O. Chuvilov, E.O. Chuvilov // *Bulletin of the National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”*. Series: Mechanical engineering. – 2015. – No. 1. – P. 124–130.
- [9] “Computer technologies for designing processes and machines”: laboratory workshop [Electronic resource]: study guide for students studying in educational programs: Applied mechanics of materials, Technology of production of aircraft specialty 131 “Applied mechanics” / Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute; comp.: A.D. Lavriienkov, V.V. Pimanov, V.M. Ermine. – Electronic text data (1 file, 5 Mbytes). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2021. – 138 p.

- [10] Orlyuk M.V. The limit values of the criteria of destruction in the simulation of the extraction processes in the DEFORM medium // Processing of materials by pressure: collection of scientific papers. – Kramatorsk: DSMA, 2017. – No. 2(45). – P. 22–29. – Access mode: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27990>, [http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2\(45\)_2017/article/6.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2(45)_2017/article/6.pdf).

V. V. Pimanov, M. V. Orliuk, A. M. Honchar, S. V. Sytnyk

ANALYSIS OF THE TECHNOLOGY OF MANUFACTURING A SEMI-FINISHED PART FOR A HOLLOW PART OF A COMPLEX GEOMETRIC FORM USING THE TECHNOLOGY OF HOT VOLUME STAMPING

Background. Today, the actual issues in the production of metal products are the saving of materials and the productivity of production, as this has a significant impact on the cost of finished products. This especially applies to hollow products with a complex geometric shape. Such products include parts or semi-finished products that have hollow cavities and additional elements in the design in the form of flanges, or variable wall thickness along the height of the product. Such parts are widely distributed in mechanical engineering, aircraft construction and in the production of special purpose products, in particular in the field of ammunition production. Therefore, the manufacturing technology of such parts should ensure mass production and have an economic effect.

Objective. By calculation, using the finite element method (FEM) in the DEFORM software environment, determine the option of stamping, from blanks of different diameters, a semi-finished product of a hollow part of a complex geometric shape using the technology of hot three-dimensional stamping, and analyze the proposed technological process of obtaining a semi-finished product.

Methods. Using MSE in the DEFORM software environment, simulation of hot three-dimensional stamping of a semi-finished product was carried out for a hollow part of a complex geometric shape made of blanks of different diameters. In this way, the option of obtaining a semi-finished product with a minimum number of transitions and a guaranteed possibility of implementing the technological process of mold formation was chosen. For the selected option, an analysis of the force modes of forming, normal stresses on the contact surfaces of the workpiece with the tool, and the stress-strain state of the deformed metal was performed.

Results. A semi-finished product manufacturing technology for a hollow part of a complex geometric shape using hot three-dimensional stamping technology is proposed. This technology will be implemented in the production of the adapter housing part, which is used in the design of the 120 mm mine. By calculation, with the help of MSE in the DEFORM software environment, the variant of semi-finished product molding for the "Body-adapter" part was determined using the technology of hot three-dimensional stamping, and an analysis of the technological operation of semi-finished product molding was carried out. The temperature regime of the process, technological efforts, parameters of the stress-strain state of the deformed material, the distribution of normal stresses on the deforming tool are determined. The results of the conducted computer modeling make it possible to take into account the design features and select the necessary technological equipment for mass production.

Conclusions. The technology for serial production of semi-finished products by hot volumetric stamping has been developed and substantiated. This technology made it possible to increase the rate of material utilization by two times compared to the technology of obtaining a part by mechanical processing from graded rolled steel.

Keywords: finite element method, ammunition, stamping, hot back extrusion, forces, stresses, strains, temperature, failure criterion, material utilization factor

Рекомендована Радою
НН механіко машинобудівного інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
9 вересня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-2.263225

УДК 004.6

Бондарчук Максим Юрійович*, Тесленко Олександр Кирилович¹¹Факультет прикладної математики, Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

*Відповідальний автор: bondarchuk.m.y@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ПІДСТАНОВКИ ДОВІЛЬНОЇ РОЗРЯДНОСТІ У КРИПТОГРАФІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ

Проблематика. Криптографічні перетворення завжди викликали інтерес освіченої частини людства і є невід'ємною частиною сучасних комунікацій. Є різні криптографічні алгоритми для різних задач з різними вимогами. Функції підстановок є корисними для випадків, коли швидкість перетворень є важливішою за теоретичну секретність. Апаратна реалізація таких підстановок є доволі простою.

Мета дослідження. Оглянути модель, комбінаційні схеми для апаратної реалізації та алгоритм програмної реалізації функції підстановки. Дослідити алгоритми атак і підбору досліджуваної функції підстановки.

Методика реалізації. Описано алгоритми криптографічних перетворень та їх криптоаналіз для бієктивних підстановок, реалізованих за допомогою регулярних комбінаційних структур лінійної складності. Запропонована функція забезпечує швидкість перетворень даних до гігабіт на секунду. Уточнюється алгоритм формування елементів регулярних структур підстановки, об'єми відкритих та секретних даних. Розглянуто формати даних, методи їх передачі та апаратна реалізація одного з методів. Описано види атак та алгоритми підбору схем елементів регулярної структури підстановки з експериментальним обчисленням кількості необхідних операцій. Розроблено програмну реалізацію запропонованих алгоритмів для обчислення результатів.

Результати дослідження. Отримано числові результати кількості ключів, об'єму необхідної пам'яті для апаратної реалізації та кількості необхідних операцій для проведення криптоаналізу досліджуваної підстановки.

Висновки. Результати показують, що запропонована функція підстановки має достатній рівень захисту від атак трьох типів, маючи при цьому велику швидкість шифрування та розшифрування і нескладні апаратні вимоги.

Ключові слова: комбінаційні структури; криптоаналіз; функції підстановок; цифрові автомати.

Вступ

Криптографічні алгоритми використовувалися протягом багатьох століть для захисту таємниць та достовірності дипломатичного та політичного листування, військових комунікацій тощо. Більшість історичних криптографічних схем можна розглядати як схеми шифрування. Вони перетворюють повідомлення у криптограму за допомогою інверсної операції, яка залежить від секретного ключа. Дешифрування відносно просте для тих, хто володіє ключем і вважається неможливим (або дуже складним) для тих, хто не володіє ключем. Однак часто перехоплені повідомлення фактично можуть бути реконструйовані з криптограми криптоаналітиком без попереднього знання секретного ключа.

Це називають криптоаналізом. Безпечна обробка інформації за допомогою криптографії стає все більш важливою.

За умови обмеженої розрядності вхідних даних програмні та апаратні реалізації прямих та обернених підстановок прості. Підстановки забезпечують бієктивне відображення і широко використовуються в алгоритмах криптографічних перетворень. Однак складність реалізації підстановок загалом пропорційна експоненті від кількості розрядів вхідних даних. Тому в алгоритмах розповсюджених криптографічних перетворень використовуються підстановки малих розрядів – здебільшого 8- або 4-розрядні [1], [2], [3].

Одним із можливих напрямів спрощення реалізації підстановок є використання структур

Пропозиція для цитування цієї статті: М. Ю. Бондарчук, О. К. Тесленко, “Дослідження лінійної функції підстановки довільної розрядності у криптографічних перетвореннях”, *Наукові вісті КНУ*, № 1–4, с. 62–70, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.263225

Offer a citation for this article: M. Bondarchuk, O. Teslenko, “Use of implementations of arbitrary bitness permutations for cryptographic transformations”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 62–70, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.263225

лінійної складності від кількості розрядів вхідних даних. До таких структур належать одновимірні каскади конструктивних модулів (ОККМ). Такі структури можуть бути реалізовані як програмно, так і апаратно. Під час апаратної реалізації ОККМ є комбінаційними схемами, що розширюють можливості підвищення швидкості перетворень. Уперше структури такого класу розглядалися в [4].

Під час апаратної реалізації конструктивний модуль (КМ) має дві комбінаційні схеми. Перша з них (f_o) формує значення з множини вихідних символів Y на первинних виходах КМ, друга (f_s) формує значення із множини станів S на бокових виходах КМ.

Принцип роботи полягає в тому, що структурі ОККМ, яка складається із r конструктивних модулів подається вхідне значення розрядністю $r|X|$, а на виході формується значення розрядністю $r|Y|$. За $X = Y$ ОККМ може реалізувати підстановку на множині $X_r = X \times X \times \dots \times X$ ($r \rightarrow \infty$).

У [5] показано, що на найпростіших ОККМ ($|X| = |S| = 2$) можна реалізувати 48 різних підстановок будь-якої розрядності. Різні підстановки отримуються вибором булевих функцій від двох змінних f_o, f_s та початкового значення s_0 , яке надходить на боковий вхід першого КМ.

У [6] було звернуто увагу на те, що функціонування апаратно реалізованого ОККМ тожко функціонуванню відповідного цифрового автомата Мілі за будь-яких скінченних множин X, Y та S . Такий автомат має функцію переходів $f_s(x, s) : S \times X \rightarrow S$, функцію виходів $f_o(x, s) : S \times X \rightarrow Y$ і початковий стан $s_0 \in S$. Автомат реалізує відображення $X_r \rightarrow Y_r$ ($r \rightarrow \infty$). Це дозволяє використовувати властивості цифрових автоматів для визначення можливостей реалізації підстановок на множині X_r . Згідно з [7] автоматне відображення $X_r \rightarrow Y_r$ бієктивне тоді і тільки тоді, коли автомат не містить станів з втратами, які досягаються з початкового стану s_0 за r кроків. Станом з втратами називають стан s_l такий, для якого існують $x_1, x_2 \in X$, де $x_1 \neq x_2$ і $f_o(s_l, x_1) = f_o(s_l, x_2)$ [7]. Фактично це означає, що за будь-якого конкретного $s_0 \in S$ дочірня функція $f_o(s_a, X)$ є підстановкою на множині X . Це є достатньою умовою для апаратної або програмної реалізації на основі ОККМ підстановок довільної розрядності. Як показано експериментально [6], реалізація багаторозрядних підстановок на ОККМ не потребує значних витрат і різниться великою швидкістю перетворень. Теоретично швидкість формування такого

відображення може складати гігабіти на секунду. Виникає запитання, яким чином використати ці переваги в швидкості для криптографічних перетворень та оцінити криптостійкість таких використань.

Постановка задачі

Дослідити використання функції підстановки довільної розрядності, запропонованої в [6], для криптографічних перетворень, дослідити захищеність від різних можливих атак на ключ.

Визначення можливих алгоритмів криптографічних перетворень на багаторозрядних підстановках

Бієктивне відображення множини вхідних послідовностей будь-якої довжини у множину вихідних послідовностей тієї ж самої довжини можна розглядати як криптографічне перетворення. Алгоритм шифрування досить простий. Мовою C# базовий алгоритм шифрування може бути поданий таким чином:

```
var outputs = new List<int>();
for (int i = 0; i < r; i++)
{
    outputs
    .Add(OutputMatrix[state][input[i]]);
    state = StateMatrix[state][input[i]];
}
return outputs;
```

Відкритими даними є сам алгоритм, кількість елементів n у вхідному алфавіті, кількість m в алфавіті станів – розміри *OutputMatrix* та *StateMatrix* відповідно ($m \times n$ кожна).

Ключовою (секретною) інформацією в таких криптографічних перетвореннях є функції виходів та переходів автомата. Окремого розгляду потребує значення початкового стану.

Для забезпечення максимальної швидкості реалізації бієктивних відображень доцільно кількість n елементів вхідного і вихідного алфавітів цифрового автомата вибирати із ряду степенів двійки: $2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}$ і т. д.

За деяких конкретних m та n алгоритм легко реалізується на Асемблері. Наприклад, за $m = n = 256$, на процесорах 80x86 Intel Corporation [8] у 32-розрядному режимі реалізація базового алгоритму може виконуватись з граничною швидкістю – 4 команди на байт повідомлення.

```

MOV CL,State
@10:
;block 1
MOV BH,inputs[esi]
MOV AL,OutputMatrix[ebx+ecx]
;block2
MOV Outputs[edi],AL
MOV CL,StateMatrix[ebx+ecx]
;block3
INC EDI
INC ESI

```

```

CMP ESI,Input_End
JB @10

```

Дійсно, команди, позначені у блоках, можуть виконуватись одночасно.

За не дуже великих m та n алгоритм можна реалізувати апаратно на сучасних програмованих логічних інтегральних схемах (ПЛІС). Наприклад, за $m = n = 256$, для реалізації комбінаційних схем одного КМ знадобиться 8 булевих функцій від 8 змінних, тобто 32 таблиць пошуку (англ. look up table або LUT) ПЛІС Virtex 6 (Virtex 7) або Spartan 6 (Spartan 7) [9]. У конкретних випадках кількість LUT на один КМ може бути зменшеною під час використання спільної декомпозиції булевих функцій [4]. Секретною інформацією є біт-потік для налаштування ПЛІС.

У цій роботі розглянуто структури ОККМ, що подані на рис. 1.

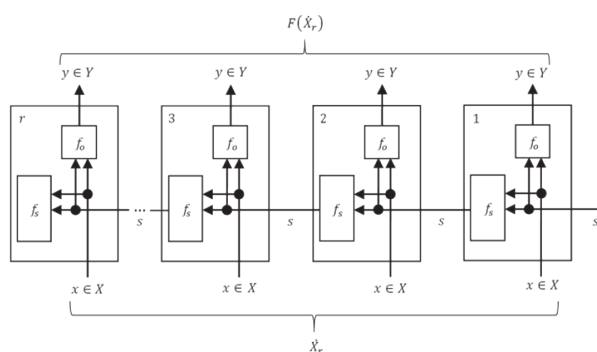


Рис. 1. Однонаправлений ОККМ [6]

У базовому криптографічному перетворенні алгоритми шифрування і розшифрування однакові. Різниця полягає лише в реалізації функцій переходів та виходів КМ. Фактично ключі шифрування та розшифрування різні. В [6] показано, як на основі функцій КМ прямого перетворення формуються функції виходів і переходів

КМ оберненого перетворення. Алгоритми формування функцій оберненого КМ прості, тобто вони не потребують значних обсягів обчислень. Це не дає можливості використання базового алгоритму для криптографічних перетворень з відкритим ключем.

Алгоритм генерування таблиці виходів автомата залишається без змін, порівняно з [6]. Алгоритм генерування таблиці переходів (зв'язаний пронумерований однонаправлений граф — це граф, з будь-якої вершини якого можна потрапити до всіх його інших вершин) складається з таких кроків:

1. Згенерувати n шляхів завдовжки в одну вершину s_0 — перший символ алфавіту станів S , занести їх до масиву P . Під шляхом матимемо на увазі послідовність вершин графа, що відповідає таблиці переходів, яка генерується, наприклад $\{s_0, s_3, s_2\}$.

2. Для кожного рядка таблиці переходів (всього m , поточний — i):

- a) для кожного символу вхідного алфавіту X (всього n , поточний — j):

- i) згенерувати довільний стан S за допомогою генератора псевдовипадкових чисел;
- ii) додати до всіх шляхів масиву P , які закінчуються на i (тобто поточний рядок таблиці переходів, який ми генеруємо) згенерований стан S .

3. Якщо масив P не містить хоча б один шлях, довжина унікальних елементів якого дорівнює m , а його перша вершина дорівнює останній, то повернутись до кроку 1.

Пропонуються такі методи встановлення початкового стану:

А. По відкритому каналу, разом з шифrogramою передається вектор ініціалізації, який містить будь-які випадкові значення із множин X та S . Приймаюча сторона по функції станів та вектору ініціалізації створює значення початкового стану.

В. Початкові стани є частиною секретного ключа і вони кожного разу автоматично використовуються в криптографічних перетвореннях під час кожного сеансу зв'язку.

С. Початкові стани не є частиною секретного ключа. Під час кожного запуску додатка шифрування початковий стан зі сторони джерела даних вибирається випадковим чином. Для пересилання приймачу відповідного початкового стану використовується той чи інший криптографічний протокол на основі асиметричних криптографічних перетворень з відкритим ключем.

Д. Початкові стани не є частиною секретного ключа. Ті чи інші початкові стани установлюються лише за умови організації зв'язку. Надалі як початкові стани використовуються поточні стани автоматів.

Кількісні характеристики базового алгоритму – це кількість ключів та об'єми таблиць (матриць). Кількість ключів визначається як добуток кількості різних матриць виходів, кількості різних матриць переходів та, в методі В, – кількості початкових станів.

Кількість різних матриць виходів – це кількість розміщень із $n!$ до m . Кількість різних матриць переходів – це кількість зв'язних орієнтованих графів.

Кількість зв'язаних пронумерованих графів (послідовність цілих чисел A001187 [10]) обчислюється за рекурентною формулою [11]:

$$C_m = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-2}{k-1} (2^k - 1) C_k C_{m-k} \quad (C_0 = 1; C_1 = 1). \quad (1)$$

З урахуванням кількості можливих підстановок у [6] та (1), кількість ключів для силової атаки апроксимується як

$$\frac{C_m m (n!)!}{(n! - m)!} \leq O(n, m) \leq \frac{m^{nm+1} (n!)!}{(n! - m)!}. \quad (2)$$

Об'єми необхідної пам'яті для таблиць КМ показано в табл. 1.

Наближені межі кількості ключів для деяких значень параметрів конструктивних модулів показано в табл. 2.

Оскільки формула (2) вимагає довгої арифметики для обчислень граничних значень, то наведені значення нижньої оцінки дещо занижені (мінімальна кількість біт, щоб описати отримане десяткове число довгої арифметики мінус один), а верхньої оцінки – дещо завищені (мінімальна кількість біт, щоб описати отримане десяткове число довгої арифметики).

Таблиця 1. Об'єм необхідної пам'яті для деяких значень таблиць КМ

n	d , біт	m	w , біт	Q , байт	Q , МБ	Q , ГБ
4	2	4	2	8	0,000007868	0,000000008
8	3	8	3	48	0,000046134	0,000000045
16	4	16	4	257	0,000244617	0,000000239
256	8	256	8	131073	0,125000954	0,000122071
4096	12	4096	12	50331650	48	0,046875001

Таблиця 2. Наближені межі кількості ключів для деяких значень параметрів n та m

n ,	m ,	Нижня оцінка	Нижня оцінка, біт	Верхня оцінка	Верхня оцінка, біт
4	4	38763648	25	4,38128E+15	52
4	8	4,02E+20	68	1,95E+38	128
4	16	O(1055)	184	O(1093)	308
16	4	O(1055)	187	O(1098)	324
16	16	O(10250)	832	O(10523)	1737
16	32	O(10603)	2006	O(101185)	3935
16	64	O(101462)	4859	O(102660)	8836
32	16	O(10577)	1917	O(101199)	3982
32	32	O(101284)	4266	O(102677)	8891
32	64	O(103001)	9972	O(105936)	19717
64	32	O(102875)	9552	O(105968)	19825
64	64	O(106311)	20965	O(1013103)	43526
64	128	O(1014406)	47856	O(1028596)	94993
64	256	O(1033052)	109797	O(1062039)	206086
128	64	O(1013854)	46022	O(1028670)	95239
128	128	O(1030043)	99803	O(1062122)	206364
128	256	O(1067336)	223686	O(10133939)	444935

Закінчення табл. 2.

n ,	m ,	Нижня оцінка	Нижня оцінка, біт	Верхня оцінка	Верхня оцінка, біт
256	16	$O(1013238)$	43976	$O(1013277)$	44105
256	32	$O(1018895)$	62769	$O(1028799)$	95666
256	64	$O(1032638)$	108422	$O(1062270)$	206855
256	128	$O(1065017)$	215985	$O(10134106)$	445490
256	256	$O(10139602)$	463751	$O(10287605)$	955400

Апаратна реалізація

На відміну від програмної реалізації, коли один і той самий КМ (автомат Мілі) використовується скільки завгодно раз, в апаратній реалізації використовується регулярна апаратна структура з обмеженою кількістю КМ.

Для налаштування ПЛІС системою автоматизованого проектування і розрахунку (САПР) створюється бітовий потік, який зазвичай записують у флеш-пам'ять. Цей бітовий потік у нашому випадку і є секретним ключем. З метою захисту інтелектуальної власності бітові потоки шифрують розширеним стандартом шифрування AES [1], а в контролерах завантаження ПЛІС (наприклад, за допомогою інтерфейсу спільної групи тестів (англ. Joint Test Action Group або JTAG) [12]) бітовий потік розшифровується.

Сучасні ПЛІС мають значну але скінченну кількість LUT. Тому у цьому разі необхідно застосовувати додаткові апаратні вузли. Нехай d – кількість КМ, а D – довжина повідомлення, яке необхідно зашифрувати. За $D > d$ одночасно

можна зашифрувати лише d символів вхідного повідомлення. Таку частину будемо називати кадром, а все повідомлення розподіляється на кадри. Здебільшого останній кадр буде не заповнений. За аналогією зі стандартами блочного шифрування кадр можна доповнювати нулями. Після розшифрування з повідомлення видаляються (якщо це потрібно) останні нульові символи.

Функціональну схему для методу встановлення початкового стану В показано на рис. 2. Період тактового сигналу для регістру поточного стану має дві частини. По першій з них регістр поточного стану видає на комбінаційну схему КМ значення стану, а по другій – відбувається запис стану на виході комбінаційної схеми через мультиплексор. Мультиплексор у процесі шифрування передає в регістр поточного стану значення на виході комбінаційної схеми, а по сигналу початку шифрування – з регістру початкового стану в регістр поточного стану. Вважається, що частота даних на вході схеми менша за частоту спрацювання одного КМ комбінаційної схеми.

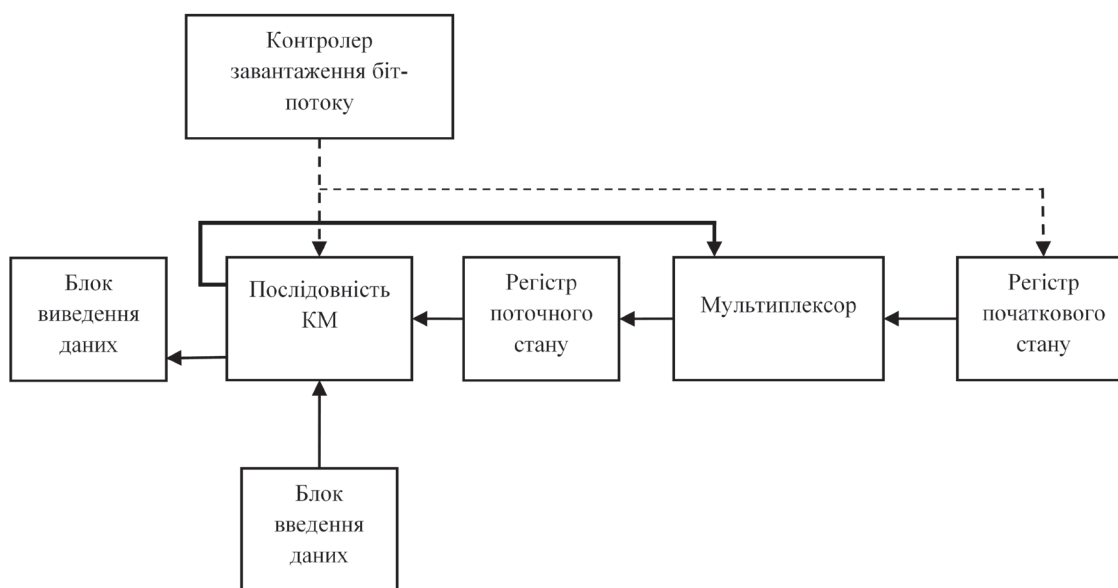


Рис. 2. Функціональна схема для методу В встановлення початкового стану

Атаки на ключ у разі відомого шифротексту

Нехай у розпорядженні криптоаналітика є криптограма $y_r \in \dot{Y}_r$.

Використаємо алгоритм, подібний на запропонований у свій час Шенноном [13] для блочних симетричних криптографічних перетворень.

Позначимо, як і раніше, \dot{X}_r множину всіх послідовностей завдовжки r із елементів вхідного алфавіту, а \dot{Y}_r – вихідного. Автомат Мілі, побудований згідно з [6] виконує бієктивне відображення множини \dot{X}_r у множину \dot{Y}_r ($\dot{X}_r \rightarrow \dot{Y}_r$).

На практиці використовують не всі послідовності множини \dot{X}_r . Позначимо $D_r \in \dot{X}_r$ множину допустимих послідовностей завдовжки r із елементів вхідного алфавіту. Позначимо $N_r = \frac{\dot{X}_r}{D_r}$. Оскільки відображення $\dot{X}_r \rightarrow \dot{Y}_r$ бієктивне, то існує множина E_r така, що $N_r \rightarrow E_r$.

За допомогою повного перебору всіх можливих ключів можна встановити множину недопустимих ключів K_e при заданому значенні r . Будь-яка перехоплена криптограма $y_r \in E_r$ дозволяє відбракувати всі ключі із множини K_e . За допомогою аналізу для $r' = 2, \dots, r$ за достатньо великого значення r теоретично можна знайти ключ, але обсяги обчислень занадто великі. Тому в розрізі цієї атаки запропоноване криптографічне перетворення є обчислювально стійким.

Атаки на основі відомого відкритого тексту та відомого відповідного шифротексту

У цьому випадку використовується алгоритм силової атаки. Оцінювання кількості ключів для силової атаки наведено в табл. 2. Згідно з таблицею, вже за $m = n = 16$ обсяги обчислень дуже значні. Тому в розрізі цієї атаки запропоноване криптографічне перетворення є обчислювально стійким, але у разі відомого відображення $x_r \rightarrow y_r$ ($x_r \in \dot{X}_r$, $y_r \in \dot{Y}_r$) завжди можна побудувати автомат для реалізації такого відображення. Питання полягає в тому, чи буде отриманий автомат еквівалентний оригінальному. Велике значення має і характер повідомлення та його довжина. Цю проблему розглянуто далі.

Атаки на основі підібраних відкритих текстів або криптограм

У запропонованій криптосистемі алгоритми шифрування та розшифрування збігаються. Різниця між ними полягає лише в заповненні таблиць виходів та переходів. Тому атаки на ос-

нові підібраних відкритих текстів не будуть різнитись від атак на основі підібраних криптограм. Можливість цих атак залежить від наповненості таблиць, тобто визначення автомата.

Проблема визначення автомата за результатами експериментів над ним активно досліджувалась і досліджується у значній кількості робіт, наприклад [14–17]. Практичною метою таких досліджень є створення мінімально можливих тестових послідовностей в умовах масового виробництва мікропроцесорних пристроїв, при цьому часто використовувався автомат-зразок, який функціонував без помилок. Важливим елементом таких досліджень є можливість встановлення для автомата одного і того самого початкового стану.

Оскільки, в нашому випадку, кожен рядок таблиці виходів автомата є унікальним, то всі алгоритми визначення автомата ґрунтуються на цій вимозі і відтворюють таблиці рядок за рядком, перевіряючи їх унікальність.

Під час оцінювання складності алгоритму визначення автомата однією операцією вважаємо подання символу вхідного алфавіту (i , відповідно, перехід автомата в новий стан та отримання символу вихідного алфавіту на виходах), скидання автомата в початковий стан та переведення автомата в заданий стан (за наявності можливості такої операції).

Алгоритм підбору 1 (а₁)

Якщо можливе переведення автомата в будь-який заданий стан, а також скидання автомата в початковий стан, то автомат можна визначити за таким алгоритмом [18].

1. Визначення таблиці виходів. Виконується прохід за всіма можливими станами (всього m , поточний – s_i). Для кожного стану виконується прохід за всіма можливими входами (всього n , індекс поточного – j) і формується один рядок r таблиці виходів: для кожної ітерації на вхід автомата подається відповідний вхідний символ x_j (n операцій для кожного стану), вихідний символ записується в рядок r зліва направо (r_j), а автомат переводиться у стан s_j (n операцій для кожного стану). Отриманий рядок r заноситься до таблиці виходів. Таким чином таблиця виходів визначається за $m \cdot 2n = 2mn$ операцій з автоматом.

2. Визначення таблиці переходів. Виконується прохід за всіма можливими станами (всього m , поточний – s_i). Для кожного стану

виконується прохід за всіма можливими входами (всього n , індекс поточного – j) і формується один рядок r таблиці станів. Для формування кожного стану r_j виконується ще один прохід (тобто n^2 операцій для кожного стану) за всіма можливими входами (всього n , індекс поточного – k) і формується рядок таблиці виходів o_j ; для кожної ітерації автомат переводиться у стан s_i (n^2 операцій для кожного стану), на вхід подається спочатку x_j (вихідний символ автомата ігнорується) (n^2 операцій для кожного стану), потім x_k (вихідний символ записується в o_{jk}) (n^2 операцій для кожного стану). Після цього r_j визначається як індекс рядка o_j у таблиці виходів. Таким чином таблиця виходів визначається за $m \cdot 3n^2 = 3mn^2$ операцій з автоматом.

Бачимо, що для цього типу автомата його можна визначити за $a_1 = 2mn + 3mn^2(m+1)$ операцій з автоматом. Цей алгоритм відповідає методу А. Якщо в кожному рядку таблиці станів усі стани різні, то за допомогою цього алгоритму можна визначити автомат і методом В.

Алгоритм підбору 2 (а₂)

Якщо можливе скидання автомата в початковий стан, то автомат можна визначити за таким алгоритмом [19].

1. Визначення першого рядка таблиці виходів. Виконується прохід за всіма можливими вхідними символами (всього n , індекс поточного – j). Поточний вхідний символ подається на вхід автомата (n операцій), вихід автомата записується в комірку j першого рядка таблиці виходів, після чого автомат скидається в початковий стан (n операцій). Отриманий перший рядок таблиці відповідає початковому стану автомата. Таким чином перший рядок таблиці виходів визначається за $2n$ операцій з автоматом.

2. Усі інші рядки таблиці виходів, а також таблиця станів знаходяться за допомогою проходу за всіма можливими комбінаціями вхідних символів (далі – шлях, оскільки комбінація описує шлях проходу за всіма рядками таблиці станів) завдовжки m – кількість рядків таблиці станів. Кількість таких шляхів – n^m , оскільки для кожного з m елементів шляху може бути використано n різних вхідних символів. Підшляхом шляху назвемо частину шляху від його початку до будь-якого елемента шляху. Наприклад, для шляху $\{0, 1, 2, 3\}$ підшляхами будуть $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$ та $\{0, 1, 2, 3\}$. Для кожного підшляху виконати:

- a) якщо цей підшлях є першим, то стан s вважати початковим (відлік з 0);

- b) виконати прохід по підшляху (індекс поточного – i). Для кожного стану з підшляху отримати рядок r таблиці виходів цього стану таким чином: виконати прохід від його початку до поточного стану i (подати на вхід автомата вхідні символи з частини підшляху) (i операцій), після чого виконати прохід за всіма можливими вхідними символами (всього n , індекс поточного – j). Поточний вхідний символ подається на вхід автомата (n операцій), вихід автомата записується в комірку r_j рядка таблиці виходів, після чого автомат скидається в початковий стан (n операцій), і кожного разу виконується прохід по підшляху, але вже для наступного вхідного символу. Якщо для будь-якого підшляху вже був побудований рядок таблиці виходів, то використовується попередній результат. Інакше кажучи, для кожного підшляху виконується $n(i+2)$ операцій. Для підшляху завдовжки i виконується $n(i+2)n^i$. Оскільки виконується прохід за всіма підшляхами всіх довжин від 1 до m , причому для кожного підшляху прохід виконується один і лише один, то кількість операцій для всіх підшляхів можна

обчислити як $n \sum_{i=1}^m (i+2)n^i$;

- c) якщо отриманого на кроці a рядка таблиці виходів ще немає в таблиці виходів, то він додається до таблиці виходів;

- d) визначити новий стан s^* як індекс отриманого рядка r у таблиці виходів;

- e) у комірку таблиці станів з індексом рядка s та індексом стовпчика, що відповідає останньому символу підшляху, занести стан s^* ;

- f) замінити значення s на s^* .

Отриманий у результаті автомат може бути еквівалентним оригіналу, а може повністю збігатися. З погляду криптоаналізу це неважливо.

Видно, що для цього типу автомата його можна визначити за $a_2 = 2n + n \sum_{i=1}^m (i+2)n^i$ операцій з автоматом.

Алгоритм підбору 3 (а₃)

Якщо перевести автомат в будь-який заданий стан неможливо, а також неможливо скинути автомат в початковий стан, то алгоритм визначення автомата є наближеним до алгоритму повного перебору і матиме високу обчислювальну складність (NP-повна задача).

Кількість необхідних операцій згідно з алгоритмами ключів для деяких значень параметрів КМ показано в табл. 3.

Оскільки формула визначення a_2 , аналогічно до формули (2), вимагає довгої арифметики для обчислень граничних значень, то наведено неточне значення кількості операцій, а нижню і верхню границю (так само як і вище: мінімальна кількість біт, щоб описати отримане десятичне число довгої арифметики мінус один і мінімальна кількість біт, щоб описати отримане десятичне число довгої арифметики відповідно).

Таблиця 3. Кількість необхідних операцій для підбору автомата згідно з алгоритмами

n	m	a_1 , операцій	Нижня оцінка a_2 , операцій	Верхня оцінка a_2 , операцій
4	4	232	O(1039)	O(1044)
4	8	456	O(1069)	O(1074)
4	16	904	O(10126)	O(10130)
16	4	3232	O(1073)	O(1077)
16	16	12832	O(10239)	O(10243)
16	32	25632	O(10455)	O(10459)
16	64	51232	O(10883)	O(10887)
32	16	50240	O(10295)	O(10299)
32	32	100416	O(10564)	O(10569)
32	64	200768	O(101099)	O(101103)
64	32	397440	O(10674)	O(10678)
64	64	794752	O(101315)	O(101319)
64	128	1589376	O(102594)	O(102598)
64	256	3178624	O(105148)	O(105153)
128	64	3162368	O(101531)	O(101535)
128	128	6324480	O(103022)	O(103027)
128	256	12648704	O(106002)	O(106007)
256	16	3154432	O(10465)	O(10469)
256	32	6308352	O(10893)	O(10897)
256	64	12616192	O(101747)	O(101751)
256	128	25231872	O(103451)	O(103455)
256	256	50463232	O(106856)	O(106860)

Видно, що вже для малих значень n та m , а особливо після $m = n = 16$ кількість операцій набуває астрономічного значення, обчислення

Список літератури

- [1] National Institute of Standards and Technology (2001) "Advanced Encryption Standard (AES)". *Federal Information Processing Standards*. DOI 10.6028/NIST.FIPS.197.
- [2] National Institute of Standards and Technology (1999) "Data Encryption Standard (DES)": *Federal Information Processing Standards*.
- [3] DSTU 7624:2014. National Standard of Ukraine. Information technologies. Cryptographic Data Security. Symmetric block transformation algorithm. Ministry of Economic Development and Trade of Ukraine, 2015 (in Ukrainian).
- [4] Корнейчук В.И., Тарасенко В.П., Тесленко А.К. Исследование сложности реализации функций на одномерном каскаде модулей // Автоматика и вычислительная техника, 1977, № 5, с. 5–11.

часу виконання яких є складною задачею і вимагає значних обчислювальних потужностей.

Висновки

Запропонована функція підстановки може застосовуватись для криптографічних перетворень і може бути реалізована програмним, програмно-апаратним або апаратним способом. Найбільш доцільно її застосовувати під час швидкого зашифрованого передавання великих об'ємів даних.

З результатів обчислень складності проведення атак трьох видів бачимо, що досліджувана функція є захищеною.

Найбільшу швидкість криптографічних перетворень має алгоритм з використанням операції виняткової диз'юнкції (англ. Exclusive OR або XOR) та використанням ключа, створеного криптостійким генератором випадкових чисел [20]. Однак ключ має бути іншим для кожного сеансу, а довжина ключа в бітах повинна відповідати довжині початкового повідомлення. У запропонованих алгоритмах ключ є великим, але обмеженого постійного розміру.

Нині спостерігається стрімкий розвиток безпілотних апаратів (БПА), які використовують смуги передачі різної частоти. Цивільні пристрої зазвичай використовують радіозв'язок, а військові – супутниковий зв'язок. Шифрування відбувається як за допомогою симетричних алгоритмів шифрування, так і асиметричних. Для таких пристроїв запропонований алгоритм може стати у нагоді через швидкість перетворення і суттєву криптографічну стійкість.

Подальші дослідження стосуються визначення автомата під час методів встановлення початкового стану C та D . Згідно з [20] є випадки, коли визначення автомата є NP-повною задачею.

На перший погляд диференційний та лінійний криптоаналіз навряд чи мають ефективно застосування для розглянутих алгоритмів, але це також може бути метою аналізу надалі.

- [5] Tarasenko, V.P., Teslenko, O.K. & Yanovska O.Y. (2010). “Vlastyvoli povnykh pidstanovok, yaki realizuyut’sya nayprostishym odnonapravlenym rehulyarnym OKKM”. [Properties of complete permutations implemented by the simplest unidirectional regular OCSU]. *Radioelektronni i komp’yuterni systemy*. No. 6, pp. 123–128 (in Ukrainian).
- [6] Teslenko, O.K & Bondarchuk, M.Y. (2020) “Implementation of arbitrary bitness permutations in one of the classes of linear structures”. *Herald of Advanced Information Technology*, Vol. 3, No. 1, 2020, pp. 406–417. DOI 10.15276/hait01.2020.7.
- [7] Gill A. Introduction to the theory of finite-state machines. New York, Toronto, Ontario, London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962. 207 p.
- [8] Intel Processors and Chipsets by Platform Code Name [Electronic resource]. – Available at: <https://www.intel.com/content/www/us/en/design/products-and-solutions/processors-and-chipsets/platform-codenames.html>. – Active link: 15.09.2021.
- [9] Summary of Virtex-6 FPGA Features. Virtex-6 Family Overview. XILINX DS150 (v2.5). [Electronic resource]. – Available at: https://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds150.pdf. – Active link: 20.08.2015.
- [10] Sequence A001187 – Number of connected labeled graphs with n nodes. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®). [Electronic resource]. – Available at: <http://oeis.org/A001187>. – Active link: 29.03.2021.
- [11] Nijenhuis, A. & Wilf, H. (1979). “The enumeration of connected graphs and linked diagrams”, *Journal of Combinatorial Theory*. Series A, Vol. 27, Issue 3, pp.356–359. DOI 10.1016/0097-3165(79)90023-2.
- [12] IEEE Standard Test Access Port and Boundary Scan Architecture 1149.1-2001. [Electronic resource]. – Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/servlet/opac?punumber=7481>. – Active link: 27.03.2008.
- [13] Шеннон К. “Работы по теории информации и кибернетике”, М., ИЛ, 1963, с. 333–369
- [14] Bhattacharyya, A. (1989). “Checking experiments on sequential machines”. *New York: J. Wiley and Sons*, p. 155.
- [15] Кудрявцев В. Б., Грунский И. С., Козловский В. А. Восстановление автоматов по фрагментам поведения. *Дискрет. матем.* 21:2 (2009), 3–42; *Discrete Math. Appl.*, 19:2 (2009), 113–154.
- [16] Kudryavtsev, V. B., Grunskii, I. S. & Kozlovskii, V. A. (2010). “Analysis and Synthesis of Abstract Automata”. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 169, Issue 4, pp. 481–532. DOI: 10.1007/s10958-010-0058-z.
- [17] Petrenko, A. F., Yevtushenko, N. & Dsouli, R. (1994). “Grey box finite state machine base testing strategies”. *Department of Computer Science and Operations Research*. University of Montreal. Publication No. 991, p. 22.
- [18] Initial Resettable Machine Definition Algorithm. [Electronic resource]. – Available at: <https://github.com/MaxBondarchuk/PermutationCryptanalysis/blob/master/PermutationCryptanalysis/InitialResettableTest.cs>. – Active link: 07.06.2021.
- [19] Non-initial Resettable Machine Definition Algorithm. [Electronic resource]. – Available at: <https://github.com/MaxBondarchuk/PermutationCryptanalysis/blob/master/PermutationCryptanalysis/NonInitialResettableTest.cs>. – Active link: 07.06.2021.
- [20] Delfs, H. & Knebl, H. (2007). “Computationally Perfect Pseudorandom Bit Generators. Introduction to Cryptography”. *Information Security and Cryptography*. Springer. Vol. 41, No. 4, pp. 42–44. ISBN 978-3-540-49243-6. DOI 10.1145/1907450.1907523.

Maksym Bondarchuk, Oleksandr Teslenko

USE OF IMPLEMENTATIONS OF ARBITRARY BITNESS PERMUTATIONS FOR CRYPTOGRAPHIC TRANSFORMATIONS

Background. Cryptographic transformations have always aroused the interest of the educated part of humanity and are an integral part of modern communications. A lot of different cryptographic algorithms exist for different tasks and requirements. Permutation functions are useful for cases where transformation speed is more critical than theoretical secrecy. Hardware implementation of such substitutions is quite simple.

Objective. Investigate the model and combinational circuits for hardware implementation. Investigate algorithms for permutation functions software implementation. Investigate attack algorithms and cracking of permutation functions for cryptanalysis.

Methods. The paper reviews algorithms of cryptographic transformations and their cryptanalysis for bijective permutations implemented by means of regular combinational structures of linear complexity. The proposed algorithms provide the rate of processing up to gigabits per second. The paper clarifies the algorithm of formation of elements of regular structures of permutations, specifies volumes of public and private data, reviews data formats, methods of their transfer and hardware implementation of one of the methods. The paper reviews attack types and permutation regular structure schemes cracking algorithms with experimental calculation of necessary operations quantity. The software implementation of the proposed algorithms for results calculation was developed.

Results. Numerical results of the number of keys, the amount of memory required for hardware implementation and the number of required operations for cryptanalysis were obtained.

Conclusions. The results show that the proposed algorithms for cryptographic transformations have a sufficient level of protection with a high-speed encryption and decryption.

Keywords: combinational circuits; cryptanalysis; permutation functions; finite state machines.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
25 травня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-4.310302

УДК: 519.2+004

П.П. Маслянюк^{1*}, С.С. Мірко¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*corresponding author: masliankop@gmail.com

КОНЦЕПТУАЛЬНА МОДЕЛЬ NLP-СИСТЕМИ ПОШУКУ РЕЛЕВАНТНОЇ ПРАВОВОЇ ПОЗИЦІЇ НА МНОЖИНІ СУДОВИХ РІШЕНЬ СУДОЧИНСТВА УКРАЇНИ

Проблематика. Прикладна проблема автоматизації пошуку релевантних правових позицій на множині судових рішень у судочинстві України.

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розробки якісної NLP-системи пошуку релевантної, контекстно обґрунтованої правової позиції на множині судових рішень у судочинстві України, яка на основі запиту користувача продукує експертні відповіді на запитання користувача завдяки застосуванню розмірково-пошукового алгоритму на основі великих мовних моделей.

Мета дослідження. Розробити та формалізувати концепт і концептуальну модель NLP-системи пошуку правових позицій на основі міждисциплінарних знань технічного та філософського спрямування, що охоплює буття людини, ком'юніті, підприємства, установи та організації, органи державної влади, а також обґрунтовує формування правової позиції на основі множини законодавчих актів та судових рішень.

Методика реалізації. Методика реалізації NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції лежить у взаємодії сутностей завдань, пов'язаних із судочинством України, інструментів аналізу, обробки, генерації тексту та наявних доступних судових рішень судочинства України на основі бізнес-профіля Еріксона–Пенкера та великих мовних моделей.

Результати дослідження. Запропоновано міждисциплінарну модель концепту NLP-систем пошуку вирішення проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень і/або формування правової позиції у вигляді діаграми Венна як множини сутностей та їх колаборації, що інтегрує філософські, правничі й технічні знання.

Формалізовано бізнес-профіль Еріксона–Пенкера концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції.

Формалізовано модель процесу роботи NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції на основі методу RAG.

Розроблено концептуальну модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у структурному вигляді на основі діаграми компонентів і динамічного подання на основі діаграми діяльності з описом внутрішньої структури компонентів.

Висновки. Встановлено наявність ряду важливих філософських, правових і технічних проблем у процесі пошуку правових позицій на множині судових рішень. Встановлено міждисциплінарний характер проблеми розробки концепту і концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції на множині судових рішень та необхідність автоматизації процесів пошуку правових позицій для судової практики.

На метарівні формалізовано концепт NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у вигляді діаграми Венна та концептуальну модель NLP-системи на основі модифікованого бізнес-профіля Еріксона–Пенкера як систему сутностей та їх колаборацію.

Розроблено концептуальну модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у структурному вигляді на основі діаграми компонентів та динамічного подання на основі діаграми діяльності з описом внутрішньої структури компонентів.

Порівняно функціональність NLP-системи з іншими основними наявними системами пошуку судових рішень в судочинстві та встановлено, що розроблена система щонайменше не поступається за функціональністю відомим системам і має додаткові можливості для користувачів.

Пропозиція для цитування цієї статті: П.П. Маслянюк, С.С. Мірко, “Концептуальна модель NLP-системи пошуку релевантної правової позиції на множині судових рішень судочинства України”, *Наукові вісті КПІ*, № 1–4, с. 71–85, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.310302

Offer a citation for this article: P. Maslianko, S. Mirko “Conceptual model of the NLP-system for searching for the relevant legal position on the multiple court decisions of the judiciary of Ukraine”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 71–85, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.310302

Ключові слова: NLP-система, правова позиція, судові рішення, міждисциплінарний підхід, бізнес-профіль Еріксона–Пенкера, великі мовні мережі (LLM), пошуково доповнена генерація тексту (RAG), пошукові системи, векторне сховище, ембедінг моделі.

Вступ

Прикладна проблема пошуку правових позицій буття людини, громадських та професійних ком'юніті, підприємств, установ і організацій, а також органів державної влади має міждисциплінарний характер, що ускладнює вибір правових позицій та їх формування на основі множини законодавчих актів та судових рішень. Ця проблема вимагає проведення як фундаментальних, так і прикладних досліджень на основі міждисциплінарних знань філософського, правничого і технічного спрямування, щоб забезпечити комплексний підхід до пошуку й аналізу правових позицій, враховуючи їхню філософську, правову та технічну складову.

У цій статті автори будуть спиратись виключно на чітко формалізовані філософські і правові парадигми та означення, опубліковані у наукових працях правознавців та законодавчих актах України.

Автори цієї статті будуть досліджувати тематичну та технічну складові прикладної проблеми пошуку правових позицій на множині судових рішень, що накопичені в інформаційних системах України і є у вільному доступі.

База судових рішень в судочинстві України, які містяться в єдиному реєстрі судових рішень, перевищує сто мільйонів документів. Ця база містить декілька різновидів судових документів, таких як рішення, постанови, ухвали, вирок тощо, а також має три рівні судочинства – перша інстанція, апеляція та касація, при цьому маючи досить розгалужене категоріювання справ.

Судове рішення – процесуальний документ, постановлений судом під час розгляду судової справи на будь-якій стадії судового процесу (ухвала, рішення, вирок, постанова, судовий наказ, окрема думка судді тощо) [1].

Особливістю організації інформаційних ресурсів судочинства України є специфіка структур організації баз даних, форматів даних, процесів обробки даних, форматів запитів та інтерфейсів взаємодії з інформаційними ресурсами.

Можна констатувати, що в Україні де-факто існує прецедентне право, коли раніше прийняті рішення по судових справах відповідно до законодавства України використовуються для прийняття рішення щодо вирішення поточних справ. На практиці раніше прийняті рішення,

що набрали законної сили, судді та інші учасники судочинства використовують для винесення рішень по своїх поточних справах, а адвокати – для розуміння того, як правильно побудувати правову позицію захисту.

Оскільки у судочинстві України є інші зацікавлені сторони, наприклад слідчі, представники органів влади, прокуратури та ін., для інформатизації бізнес-процесів діяльності зацікавлених осіб у судочинстві України розроблено системи пошуку прецедентів серед вироків, рішень, ухвал та інших документів. Утім, наявні системи потребують значного часу, щоб задовольнити потребу користувача у пошуку потрібного судового документа, через обмежену функціональність таких систем.

Отже, наразі актуальною є проблема розроблення методу системної інженерії NLP-систем пошуку релевантної правової позиції на основі науково обгрунтованої концептуальної моделі системи пошуку релевантної, контекстно обгрунтованої правової позиції на множині судових рішень судочинства України з використанням сучасних технологій Data Science, великих мовних моделей та її імплементація на множині відкритих баз даних для забезпечення пошуку правових позицій на множині законодавчо встановлених видів результатів судочинства України.

Постановка задачі

Метою цього дослідження є розроблення концептуальної моделі NLP-систем пошуку правової позиції для законодавчо встановлених видів результатів судочинства України на основі науково обгрунтованої концептуальної моделі системи пошуку релевантної, контекстно обгрунтованої правової позиції на множині судових рішень судочинства України із застосуванням сучасних технологій Data Science та великих мовних моделей.

Предметом цього дослідження є концептуальна модель NLP-системи пошуку релевантної, контекстно обгрунтованої правової позиції на множині судових рішень судочинства України на основі бізнес-профіля Еріксона–Пенкера із застосуванням сучасних технологій Data Science та великих мовних моделей.

У цій статті, під терміном «концептуальна модель» ми розуміємо науково обгрунтовану

абстрактну модель системи пошуку релевантної правової позиції на множині судових рішень судочинства України, що враховує всі необхідні класи сутностей пошуку правової позиції та відношення між ними, необхідні й достатні для імплементації конкретної системи пошуку релевантних правових позицій визначеного класу.

Дефініція понять “норма права” та “правова позиція” в судочинстві України

Інженерія NLP-систем пошуку релевантної правової позиції потребує чіткого окреслення предметної області та визначення ключових понять предмета дослідження.

Основою для будь-якої правової позиції є норми, на яких ґрунтуються закони та норми поведінки держави.

Норма права (також **правова норма**) — загальнообов’язкове, формально визначене правило поведінки (зразок, масштаб, еталон), що його встановила або санкціонувала держава як регулятора суспільних відносин, забезпечуючи всіма заходами державного впливу (аж до примусу), а також таке, що офіційно закріплює міру свободи й справедливості відповідно до суспільних, групових та індивідуальних інтересів (волі) населення країни [2].

Правові позиції є ключовим елементом будь-якого юридичного рішення. Початково правові позиції формуються на етапі попереднього розгляду та підготовки справи, під час збирання та аналізування матеріалів. Остаточні ці позиції відображаються в рішенні відповідного органу. Наразі в юридичній науці це питання розглядається лише в межах окремих галузей права, щодо конкретних ситуацій або органів. Теоретичного, остаточного формального визначення цього терміна у вітчизняному правознавстві немає, хоча висловлено багато характеристик правової позиції з різних точок зору [3].

Отже, спираючись на постановку задачі, надамо власне визначення терміна “**правова позиція**” — це набір правових норм та підстав для їх застосування для вирішенні справи по суті або ж судові рішення на основі правових норм та підстав для їх застосування. Правова позиція має форму висновку щодо застосування норм права, зазначеного у судовому рішенні.

Правничі моделі логічного мислення в інформаційних системах

Законодавство є сферою норм права та процесуальних правил, а порядок застосування цих

норм права та правил може бути формалізовано у певній логічній послідовності моделей, алгоритмів і бізнес-правил їх застосування.

Для нашого дослідження важливо те, що моделі логічного мислення у царині права ґрунтуються на трьох основних підходах [4]:

1) прототипи та версії — зосереджується на тому, як прийняти рішення у конкретній справі на основі минулих справ;

2) розміри та правові фактори застосованих стереотипних шаблонів — підсилюють або ослаблюють аргумент сторони щодо правового твердження або концепції;

3) конкретні, екземплярні пояснення — є правовими концепціями у термінах пояснень попередніх судів щодо того, чому концепція застосовувалася чи не застосовувалася.

Моделі логічного мислення, побудовані на цих підходах, показують, як подати результати правничої діяльності так, щоб комп’ютерна програма могла оцінити їх схожість із справою, яку треба вирішити. Вони демонструють способи, за якими програма може порівнювати проблему з іншими справами, вибирати найбільш релевантні й формулювати юридичні аргументи “за” “чи” проти певного висновку в новій справі [4].

Варто зазначити, що жодна з цих систем не працює безпосередньо із правовими текстами, натомість вони використовують формальні уявлення про факти справи та юридичні концепції, створені вручну. Утім, передбачається, що в майбутньому репрезентації правових позицій можна буде автоматично добувати із текстів судових рішень за допомогою аналізу природної мови [4].

Розроблена авторами статті концептуальна модель системи пошуку правових позицій ґрунтується саме на таких підходах, вказаних у [4]. Основною ідеєю концептуальної моделі системи пошуку правових позицій є застосування бізнес-профіля Еріксона–Пенкера та великих мовних моделей для імплементації системи пошуку, аналізу та вилучення із судових рішень правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування для того, щоб надалі їх можна було використовувати для генерації правової позиції нових подібних судових рішень.

Реалізація цієї ідеї з наукової точки зору передбачає послідовне вирішення таких завдань:

— дослідження предметної області та розроблення концепту NLP-систем вирішення проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень та/або формування правової позиції;

– розроблення науково обґрунтованого концепту моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції в судочинстві України;

– розроблення концептуальної моделі NLP-системи пошуку правових позицій;

– імплементацію концептуальної моделі NLP-системи пошуку правових позицій для визначеного класу правових позицій;

– верифікацію та валідацію концептуальної моделі NLP-системи пошуку правових позицій.

Концепт моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції в судочинстві України

Концепт моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції в судочинстві України розроблятимемо як множину сутностей та їх інтегрованих міждисциплінарних ресурсів. Для цього проведемо системний аналіз сутностей подання концепту моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції в судочинстві України у вигляді діаграми Венна і дамо визначення концепту моделі як системи сутностей і відношень між ними [5].

Спочатку формалізуємо складові діаграми Венна з урахуванням класів сутностей предметної області пошуку судових документів та дамо їх чітке визначення. На основі результатів аналізу предметної області подання концепту складається із трьох класів сутностей:

– Entities of judicial documents, Set D – множина судових документів на всіх стадіях їх життєвого циклу;

– Entities of Instruments, Set I – множина інструментів пошуку, аналізу, обробки, трансформування та генерації тексту і тестових даних;

– Entities of Tasks, Set T – множина проблем, завдань і задач пошуку судових документів, потрібних для винесення судових рішень або формування правової позиції.

Далі формалізуємо визначені класи сутностей подання предметної області концепту у вигляді діаграми Венна (рис. 1).

Деталізуємо подання визначених класів сутностей концепту у вигляді діаграми Венна.

1. Entities of judicial documents, Set D – множину судових документів на всіх стадіях їх життєвого циклу визначають як множину D , $d \in D$ усіх наявних судових документів в судочинстві України, що можуть бути прямо та/або

опосередковано задіяні для винесення судового рішення чи для формування правової позиції.

2. Entities of Instruments, Set I – множина теоретичних та інженерних інструментів пошуку, аналізу, обробки, трансформування й генерації тексту і текстових даних, її визначають як множину I де $i \in I$ усіх наявних на ринку матеріальних і нематеріальних сутностей, що можуть бути прямо та/або опосередковано задіяні для обробки, пошуку та аналізу судових документів в судочинстві України.

3. Entities of Tasks, Set T – множина проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень або формування правової позиції, що виникають у результаті роботи зацікавлених осіб в судочинстві України, її визначають як множину T де $t \in T$ усіх наявних на ринку проблем, завдань і задач, що можуть прямо та/або опосередковано виникати під час роботи зацікавлених сторін у судочинстві України для досягнення мети функціонування судової системи України.

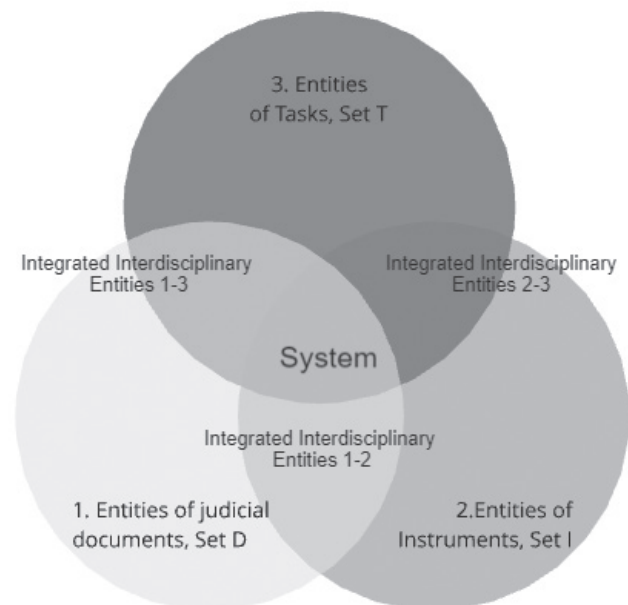


Рис. 1. Концепт NLP-систем вирішення проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень та/або формування правової позиції

На діаграмі Венна (рис. 1) перетини множин 1-2, 1-3 та 2-3 класів сутностей D , I та T утворюють інтегровані міждисциплінарні ресурси (підмножини сутностей), виділені за ознакою наявності функціональних відношень між ресурсами (сутностями) різних типів, зокрема Set D, Set I, Set T.

Integrated Interdisciplinary Entities 1-2 (ІЕ 1-2) – це наявні сутності розробки реалізації пошуку, аналізу, обробки, трансформування і генерації тексту для формування судових документів та/або правової позиції.

Integrated Interdisciplinary Entities 2-3 (ІЕ 2-3) – це наявні сутності, що можуть бути використані для вирішення проблеми з пошуку, аналізу, обробки, трансформування та генерації тексту в полі судочинства України, та їх ресурси.

Integrated Interdisciplinary Entities 1-3 (ІЕ 1-3) – наявні сутності, що дають можливість ідентифікувати наявні проблеми та задачі під час роботи з судовими документами в судочинстві України.

Визначення 1. Тут і надалі інтегровані міждисциплінарні ресурси (сутності) ІЕ 1-2, ІЕ 2-3 та ІЕ 1-3 – це підмножини, що формуються на основі наявності властивостей інтеграції/інтероперабельності між елементами множин D , I та T , а інтеграція/інтероперабельність елементів множин D , I та T полягає у здатності реалізувати колаборації пар сутностей множин D та I , D та T , I та T .

Формалізуємо визначення NLP-системи пошуку контекстно орієнтованої правової позиції в судочинстві України на основі концепту NLP-системи вирішення проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень та/або формування правової позиції, на основі діаграми Венна (рис. 1) та наявності властивостей інтеграції/інтероперабельності між елементами цих множин.

Визначення 2. Система пошуку контекстно орієнтованої правової позиції (СП КОПП) в судочинстві України може бути формалізована як множина трійок елементів міждисциплінарних ресурсів (сутностей) із трьох множин ресурсів (сутностей): сутність судових документів на всіх стадіях їх життєвого циклу – D ; сутностей інструментів пошуку, аналізу, обробки, трансформування та генерації тексту і текстових даних – I ; сутностей проблем, завдань і задач пошуку судових документів, необхідних для винесення судових рішень або формування правової позиції – T таких, що мають спільну властивість/ознаку, яка забезпечує інтеграцію/інтероперабельність між елементами $d \in D$, $i \in I$, $t \in T$ і встановлює відповідності колаборації C_{dspd} та C_{dpsd} між елементами цих множин. Таким чином,

СП КОПП

$$= \{d, i, t, d | \forall d \in D, \forall i \in I, \forall t \in T, (d, i, t, d) \in C_{diid}\} \cup \{d, t, i, d | \forall d \in D, \forall i \in I, \forall t \in T, (d, t, i, d) \in C_{dtid}\}, \quad (1)$$

або

СП КОПП

$$= C_{diid} \cup C_{dtid} \{кортеж(D, I, T, D, G_{diid}) \cup кортеж(D, T, I, D, G_{dtid})\}, \quad (2)$$

де G_{diid} та G_{dtid} – графіки/діаграми/матриці відповідностей колаборації C_{diid} та C_{dtid} .

Таким способом ми обґрунтовуємо і формалізуємо концептуальне подання системи СП КОПП в судочинстві України у вигляді оновленої діаграми Венна за допомогою наявності властивості/ознаки відповідності, що забезпечує інтеграцію/інтероперабельність між елементами $d \in D$, $i \in I$, $t \in T$ і встановлює відповідності колаборації C_{diid} та C_{dtid} між елементами множин ресурсів D , I й T діаграми Венна (рис. 1).

Така декомпозиція класів сутностей D , I та T й узагальнене системне, міждисциплінарне подання колаборації елементів множин цих сутностей концепту СП КОПП в судочинстві України дає змогу систематизувати наявні визначення і формалізувати дефініцію концепту «системи СП КОПП в судочинстві України» як колаборацію сутностей судових документів, сутностей інструментів обробки і генерації тексту та сутностей наявних проблем і завдань судочинства.

Така декомпозиція і систематизація дає нам глибше уявлення про те, що таке концепт системи СП КОПП у судочинстві України, які завдання вона вирішує, і водночас показує, наскільки широкою є область знань, що застосовується для організації пошуку та аналізу судових рішень.

Це дає нам можливість узагальнити поняття «концепт системи СП КОПП у судочинстві України» та сформулювати визначення «система СП КОПП у судочинстві України».

Концептуальна модель NLP-системи пошуку контекстно бґрунтованої правової позиції в судочинстві України на основі бізнес-профілю Еріксона–Пенкера

Формалізація понять “концепт системи СП КОПП” та “система СП КОПП” дає можливість розробити концептуальну модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції. Така концептуальна модель має враховувати міждисциплінарний характер діяльності та узгоджену колаборацію всіх класів сутностей у процесі пошуку правових позицій на множині судових рішень судочинства України. Для цього

ми застосовуємо бізнес-профіль Еріксона—Пенкера, що визначає класи сутностей: проблему пошуку правових позицій, мету, потрібні ресурси, процеси досягнення мети, бізнес-правила, за якими функціонують процеси, та відношення між класами сутностей (рис. 2) [5].

Таким чином концептуальна модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції на основі бізнес-профіля Еріксона—Пенкера дозволяє врахувати всі потрібні класи сутностей і відношення між ними та формалізувати діяльність із пошуку правових позицій.

Далі, на основі концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції ми можемо проектувати структурне та динамічне подання концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції в контексті, означення і моделях подань області систем пошуку

правових позицій з урахуванням інтересів усіх зацікавлених сторін, зокрема слідчих, суддів, адвокатів та ін.

Визначимо зміст кожного із класів бізнес-профіля (рис. 2) у термінах постановки задачі інженерії СП КОПП [6].

Проблема — актуальне питання, що потребує відповідних рішень, основна мотивація розроблення системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції, яка спонукає до формулювання конкретної мети. Проблема цієї роботи — необхідність створення якісної NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у судочинстві України, яка би взаємодіяла з користувачем під час пошуку та аналізу судових рішень і надавала б експертні відповіді на запитання користувача за допомогою розмірково-пошукового алгоритму на основі великих мовних моделей.

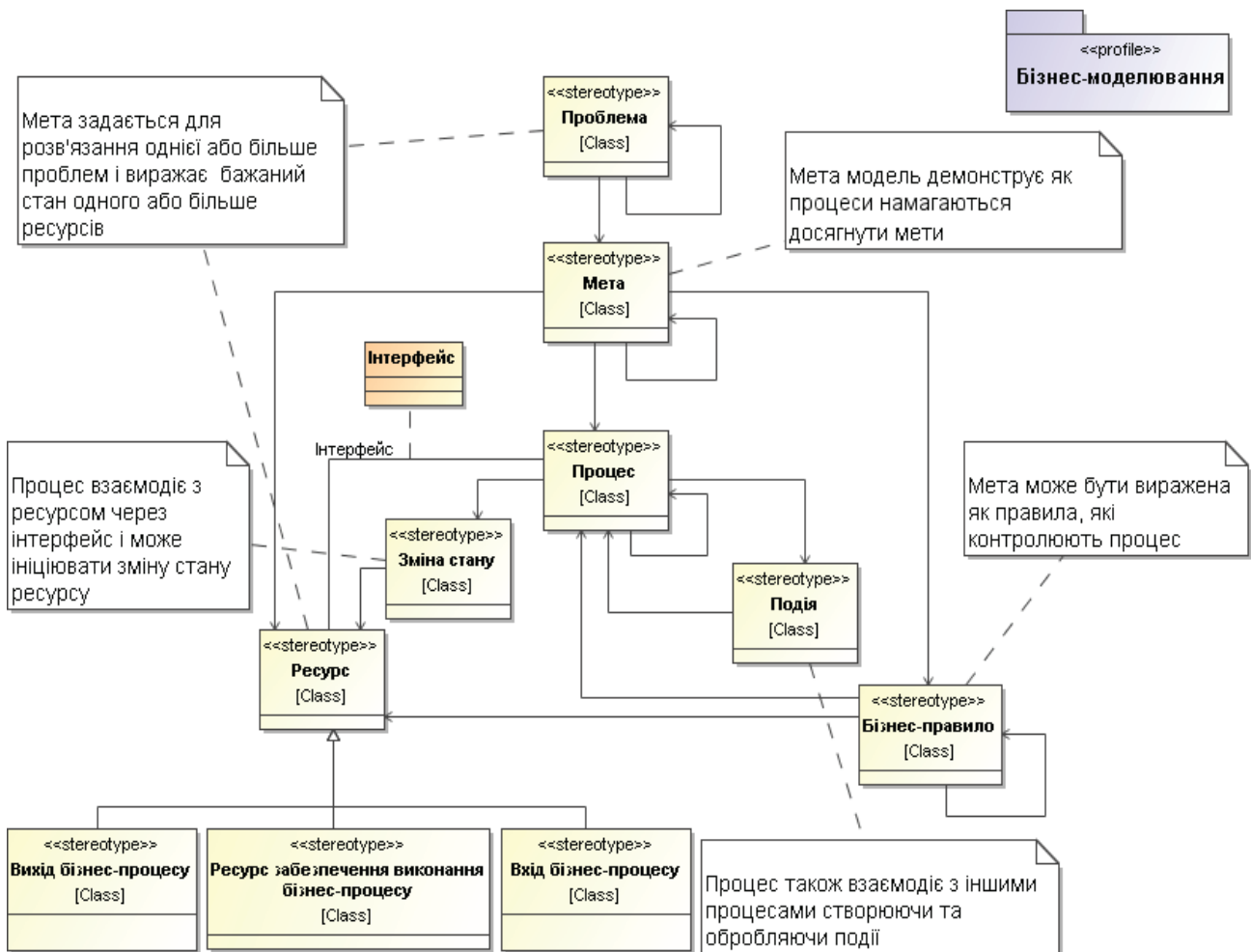


Рис. 2. Удосконалений бізнес-профіль Еріксона—Пенкера. Діаграма класів у нотації UML [6]

Мета виражає глобальну ціль роботи, покликану вирішити поставлену проблему [6], – автоматизація процесів пошуку множини судових рішень на множині судових документів судочинства України, необхідна і достатня для формування релевантних правових позицій.

Процес – множина процесів діяльності системи, унаслідок якої досягають мети, чітко визначена послідовність дій/підпроцесів, що сприяє виконанню певного завдання [6]. Процесами СП КОПП є:

- налаштування векторного сховища;
- завантаження судових рішень;
- первинна обробка текстів судових рішень;
- отримання правових норм з підставами їх застосування із судового рішення;
- формування правової позиції з отриманих правових норм із підставами їх застосування;
- векторизація правових позицій та їх правових норм із підставами їх застосування;
- наповнення векторного сховища;
- розгортання системи та її залежностей;
- функціонування вебзастосунку;
- формування та аналіз запиту користувача;
- пошук релевантних правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування;
- формування запиту створення контекстно обґрунтованої правової позиції;
- генерація контекстно обґрунтованої правової позиції;
- повернення правової позиції користувачу;
- отримання нового запиту: уточнення, нове питання і под.

Зміна стану – можливі зміни певних ресурсів унаслідок роботи процесів [6]. Концептуальна модель системи налічує чотири зміни станів.

1. Судове рішення. → Правові норм та підстави їх застосування. → Правова позиція та її правові норми з підставами їх застосування. → Вектори текстів правової позиції її правових норм та підстави їх застосування. → Збереження відповідності векторів та текстів правової позиції її правових норм з підставами їх застосування.

2. Векторне сховище. → Знайдені правової позиції, їх правові норми з підставами їх застосування. → Проаналізовані правової позиції. → Контекст відповіді. → Доповнений контекст відповіді. → Відповідь на запитання користувача.

3. Розмова користувача з чатом. → Сформульоване завдання пошуку. → Контекст пошуку. → Збережений контекст пошуку.

4. Ресурс – будь-які сутності (матеріальні чи нематеріальні), що споживаються та проду-

куються розроблюваною системою [6]. Детальнішу ієрархію ресурсів цієї системи показано на рис. 2.

Ресурси найнижчого рівня ієрархії, безпосередньо задіяні у процесах, також поділяють за характером впливу на перебіг процесів на такі три класи [6]:

а) вихід бізнес-процесу – ресурси, які продукує СП КОПП, кінцевий результат її функціонування: відповідь на запитання користувача, формалізована правова позиція відповідно до запиту користувача;

б) ресурс забезпечення виконання бізнес-процесу – ресурси, що забезпечують виконання процесів, але не є кінцевим результатом роботи: розмірково-пошуковий алгоритм, контекст пошуку, доповнений контекст пошуку, векторне й текстове подання правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування, великі мовні моделі, ембедери, ретривер;

в) вхід бізнес-процесу – первинні ресурси входу початкових процесів, які ініціалізують цикл роботи системи: судові рішення, запит користувача, обмеження і бізнес-правила проведення пошуку правової позиції.

Подія – виникає через певні зовнішні фактори чи як результат взаємодії між процесами [6]. Потенційними подіями повної системи вважають уточнення користувача у процесі функціонування вебзастосунку та дії розмірково-пошукового алгоритму, що спонукає модель системи до знаходження релевантних документів, доповнення пошукового контексту та надання відповіді користувачу.

Бізнес-правило – формальні інструкції, що регулюють, обмежують, встановлюють контекст і межі функціонування процесів [6]. Є такі бізнес-правила СП КОПП в судочинстві України:

– розмірково-пошуковий алгоритм не використовує більше ніж 10 правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування за ітерацію;

– розмірково-пошуковий алгоритм має пам'ятати 20 останніх ітерацій;

– розмірково-пошуковий алгоритм повинен мати критику або спрощене використання правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування для формування правової позиції;

– розмірково-пошуковий алгоритм має повертати посилання на оригінальні судові рішення, які використовувалися для формування правової позиції;

– система має поінформувати про існування кількох інтерпретацій і надати інструменти для їх порівняння;

– прецеденти мають бути зважені відповідно до їхньої авторитетної цінності та актуальності, при цьому рішення вищих судів мають більшу вагу;

– алгоритми мають бути нейтральними та вільними від упереджень.

Клас «Процес» та відношення між класами сутностей концептуальної моделі СП КОПП в судочинстві України, що був описаний у бізнес-профіль Еріксона–Пенкера, може бути поданий діаграмою (рис. 3) стандартного процесу класу систем *Retrieval-Augmented Generation* (RAG) [7]. У літературі трапляються різні варіанти подання RAG-процесу [7]. Ми пропонуємо власне подання RAG-процесу, що застосовується для моделювання класу «Процес» концептуальної моделі СП КОПП на основі бізнес-профіля Еріксона–Пенкера (рис. 3).

На початковому етапі роботи СП КОПП формуються проблематика запиту користувача, яка складається з фільтрів пошуку правових позицій

та текстового опису проблематики. Описана проблематика й метадані пошуку формують завдання пошуку та початковий набір сутностей для розмірково-пошукового алгоритму.

Розмірково-пошуковий алгоритм складається із двох етапів:

1. Етап налаштування – це процес, коли розмірково-пошуковий алгоритм обробляє судові рішення для їх наступного використання під час роботи. Для цього алгоритм знаходить в судовому рішенні правові норми та підстави їх застосування і на їх основі будує правову позицію потрібного поточного судового рішення. Сформована правова позиція судового рішення заноситься до векторної бази даних для її наступного пошуку і використання.

2. Етап роботи алгоритму являє собою ітераційний процес із завантаження правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування, оцінювання відповідності правових позицій запиту користувача, генерації відповіді, оцінювання згенерованої відповіді та уточнень до запиту пошуку правових позицій.

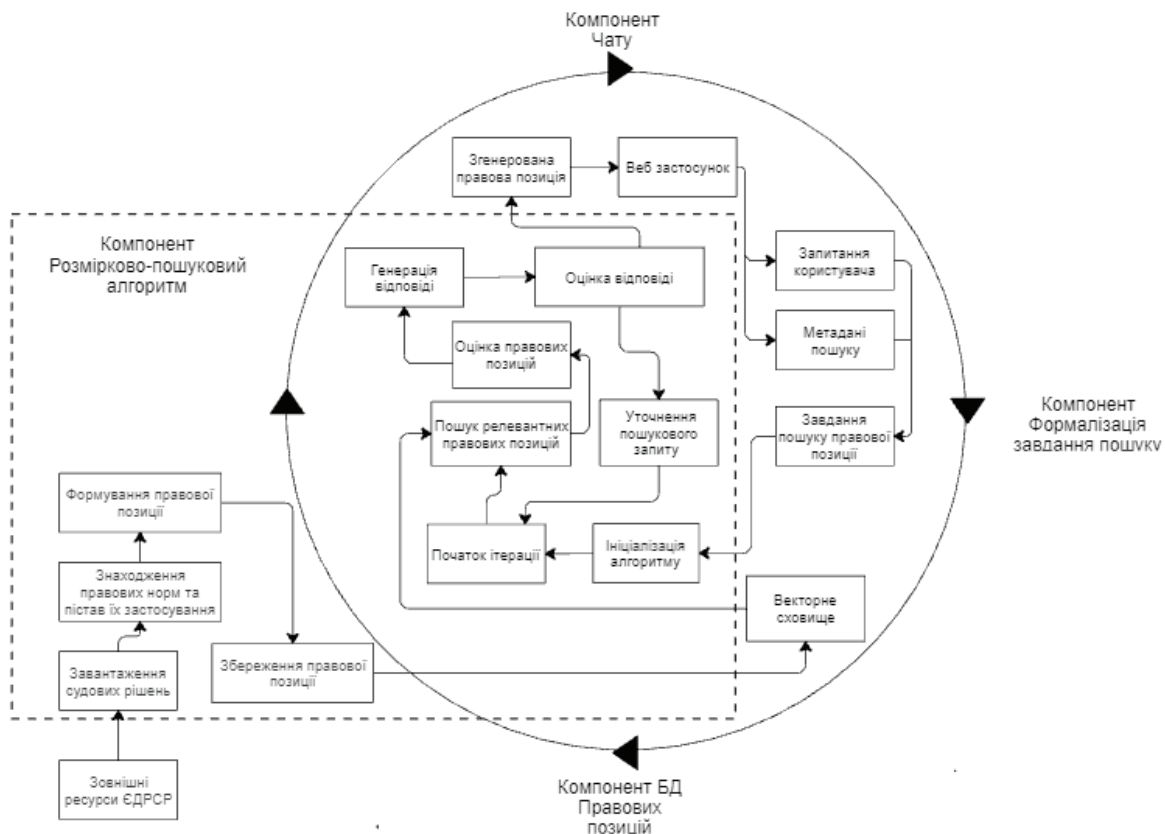


Рис. 3. Процес СП КОПП генерування та агрегації правових позицій на основі методу RAG

У результаті роботи алгоритму маємо отримати сформовану правову позицію або декілька версій правових позицій з поясненнями, чому була сформована саме така відповідь, з посиланнями на правові позиції та правові норми, що були використанні для формування відповіді.

Невід’ємною частиною алгоритму є можливість завантажувати правові позиції та їх правові норми з підставами їх застосування з бази даних на основі семантичної схожості тексту правової позиції або правової норми та описом проблематики. Цього досягають використанням двох ключових елементів:

- ембедінгу моделі – перетворення тексту на щільний вектор;
- векторної бази даних – класу баз даних, які оптимізовані для пошуку даних на основі їх векторного подання.

Формалізація структурного подання концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обгрунтованої правової позиції в судочинстві України

Концептуальна модель передбачає таку властивість NLP-системи, що полягає у можливості заміни реалізації внутрішньої структури компонентів, причому інтерфейси взаємодії компонентів є незмінними.

Структурне подання системи має відповідати поставленим вимогам та мати необхідні функціональні властивості для пошуку контекстно обгрунтованої правової позиції процесу СП КОПП генерування та агрегації правових позицій на основі методу RAG (рис. 4).

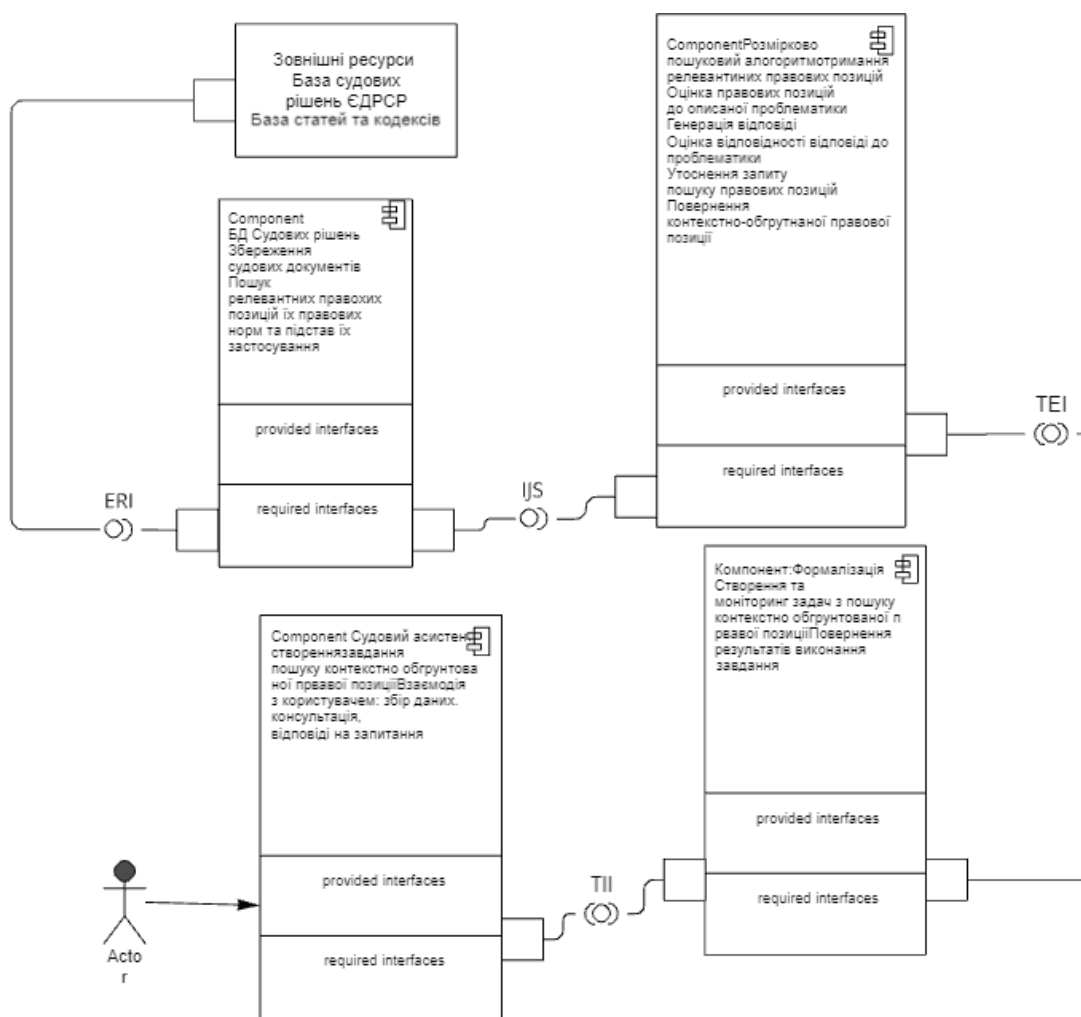


Рис. 4. Концептуальна модель NLP-системи пошуку контекстно обгрунтованої правової позиції. Діаграма компонентів в нотатції UML

Компонентна модель NLP-системи, що реалізує вказані функції та процеси, складається з кількох компонентів.

1. Компонент бази даних (БД) судових документів – пошук, зберігання, фільтрація/очищення, вилучення правових норм і підстав їх застосування, формування правової позиції на основі отриманих правових норм з підставами їх застосування, їх векторизація та збереження відповідності між текстами й векторами; вилучення і зберігання корисної структурованої інформації з документів; надання доступу до збережених даних.

2. Компонент формалізації – формування пошукового вектора, вид судочинства, тип справи, ключові слова, опис, період тощо.

3. Компонент розмірково-пошуковий алгоритм – вирішує два завдання. Перше завдання полягає у підготовці судового рішення, тобто знаходження правових норм з їх підставами застосування і формування на їх основі правової позиції судового рішення. Друге завдання компонента полягає у тому, щоб створити якомога повнішу та точнішу контекстно обґрунтовану правову позицію для надання відповіді на запитання користувача.

4. Компонент Чату (компонент судовий асистент) – компонент взаємодії NLP-системи з користувачем у вигляді чату в режимі «запитання – відповідь».

Інтерфейси взаємодії компонентів:

– Task Initialize Interface (TII) – інтерфейс створення завдання пошуку контексту для відповіді;

– Task Execution Interface (TEI) – інтерфейс виконання завдання пошуку контексту для відповіді;

– Interface Judgment Storage (IJS) – інтерфейс надання доступу до бази судових документів;

– Eternal Resources Interface (ERI) – інтерфейс завантаження судових рішень та кодексів із множини відкритих ресурсів.

Модель NLP-системи формалізовано на основі мови графічного моделювання UML, що дозволяє формалізувати відношення компонентів, та їх внутрішню реалізацію.

Структурне подання NLP-системи у вигляді діаграми компонентів дозволяє розробити динамічне подання NLP-системи у вигляді діаграми діяльності й розробити алгоритм функціонування NLP-системи.

На рис. 5 зображено модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у вигляді деталізованої діаграми діяльності

в нотації UML. Компонент судових прецедентів складається з чотирьох підкомпонентів:

1) *конвеєр обробки судових документів* відповідає за первинну обробку судових текстів: вилучення правових норм та підстав їх застосування, вилучення корисної інформації із судових текстів, як от номерів статей кодексів та їх збереження до векторного сховища;

2) *вкладання слів (word embedding)* – це загальна назва низки методик в обробці природної мови (NLP), в яких слова або фрази відображаються у вигляді векторів дійсних чисел [8]. Ембедером (embedder) зазвичай називають модель вкладання слів., він виконує такі функції: векторизує запити, правові норми й підстави їх застосування та правові позиції, перетворює їх на вектор. Завданням ембедінг-моделі є перетворення тексту t_i у вектор певної розмірності $v_i \in V$ – певний векторний простір так, щоб вектори двох текстів, t_i та t_j , які семантично схожі, мали меншу відстань $\delta(v_i, v_j)$ між собою відносно інших векторних подань v_k текстів d_k , які семантично відрізняються від текстів t_i та t_j [8];

3) *векторне сховище*, завданням якого є:

– зберігання відповідності векторного і текстового подання правової позиції та її правових норм з підставами їх застосування;

– організація структури збереження даних для подальшого швидкого пошуку релевантних подання правової позиції та її правових норм з підставами їх застосування;

– оновлення векторних та текстових правової позиції та її правових норм з підставами їх застосування.

4) *Retriever* (ретривер – механізм пошуку у векторній базі даних) – основним завданням є знайти релевантні правові позиції та її правові норми з підставами їх застосування у векторному сховищі на основі запиту. Для цього запит векторизується й оцінюється схожість векторного подання запиту та векторних подавань правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування на основі функції подібності. Після цього результати ранжируються й повертається k текстів з найвищою оцінкою [8].

Завдання пошуку у векторному сховищі можна поставити таким чином [8]:

$$\operatorname{argmin}_{(u \in X)}^{(k)} \delta(q, u),$$

де k – кількість шуканих релевантних документів;

u_i – векторне подання документа;

$t_i \in T$ – колекція текстових даних;

X – векторний простір, якому належать усі векторні подання u_i документів $t_i \in T$;

δ – певна функція відстані у векторному просторі X , яка виконує роль функції подібності між векторними поданнями документів $u_i \in X$ [8];

5. Компонент формалізації завдання пошуку – формує завдання для розмірково-пошукового алгоритму на основі характеристик судового рішення та запитів користувача, зібраних

на етапі взаємодії з компонентом чату. Після формування завдання передає його до розмірково-пошукового алгоритму на виконання. Після завершення виконання завдання компонент повертає отриманий контекст для відповіді на запитання користувача.

6. Компонент «розмірково-пошуковий алгоритм», його основою є використання Large Language Models (LLM) великих мовних моделей.

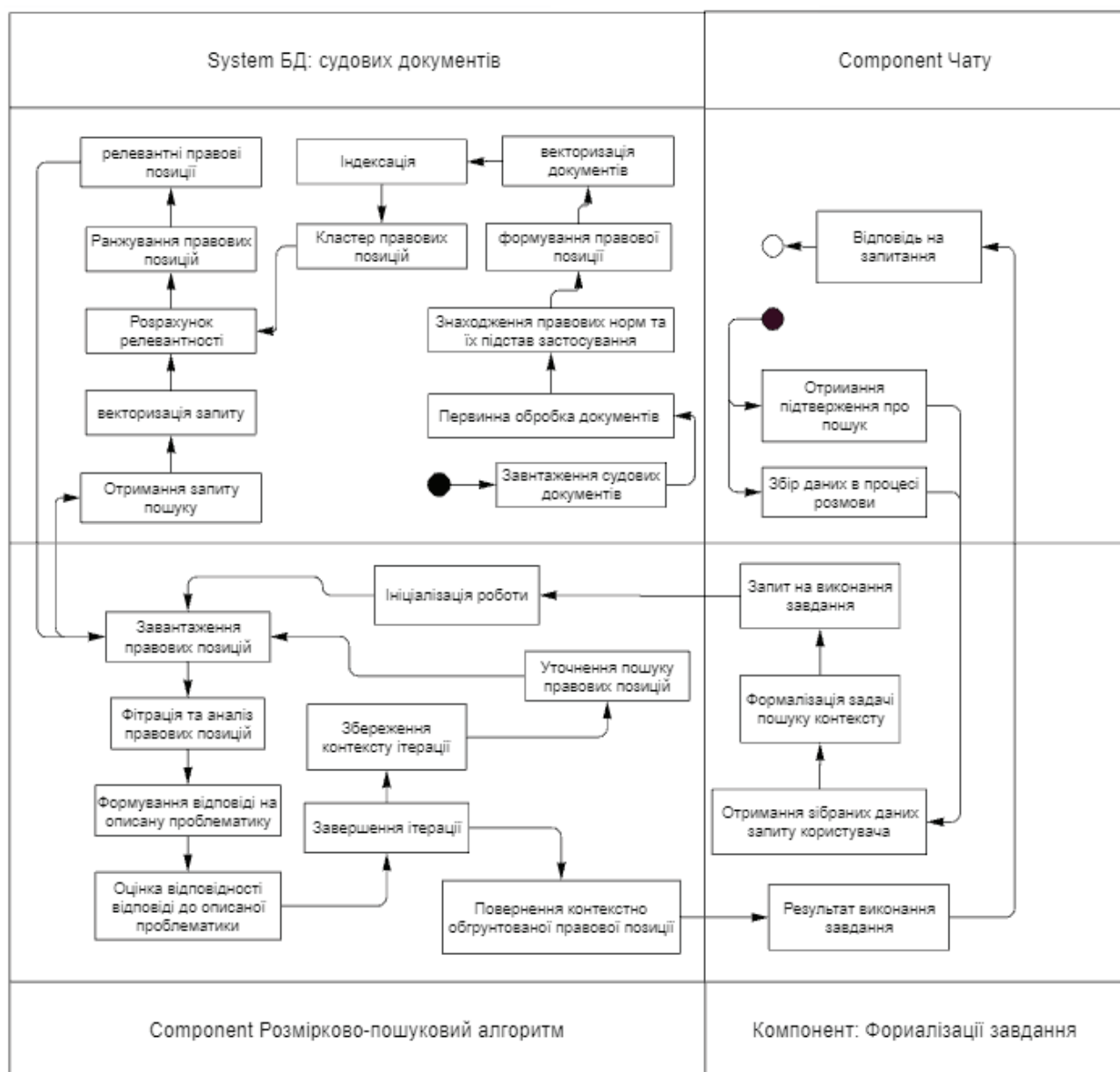


Рис. 5. Концептуальна модель NLP-системи пошуку контекстно обгрунтованої правової позиції. Діаграма діяльності у нотатції UM

Великі мовні моделі досягли значного успіху, проте вони мають значні обмеження, особливо у предметно-спеціальних або наукомістких завданнях, що викликає «галюцинації» під час роботи із запитом поза їх тренувальними даними або таких, що вимагають актуальної інформації. Галюцинація – це коли LLM генерує результати, які є синтаксично та семантично правильними, але не пов'язані з реальністю та ґрунтуються на хибних припущеннях.

Щоб подолати ці проблеми, був створений підхід Retrieval-Augmented Generation (RAG), який покращує точність роботи LLM, вилучаючи відповідні фрагменти документів із зовнішньої бази знань за допомогою розрахунку семантичної подібності. Із посиланням на зовнішні знання RAG ефективно зменшує проблему генерування недостовірного контенту [7].

Розмірково-пошуковий алгоритм є модульним RAG, який використовує варіацію модулів для планування дій для генерації контекстно обґрунтованої правової позиції на основі логічних правил і висновків.

Поставлений запит і вибрані документи синтезуються в цілісну підказку, на основі якої велика мовна модель має сформулювати відповідь. Генерація тексту за допомогою моделі може різнитися залежно від критеріїв конкретного завдання, дозволяючи їй спиратися на власні параметричні знання чи обмежувати свої відповіді інформацією, що міститься в наданих документах. У разі проведення діалогів будь-яку наявну історію розмов можна інтегрувати в підказку, що дозволяє моделі ефективно брати участь у багатоходовій діалоговій взаємодії [7].

Робота розмірково-пошукового алгоритму ініціалізується компонентом формалізації завдання пошуку, після чого компонент виконує такі завдання:

- пошук релевантної правової позиції та її правових норм з підставами їх застосування відповідно до запиту користувача;
- фільтрація і критика правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування;
- сумаризація релевантних правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування у контекстно обґрунтовану правову позицію;
- оцінювання сформованої правової позиції – чи задовольняє вона описану проблематику повністю;
- уточнення запиту пошуку релевантних правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування для підкріплення або спро-

щення сформованої правової позиції;

- аугментація правових позицій та їх правових норм з підставами їх застосування до наявної правової позиції для її уточнення та доповнення;

- повернення згенерованої контекстно обґрунтованої правої позиції з посиланнями на ресурси, які були задіяні для її створення.

Компонент Чата (компонент судовий асистент) – компонент взаємодії системи з користувачем, він є етапом збору характеристик судової справи користувача та його проблематики, на основі яких буде створено завдання для розмірково-пошукового алгоритму. Передає зібрані дані до компонента формалізації у разі повноти зібраних даних та готовності користувача. Після завершення створення контекстно обґрунтованої правової позиції повертає користувачу результат роботи розмірково-пошукового алгоритму.

Верифікація концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції

Розроблена концептуальна модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції формалізована у такому вигляді:

- діаграми Венна, що складається із множин сутностей судових документів на усіх стадіях їх життєвого циклу (D); сутностей інструментів пошуку, аналізу, обробки, трансформування та генерації тексту та текстових даних (I); сутностей проблем, завдань і задач пошуку судових документів, потрібних для винесення судових рішень або формування правової позиції (T).

Перетин цих множин враховує такі сутності цих множин, які формуються на основі наявних властивостей інтеграції/інтероперабельності між елементами множин може бути формалізована як множина трійок елементів міждисциплінарних ресурсів (сутностей) із трьох множин ресурсів (сутностей): сутності судових документів на всіх стадіях їх життєвого циклу (D); сутностей інструментів пошуку, аналізу, обробки, трансформування та генерації тексту та текстових даних (I); сутностей проблем, завдань і задач пошуку судових документів, потрібних для винесення судових рішень або формування правової позиції (T) таких, що мають спільну властивість/ознаку, яка забезпечує інтеграцію/інтероперабельність між елементами $d \in D$, $i \in I$, $t \in T$ і встановлює відповідності колаборації C_{dspd} та C_{dpsd} між елементами цих множин;

– подання моделі системи у вигляді бізнес-профілю Еріксона–Пенкера дозволяє визначити та врахувати усі можливі класи сутностей, формалізувати всі сутності системи і формалізувати процеси та бізнес-правила, за якими ці процеси взаємодіють;

– структурне подання системи у вигляді діаграми компонентів і динамічне подання у вигляді діаграми діяльності відображають внутрішню структуру компонентів, їх можливу реалізацію та інтерфейси взаємодії між цими компонентами, що дає можливість впорядкувати та систематизувати не тільки процес розробки, а й етап експлуатації системи з метою її наступного вдосконалення та модифікації.

Таким чином, ми доводимо верифікацію концепту та концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції.

Валідація концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції

Валідацію NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції будемо проводити методом порівняльного аналізу СП КОПП з відомими системами пошуку судових рішень в судочинстві України. У таблиці показано результати порівняльного аналізу розробленої системи з наявними на ринку трьома основними інформаційними ресурсами:

– єдиний державний реєстр судових рішень [9];

– закон онлайн [10];

– база правових позицій верховного суду [11].

Пошуковий алгоритм вказує, яким чином система шукає релевантні документи відповідно до запиту користувача. Алгоритм Мішок слів передбачає, що слова в документі є незалежними, і шукає появу кожного слова запиту в тексті. Потім, на основі знайдених слів з запиту, розраховує релевантність документу. Пошук на основі цього алгоритму надає користувачу можливість скласти складний запит за допомогою операторів AND, що ставиться між словами, якщо обидва мають бути в документі, OR, що ставиться між словами, якщо хоча б одне слово має бути в документі, NOT, якщо документ не має містити слова, (), якщо слова мають бути в зазначеній послідовності й разом.

Правові позиції та пошук за ними надає користувачу можливість пошуку судових рішень за правовими позиціями та нормами застосування права. Правова позиція – це текст, що визначає кластер судових рішень, які на поточний момент використовуються в судочинстві для обґрунтування правової позиції конкретного судового рішення.

Допомога у формуванні запиту надає користувачу допомогу в пошуку через підказку уточнювальних слів, законів, норм застосування права, які слід додати або виключити із запиту, щоб отримати релевантні документи.

Таблиця. Порівняльний аналіз СП КОПП з наявними системами пошуку правової позиції в судочинстві України

Функціональність	Система			
	ЄДРСР	Закон онлайн	База правових позицій верховного суду	Система пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції
Пошуковий алгоритм	Мішок слів та метадані	Мішок слів та метадані	Мішок слів та метадані	Семантичний пошук (векторний пошук) та метадані
Правові позиції та пошук за ними (короткий змістовний текст суті документа)	Немає	Створюють фахівці з права	Створюють фахівці з права	Автоматично на основі генерації тексту
Допомога у формуванні запиту	Немає	Немає	Немає	Так
Виділення змістовної частини	Немає	Немає	Немає	Так
Пошук за числовими сутностями (статті кодексів, гроші та ін.)	Немає	Немає	Немає	Так

Виділення змістовної частини надає користувачу можливість знайти в тексті відповідь на поставлене запитання. Оскільки зазвичай судові рішення можуть бути великими текстовими файлами, то логічно показати користувачу саме релевантну частину документа, а не весь документ.

Сутності задані у числовому вигляді надають користувачу можливість пошуку за числовими сутностями. Числові сутності включають цифри та їх контекст, наприклад, номер статті кодексу та його назву. Наприклад, якщо користувачу потрібна ст. 124 Кримінального Кодексу, будуть видаватися документи, в яких було знайдено цю сутність, а не документи, що містять токени 124, кримінальний, кодекс, стаття.

Основним недоліком відомих систем порівняно з розробленою є відсутність ітеративної взаємодії з користувачем у процесі пошуку правових позицій, результатом пошуку є увесь документ, а не його релевантна частина, використання тільки людського анотування тексту.

Висновки

1. Встановлено, що є ряд важливих філософських, правових та технічних проблем у процесі пошуку правових позицій. Встановлено міждисциплінарний характер проблеми розробки концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції на множині судових рішень і необхідність автоматизації процесів пошуку правових позицій для судової практики.

2. Запропоновано концепт NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової по-

зиції у вигляді діаграми Венна як набір сутностей судочинства та їх колаборацій. Така декомпозиція і систематизація сутностей судочинства дає нам глибше уявлення про те, що таке концепт СП КОПП у судочинстві України, які завдання вона вирішує, і водночас показує, наскільки широкою є область знань, застосовувана для організації пошуку та аналізу судових рішень.

3. Розроблено концептуальну модель NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції на множині судових рішень судочинства України, що ґрунтується на модифікованому бізнес-профілі Еріксона–Пенкера подання системи на метарівні, що дає можливість врахувати й однозначно описати всі класи сутностей такої NLP-системи.

Розроблено динамічне та структурне подання концептуальної моделі NLP-системи пошуку контекстно обґрунтованої правової позиції у вигляді діаграми компонентів та діаграми діяльності, що відображають внутрішню структуру компонентів, їх можливу реалізацію та інтерфейси взаємодії між цими компонентами, що дає можливість впорядкувати та систематизувати не тільки процес розробки, а й етап експлуатації NLP-системи з метою її вдосконалення та модифікації.

4. Порівняльний аналіз функціональності концептуальної моделі NLP-системи з основними наявними системами пошуку судових рішень у судочинстві показує, що розроблена NLP-система щонайменше не поступається за функціональністю у порівнянні з відомими системами і має додаткові можливості для користувачів щодо автоматизації процесів пошуку релевантної правової позиції.

Список використаної літератури

- [1] Про затвердження Положення про автоматизовану систему документообігу суду, *Рада суддів України*, Рішення від 02.04.2015, № 25. Available: <https://zakon.rada.gov.ua/go/v0025414-15>
- [2] Велика українська енциклопедія. Тематичний Реєстр гасел з напрямку «Юридичні науки», уклад.: В.Л. Бабка, М.М. Шумило, за ред. д-ра. іст. наук, проф. А.М. Киридон, Київ: Держ. наук. установа «Енциклопедичне видавництво», 2017, 152 с. Available: https://ev.vue.gov.ua/wp-content/uploads/2018/02/Law_full.pdf
- [3] V.V. Lazariev, “Legal standpoint: general legal characteristics”, *Bulletin of Kharkiv National University of Internal Affairs*, 2023, vol. 101, no. 2 (p. 1), p. 20–31. Available: <https://doi.org/10.32631/v.2023.2.02>
- [4] K.D. Ashley, *Artificial Intelligence and Legal Analytics: New Tools for Law Practice in the Digital Age*, Cambridge University Press, 2017. Available: <https://doi.org/10.1017/9781316761380>
- [5] P. Maslianko and Y. Sielskiy, “Data Science – Definition and Structural Representation”. *System Research & Information Technologies*, 2021, № 1, pp. 61–78. Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.1.05>
- [6] П.П. Маслянюк, Є.П. Сельський, “Метод системної інженерії систем нейронного машинного перекладу”, *KPI Science News*, 2021, № 2, с. 46–55. Available: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2021.2.236939>
- [7] Yunfan Gao, Yun Xiong, Xinyu Gao, Kangxiang Jia, Jinliu Pan, Yuxi Bi, Yi Dai, Jiawei Sun, Meng Wang, “Haofen Wang Retrieval-Augmented Generation” for *Large Language Models*, A Survey, 2024. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.10997>

- [8] S. Bruch, “Foundations of Vector Retrieval”, Cham: *Springer Nature Switzerland*, 2024. ISBN 3031551826, 9783031551826
- [9] Єдиний державний реєстр судових рішень. Available: <https://reyestr.court.gov.ua/>
- [10] Закон Он-лайн. Available: <https://zakononline.com.ua/>
- [11] База правових позицій верховного суду. Available: <https://lpd.court.gov.ua/home>

Pavlo Maslianko, Sergy Mirko

CONCEPTUAL MODEL OF THE NLP-SYSTEM FOR SEARCHING FOR THE RELEVANT LEGAL POSITION ON THE MULTIPLE COURT DECISIONS OF THE JUDICIARY OF UKRAINE

Background. An applied problem of automating the search for relevant legal positions on a set of court decisions in the judiciary of Ukraine. The possibility of developing a high-quality NLP system for searching for a relevant, contextually justified legal position on a set of court decisions in the judiciary of Ukraine, which, based on the user's request, produces expert answers to the user's request by applying a reasoning-search algorithm based on large language models.

Objective. To develop and formalize the concept and conceptual model of the NLP system for finding legal positions on the basis of interdisciplinary knowledge of a technical and philosophical direction, which covers the existence of a person, community, enterprises, institutions and organizations, state authorities, and also substantiates the formation of a legal position on the basis of a plurality. legislative acts and court decisions.

Methods. The method of implementation of the NLP system for searching for a context-based legal position lies in the interaction of the essences of tasks related to the judiciary of Ukraine, tools for analysis, processing, text generation and available available court decisions of the judiciary of Ukraine based on the Erikson-Penker business profile and large language models.

Results. The proposed interdisciplinary model of the concept of the NLP system of finding a solution to the problem, tasks and tasks of searching court documents for more rendering of court decisions and/or formation of a legal position in the form of a Venn diagram as a set of entities and their cooperation, which integrates philosophical, legal and technical knowledge. The Erikson–Penker business profile of the conceptual model of the NLP system for searching for a context-based legal position is formalized. A formalized model of the work process of the NLP system of searching for a context-based legal position based on the RAG method. A conceptual model of the NLP system for searching for a context-based legal position has been developed in the form of a structural mapping based on a component diagram and a dynamic mapping based on an activity diagram with a description of the internal structure of the components.

Conclusions. A number of important philosophical, legal and technical problems have been identified in the process of searching for legal positions on many court decisions. The interdisciplinary nature of the problem of developing the concept and conceptual model of the NLP system for finding a context-based legal position on a set of court decisions and the need to automate the process of finding a legal position for judicial practice has been established. At the meta levels, the concept of the NLP system for finding context-based legal positions on Venn diagrams and the conceptual model of the NLP system based on the modified Erikson-Penker business profile as a system of entities and cooperation are formalized. A conceptual model of the NLP system for finding a context-based legal position has been developed in the form of a structural mapping based on a diagram of components and a dynamic mapping based on an activity diagram with a description of the internal structure of the components. The functionality of the NLP system was compared with other main existing systems for searching court decisions in the judiciary and it was established that the developed system, at least, is not implemented in terms of functionality of existing systems and has additional opportunities for users.

Keywords: NLP system, legal position, court decisions, interdisciplinary approach, Erikson–Penker profile, business language networks (LLM), search augmented text generation (RAG), search engines, vector storage, model embedding.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
10 жовтня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-2.289350

УДК 621.357.6

М.М. Котик, Г.С. Васильєв*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*Відповідальний автор: g.vasyliiev@kpi.ua

АНАЛІЗ ВПЛИВУ УМОВ ЛОКАЛЬНОГО ЕЛЕКТРООСАДЖЕННЯ НА ТОЧНІСТЬ ЕЛЕКТРОХІМІЧНОГО 3D-ДРУКУ

Проблематика. Адитивне виробництво металевих деталей методом локального електроосадження – новий перспективний напрям, що має ряд унікальних особливостей. Використання електролізу дозволяє виготовляти металеві вироби за кімнатної температури з високою точністю з малими енергетичними витратами. Точність та швидкість електрохімічного 3D-друку перебувають в оберненій залежності, а тому важливим є пошук оптимальних умов електроосадження з максимальною швидкістю без погіршення точності.

Мета дослідження. Метою цієї роботи було проаналізувати вплив параметрів електроосадження (міжелектродна відстань, електропровідність та поляризованість електроліту) на точність формування осаду в комп'ютерній моделі та провести експериментальну верифікацію оптимальних умов під час електроформування реального об'єкта із сульфатного електроліту міднення.

Методика реалізації. Для досягнення цілей дослідження було використано комп'ютерне моделювання процесу електрохімічного осадження в середовищі COMSOL Multiphysics та електрохімічні вимірювання характеристик сульфатних електролітів міднення.

Результати дослідження. Комп'ютерним моделюванням встановлено оптимальні умови: відстань між краєм капіляра та поверхнею, на якій відбувається осадження, не більше 0,5 мм, електроліт, в якому величина оберненого нахилу катодної поляризаційної кривої становить не нижче 2000 мА/(ВЧсм²) та електропровідність не вище 0,02 См/с. Досліджено вплив складу електроліту на обернену поляризованість катодного процесу та його електропровідність. Підібрано оптимальний склад електроліту, що містить 200 г/л CuSO₄, 60 г/л H₂SO₄, 0,2 г/л KCl та добавку RUBIN T-200. В обраному електроліті величина оберненого нахилу катодної поляризаційної кривої становить 2120 мА/(ВЧсм²). Проведено верифікацію процесу локального електроосадження в обраному електроліті під час електроформування циліндричного об'єкта діаметром 4 мм і заввишки 100 мкм. Визначено, що за межами капіляра робочого електрода осаджено не більше 5 %.

Висновки. Результати роботи можуть бути використані для створення системи електрохімічного 3D-друку. Подальші дослідження слід спрямувати на апробацію отриманих параметрів локального електроосадження в установці, яка моделює роботу 3D-принтера, та встановити точність і швидкість друку тривимірного об'єкта.

Ключові слова: адитивне виробництво, електропровідність, склад електроліту, поляризація, локальне електроосадження.

Вступ

Адитивна технологія виробництва з металу є однією з найбільш затребуваних [1], оскільки метали залишаються на перших позиціях найбільш використовуваних матеріалів у світі. Відомі методи адитивного виробництва з металу вимагають застосування високоенергетичних пристроїв для локального плавлення металу: селективного лазерного плавлення (SLM) та електронно-променевого плавлення (EBM) [2–5],

а точність адитивного виробництва обмежена розміром гранул металевих порошків (для лазерного або електронно-променевого спікання). На відміну від них, електрохімічне адитивне виробництво (ЕСАМ) дозволяє отримувати вироби за кімнатної температури з допомогою електроосадження металу з електроліту [6–7].

Електрохімічне осадження дозволяє використовувати найменші частинки матеріалу – іони. Інші методи використовують металевий порошок або дріт, які мають набагато більші від

Пропозиція для цитування цієї статті: М.М. Котик, Г.С. Васильєв, “Аналіз впливу умов локального електроосадження на точність електрохімічного 3D-друку”, *Наукові вісті КПІ*, № 1–4, с. 86–92, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.289350

Offer a citation for this article: G.S. Vasyliiev, M.M. Kotyky “Analysis of the influence of local electrodeposition conditions on the accuracy of electrochemical 3D printing”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 86–92, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-2.289350

іона розміри. Основним напрямом досліджень є електрохімічне адитивне виробництво об'єктів мікронного та субмікронного розмірів. Застосування рідинного силового мікроскопа (FluidFM) дозволяє виготовляти стовпи, голки, спіралі, з'єднувачі та інші об'єкти розміром лише кілька мікрметрів [8–12]. Техніка надзвичайно точна, однак швидкість осадження повільна.

Швидшим підходом для більших об'єктів є осадження в меніску [13–18]. Тут осадження відбувається в невеликому об'ємі розчину електроліту між капіляром і основою. Анод розміщений всередині капіляра, а основа поляризована катодно. Цей метод дозволяє друкувати плоскі об'єкти. Зокрема, є можливість виробництва з різних металів, які наносяться шар за шаром. Швидкість осадження вища, ніж за методом FluidFM, оскільки об'єм електроліту більший, однак швидкість росту визначається швидкістю дифузії іонів металу в меніску.

Ще більшої швидкості осадження можна досягти, використовуючи електроосадження з великого об'єму електроліту [14–26]. Висока швидкість осадження вимагає високої концентрації іонів металу, що робить електроліт провідним, а електричне поле легко розподіляється навколо анода. Для локалізації області осадження на основу наносять маски [27] або мініатюризують розміри анода [28]. Об'єкти друкуються послідовним осадженням металу під анодом, доки нанесений шар не торкнеться анода. Після цього анод пересувається в інше положення або вгору, і процес повторюється. У цьому стані осадження також обмежене швидкістю дифузії іонів металу, але їх концентрація набагато вища, ніж під час осадження в меніску. Для досягнення більшої швидкості осадження замість постійного застосовують імпульсний струм.

Постановка задачі

Метою цієї роботи було проаналізувати вплив параметрів електроосадження (міжелектродна відстань, електропровідність та поляризованість електроліту) на точність формування осаду в комп'ютерній моделі та провести експериментальну верифікацію оптимальних умов під час електроформування реального об'єкта з сульфатного електроліту міднення.

Методика проведення досліджень

Комп'ютерне моделювання. Комп'ютерна модель побудована в середовищі COMSOL

Multiphysics в модулі “Long-term growth of copper deposits” [29]. Модель описують такими рівняннями.

Поширення електричного поля в електродах:

$$\nabla \mathbf{i} = 0, \mathbf{i} = \sigma \nabla V \quad (1)$$

Поширення електричного поля в об'ємі електроліту:

$$\nabla \mathbf{i} = 0, \mathbf{i} = \kappa \nabla \phi. \quad (2)$$

Для поверхні електродів використано спрощені лінійні залежності:

$$\mathbf{i} \mathbf{n} = b \eta, \quad (3)$$

$$\eta = V - \phi - E^0, \quad (4)$$

де \mathbf{i} – густина струму; σ та κ – електропровідність електрода та електроліту відповідно; V – напруга на комірку; η – перенапруга; b – константа рівняння Тафеля; \mathbf{n} – вектор нормалі, направлений від поверхні електрода; ϕ – потенціал в електроліті; E^0 – рівноважний електродний потенціал.

В моделі (рис. 1) було визначено, як впливає на осадження металу завтовшки 100 мкм безпосередньо під капіляром варіювання таких параметрів:

- 1) відстань між поверхнею основи та краєм капіляра в межах 0,1–5 мм;
- 2) електропровідність електроліту в межах 0,01–0,5 См/см;
- 3) нахил катодної поляризаційної кривої (оберненої поляризованості) в межах 100–5000 мА/(В · см²).

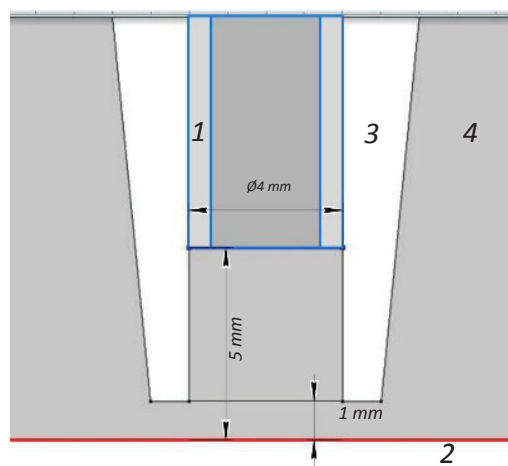


Рис. 1. Схема комірки електроосадження для комп'ютерної моделі: 1 – робочий електрод-анод; 2 – металева основа-катод; 3 – діелектричний капіляр; 4 – електроліт

Матеріали та реактиви. Експериментальну верифікацію результатів комп'ютерного моделювання проводили із використанням серії електродів міднення, склад яких наведено у табл. 1. Електроліти готували з реактивів марки ч.д.а.

Полярizaційні вимірювання. Полярizaційні залежності отримували в усіх досліджуваних електролітах із застосування традиційної триелектродної комірки. Робочий електрод – торцева частина мідного циліндра марки М1, запресованого в тефлон. Площа робочої поверхні – 0,2 см². Допоміжний електрод – платинова пластина 1×1 см, електрод порівняння – хлоридсрібний насичений. Полярizaцію проводили із застосуванням потенціостата Versastat-3-200 (Ametek).

Поверхню робочого електроду зачищали, знежирювали та занурювали в електроліт. Електрод витримували в розчині електроліту до встановлення стаціонарного потенціалу, що не змінювався впродовж 5–10 с. Анодні та катодні полярizaційні залежності отримували в гальваностатичному (витримуючи постійну величину струму впродовж 5 хв. для визначення значення потенціалу) та потенціодинамічному (зі швидкістю розгортки потенціалу 0,5 мВ/с) режимах. З полярizaційних залежностей визначали кут нахилу в області ділянки Тафеля.

Електропровідність розчинів електролітів вимірювали між двома однаковими платиновими електродами 1×1 см кожний, які були розміщені на відстані 1 см один від одного. Константу комірки визначали за 0,2 М розчином КСl. Опір між електродами вимірювали в діапазоні частот 10¹–10⁴ Гц із застосуванням потенціостата Versastat-3-200 (Ametek).

Таблиця 1. Склади електролітів для випробувань

Номер електроліту	CuSO ₄ , г/л	H ₂ SO ₄ , г/л	КСl, г/л	Желатин, мг/л	RUBIN T-200
1	300				
2	200				
3	200	60			
4	200	60	0,2		
5	200	60	0,2	25–50	
6	200	60	0,2		2 мл/л А 8 мл/л G 2 мл/л E

Локальне електроосадження. Верифікацію оптимальних умов електроосадження проводили електроформуванням циліндричного об'єкта. Для цього була зібрана установка, схема якої відповідає комп'ютерній моделі (рис. 1). Елек-

троосадження проводили в стаціонарному та імпульсному режимах на поверхні мідної пластини впродовж 90 хв., розраховуючи на осаження 100 мкм. Густина струму в стаціонарному та імпульсному режимі становила 5 А/дм², параметри імпульсу: тривалість 0,01 с, пауза 1 с.

Для аналізу осаджених зразків застосовували метод 3D-профілометрії. Профіль поверхні аналізували з точністю 0,625 мкм у горизонтальній площині та 0,25 мкм у вертикальній.

Результати та їх обговорення

Залежність товщини металу на різній відстані від центру анода залежно від відстані між капіляром та основою, провідності та оберненої поляризованості показано на рис. 2. З результатів комп'ютерного моделювання видно, що вплив провідності, оберненої поляризованості та відстані між краєм капіляра та поверхнею, на якій відбувається осаження, на кількість металу, осаженого за межами капіляра, не лінійний. Щоб забезпечити переважне осаження металу в області, обмеженій діаметром капіляра (осаження металу за межами капіляра не перевищує 15%), слід забезпечити відстань між краєм капіляра та поверхнею, на якій відбувається осаження, не більше 0,5 мм, електроліт, в якому нахил катодної полярizaційної кривої становить не нижче 2000 мА/(В·см²) та електропровідність не вище 0,02 См/см.

Полярizaційні залежності, отримані в електролітах різного складу, подано на рис. 3, а визначені параметри наведено в табл. 2. З даних видно, що концентрація іонів міді, кислоти та хлориду калію має незначний вплив на нахил полярizaційної кривої (зміна в межах 700–800 мА/см²/В). Порівняно з цим додавання поверхнево активних речовин, желатину та добавки Рубін суттєво змінює нахил катодної кривої. Експериментальна перевірка можливостей впливу на величину оберненого нахилу катодної полярizaційної кривої складу електроліту показала, що найбільший нахил 2120 мА/см²/В можна отримати в розчині № 6, що містить добавку RUBIN T-200.

Аналіз даних впливу складу електроліту та електропровідність (табл. 2) узгоджується із загальними міркуваннями про те, що збільшення концентрації електроліту та кількості кислоти в ньому підвищує електропровідність розчину.

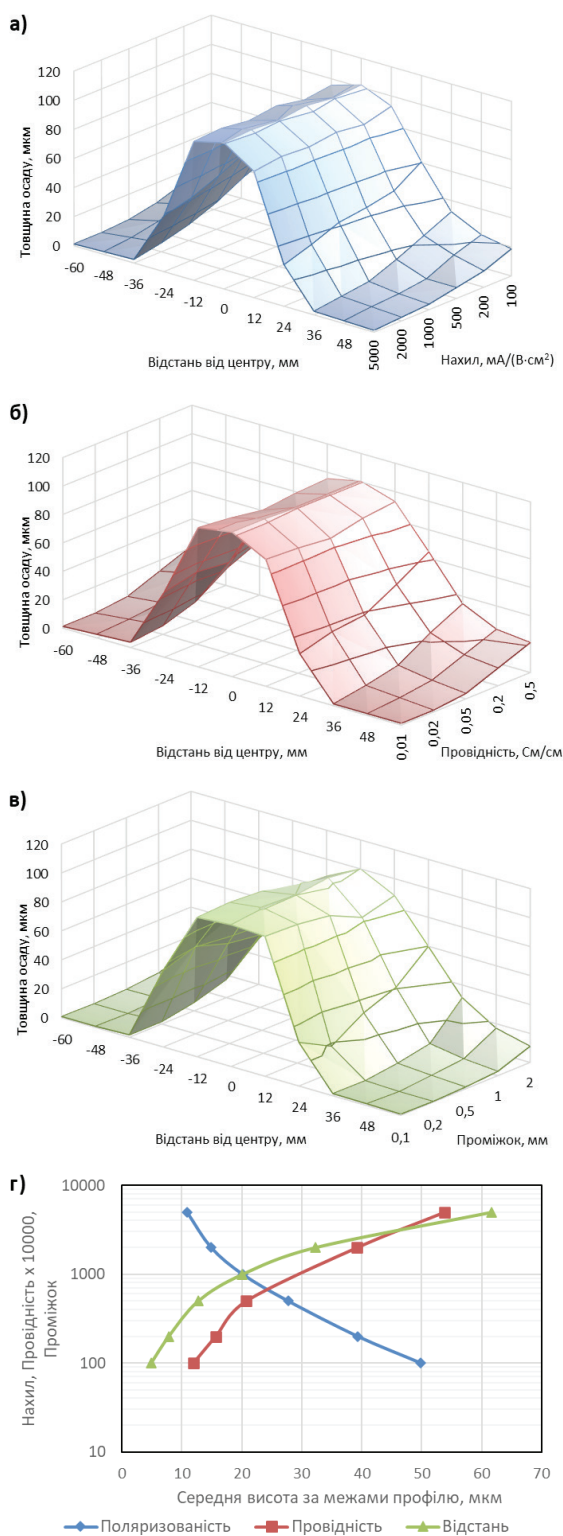


Рис. 2. Вплив параметрів електроосадження на розподіл товщини металу по поверхні: *a* – нахил поляризаційної кривої; *б* – електропровідність електроліту; *в* – відстані між краєм капіляра та поверхнею, на якій відбувається осадження; *г* – зведена залежність

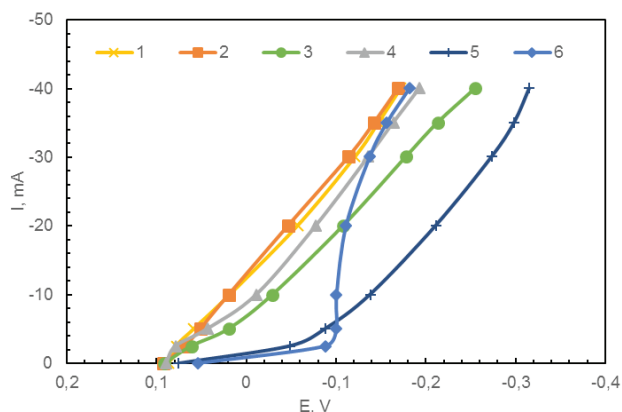


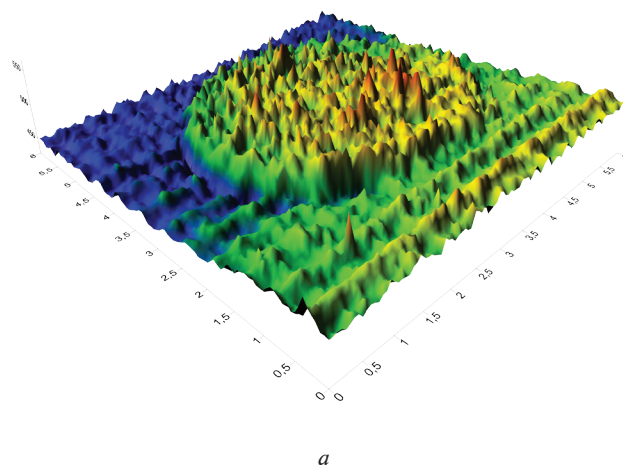
Рис. 3. Катодні стаціонарні поляризаційні криві процесу електроосадження міді з електролітів різного складу. Склад електролітів наведено в табл. 1

Таблиця 2. Склади електролітів для випробувань

Електроліт	Поляризованість катодного процесу di/dE , мА/см ² /В	Електропровідність, См/м
1	780	4,94
2	785	4,02
3	830	7,46
4	675	7,48
5	775	8,69
6	2120	5,68

Обраний склад електроліту верифікували для локального електроосадження об'єкта у формі циліндра. Об'єкт, осаджений за 1,5 години, проаналізували методом 3D-профілометрії (рис. 4).

З отриманих 3D-моделей електроосадженого металу було визначено усереднений профіль поверхні, який порівняли з очікуваним профілем (рис. 5).



a

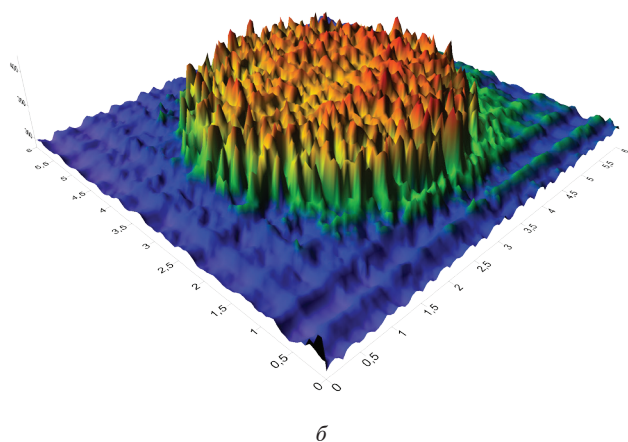


Рис. 4. 3D-профілометрія локально сформованих осадів завтовшки 100 мкм: а – постійний струм; б – імпульсний струм

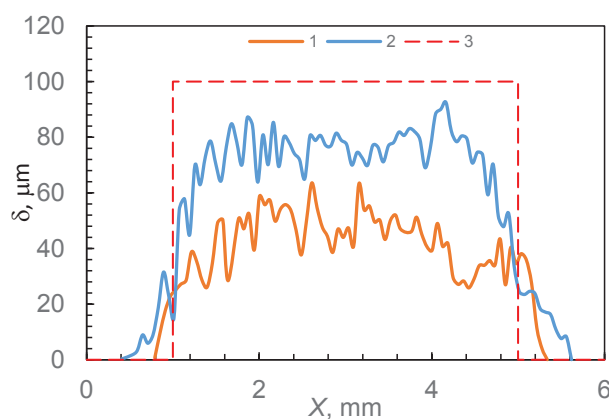


Рис. 5. Профілі локально сформованих осадів: 1 – постійний струм; 2 – імпульсний струм; 3 – очікуваний профіль

Порівняння кількості металу, осадженого в межах очікуваного профілю, із загальною кількістю осадженого металу показало, що за межами профілю осаджено 3,4 % в умовах електролізу постійним струмом та 5,0 % в умовах електролізу імпульсним струмом. Таким чином, застосування електроліту міднення № 6, склад

якого наведено в табл. 1, дозволяє забезпечити локальне осадження металічної міді в межах робочого капіляра не менше ніж на 95 %.

Висновки

1. Комп'ютерним моделюванням встановлено оптимальні умови: відстань між краєм капіляра та поверхнею, на якій відбувається осадження, не більше 0,5 мм, електроліт, в якому величина оберненого нахилу катодної поляризаційної кривої становить не нижче 2000 мА/(В · см²) та електропровідність не вище 0,02 См/с.

2. Досліджено вплив складу електроліту на обернену поляризованість катодного процесу та його електропровідність. Підібрано оптимальний склад електроліту, що містить 200 г/л CuSO₄, 60 г/л H₂SO₄, 0,2 г/л KCl та добавку RUBIN T-200. В обраному електроліті величина оберненого нахилу катодної поляризаційної кривої становить 2120 мА/(В · см²).

2. Проведено верифікацію процесу локального електроосадження в обраному електроліті під час електроформування циліндричного об'єкта діаметром 4 мм і заввишки 100 мкм. Визначено, що за межами капіляра робочого електрода осаджено не більше 5 %.

3. Результати роботи можуть бути використані для створення системи електрохімічного 3D-друку. Подальші дослідження слід спрямувати на апробацію отриманих параметрів локального електроосадження в установці, яка моделює роботу 3D-принтера, та встановити точність і швидкість друку тривимірного об'єкта.

Подяка

Робота виконана за підтримки МОН України в межах проєкту молодих вчених «Адитивна технологія електроосадження металів для 3D-друку нових матеріалів», 2022 року. Номер державної реєстрації 0122U001523.

Перелік посилань

- [1] I. Gibson, D. Rosen, B. Stucker, *Additive Manufacturing Technologies*, Springer, New York, USA, 2010, p. 472. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1120-9>
- [2] L.E. Murr, S.M. Gaytan, D.A. Ramirez, E. Martinez, J. Hernandez, K.N. Amato, P.W. Shindo, F.R. Medina, R.B. Wicker, "Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies", *Journal of Materials Science & Technology*, vol. 1 no 1 pp. 42–54, 2012. [https://doi.org/10.1016/S2238-7854\(12\)70009-1](https://doi.org/10.1016/S2238-7854(12)70009-1)
- [3] W.E. Frazier, "Metal additive manufacturing: a review", *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 23 no 6 pp. 1917–1928, 2014. <https://doi.org/10.1007/s11665-014-0958-z>
- [4] D. Herzog, V. Seyda, E. Wycisk, C. Emmelmann, "Additive manufacturing of metals", *Acta Materialia*, vol. 117, pp. 371–392, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.07.019>

- [5] C. Kurner, "Additive manufacturing of metallic components by selective electron beam melting – a review", *International Materials Reviews*, vol. 61 no 5 pp. 361–377, 2016. <https://doi.org/10.1080/09506608.2016.1176289>
- [6] T.M. Braun, D.T. Schwartz, "The emerging role of electrodeposition in additive manufacturing", *The Electrochemical Society Interface*, vol. 25, pp. 69–73, 2016. <https://doi.org/10.1149/2.F07161if>
- [7] X. Li, P. Ming, S. Ao, W. Wang, "Review of additive electrochemical micro-manufacturing technology", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 173, pp. 1–31, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2021.103848>
- [8] G. Ercolano, T. Zambelli, C. van Nesselroy, D. Momotenko, J. Vуrus, T. Merle, W.W. Koelmans, "Multiscale additive manufacturing of metal microstructures", *Advanced Engineering Materials*, vol. 22 no 2, pp. 1–8, 2020. <https://doi.org/10.1002/adem.201900961>
- [9] L. Hirt, R.R. Gr̃ter, T. Berthelot, R. Cornut, J. Vуrus, T. Zambelli, "Local surface modification via confined electrochemical deposition with FluidFM", *RSC Advances*, vol. 5 no 103, pp. 84517–84522, 2015. <https://doi.org/10.1039/c5ra07239e>
- [10] W. Ren, J. Xu, Z. Lian, P. Yu, H. Yu, "Modeling and experimental study of the localized electrochemical micro additive manufacturing technology based on the fluidFM", *Materials*, vol. 13 no 12, pp. 1–14, 2020. <https://doi.org/10.3390/ma13122783>
- [11] G. Ercolano, C. van Nesselroy, T. Merle, J. Vуrus, D. Momotenko, W.W. Koelmans, T. Zambelli, "Additive manufacturing of sub-micron to sub-mm metal structures with hollow AFM cantilevers", *Micromachines*, vol. 11 no 1, pp. 1–14, 2020. <https://doi.org/10.3390/mi11010006>
- [12] W. Ren, J. Xu, Z. Lian, X. Sun, Z. Xu, H. Yu, "Localized electrodeposition micro additive manufacturing of pure copper microstructures", *International Journal of Extreme Manufacturing*, vol. 4 no 1, pp. 1–11, 2021. <https://doi.org/10.1088/2631-7990/ac3963>
- [13] A. Ambrosi, R.D. Webster, M. Pumera, "Electrochemically driven multi-material 3D-printing". *Applied Materials Today*, vol. 18, pp. 1–9, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2019.100530>
- [14] S. Burlison, M. Minary-Jolandan, "Multiphysics simulation of microscale copper printing by confined electrodeposition using a nozzle array", *Journal of Applied Physics*, vol. 131 no 5, pp. 1–8, 2022. <https://doi.org/10.1063/5.0072183>
- [15] Y. Guo, P. Liu, P. Jiang, Y. Hua, K. Shi, H. Zheng, Y. Yang, "A flow-rate-controlled double-nozzles approach for electrochemical additive manufacturing", *Virtual and Physical Prototyping*, vol. 17 no 1, pp. 52–68, 2022. <https://doi.org/10.1080/17452759.2021.1989751>
- [16] X. Chen, X. Liu, P. Childs, N. Brandon, B. Wu, "A low cost desktop electrochemical metal 3D printer", *Advanced Materials Technologies*, vol. 2 no 10, pp. 2–7. <https://doi.org/10.1002/admt.201700148>
- [17] F. Zhang, D. Li, W. Rong, L. Yang, Y. Zhang, "Study of microscale meniscus confined electrodeposition based on COMSOL", *Micromachines*, vol. 12 no 12, pp. 2–10, 2021. <https://doi.org/10.3390/mi12121591>
- [18] X. Chen, X. Liu, M. Ouyang, J. Chen, O. Taiwo, Y. Xia, P. Childs, N.P. Brandon, B. Wu, "Multi-metal 4D printing with a desktop electrochemical 3D printer", *Scientific Reports*, vol. 9 no 1, pp. 1–9, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-40774-5>
- [19] A. Kamaraj, S. Lewis, M. Sundaram, "Numerical study of localized electrochemical deposition for micro electrochemical additive manufacturing", *Procedia CIRP*, vol. 42, pp. 788–792, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2016.02.320>
- [20] V.M. Volgin, V.V. Lyubimov, I.V. Gnidina, A.D. Davydov, T.B. Kabanova, "Simulation of localized electrodeposition of micro-wires and microtubes", *Procedia CIRP*, vol. 68, pp. 242–247, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2017.12.056>
- [21] E.M. El-Giar, R.A. Said, G.E. Bridges, D.J. Thomson, "Localized electrochemical deposition of copper microstructures", *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 147 no 2, pp. 586–591, 2000. <https://doi.org/10.1149/1.1393237>
- [22] C.Y. Lee, C.S. Lin, B.R. Lin, "Localized electrochemical deposition process improvement by using different anodes and deposition directions", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 18 no 10, pp. 1–8, 2008. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/18/10/105008>
- [23] J. C. Lin, T. K. Chang, J. H. Yang, Y. S. Chen, C. L. Chuang, "Localized electrochemical deposition of micrometer copper columns by pulse plating", *Electrochimica Acta*, vol. 55 no 6, pp. 1888–1894, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.electacta.2009.11.002>
- [24] M. M. Sundaram, A. B. Kamaraj, V. S. Kumar, "Mask-less electrochemical additive manufacturing: a feasibility study", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 137 no 2, pp. 1–10, 2015. <https://doi.org/10.1115/1.4029022>
- [25] M. Sundaram, A. B. Kamaraj, G. Lillie, "Experimental study of localized electrochemical deposition of Ni-Cu alloy using a moving anode", *Procedia CIRP*, vol. 68, pp. 227–231, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2017.12.053>
- [26] G. Vasylyev, V. Vorobyova, D. Uschapovskiy, O. Linyucheva, "Local electrochemical deposition of copper from sulfate solution", *Journal of Electrochemical Science and Engineering*, vol. 12 no 3, pp. 557–563, 2022. <http://dx.doi.org/10.5599/jese.1352>
- [27] L.T. Romankiw, "A path: from electroplating through lithographic masks in electronics to LIGA in MEMS", *Electrochimica Acta*, vol. 42 no 20-22, pp. 2985–3005, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0013-4686\(97\)00146-1](https://doi.org/10.1016/S0013-4686(97)00146-1)
- [28] H. Hu, H.J. Kim, S. Somnath, "Tip-based nanofabrication for scalable manufacturing", *Micromachines*, vol. 8 no 3, pp. 90–120, 2017. <https://doi.org/10.3390/mi8030090>
- [29] Electrode Growth Next to an Insulator, [Online]. Available: <https://www.comsol.com/model/electrode-growth-next-to-an-insulator-10212>

G.S. Vasyliiev, M.M. Kotyk

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF LOCAL ELECTRODEPOSITION CONDITIONS ON THE ACCURACY OF ELECTROCHEMICAL 3D PRINTING

Background. Additive manufacturing of metal parts by local electrodeposition is a new promising area with several unique features. The use of electrolysis makes it possible to manufacture metal parts at room temperature with high accuracy and low energy consumption. The accuracy and speed of electrochemical 3D printing are inversely related, and therefore it is important to find optimal electrodeposition conditions at maximum speed without degrading accuracy.

Objective. The purpose of this work was to analyse the influence of electrodeposition parameters (electrode distance, electrical conductivity and electrolyte polarization) on the accuracy of metal deposit formation in a computer model and to conduct experimental verification of optimal conditions for electroforming a real object from copper sulphate electrolyte.

Methods. To achieve the goals of the study, computer simulation of the electrochemical deposition process in the COMSOL Multiphysics software and electrochemical measurements of the characteristics of copper sulphate electrolytes were used.

Results. Computer simulation established optimal conditions: the distance between the edge of the capillary and the surface on which deposition occurs is not more than 0.5 mm, the electrolyte in which the inverse slope of the cathode polarization curve is not lower than 2000 mA/(V×cm²) and the electrical conductivity is not higher than 0.02 S/cm. The influence of the electrolyte composition on the inverse polarization of the cathode process and its electrical conductivity was investigated. The optimal composition of the electrolyte was selected, containing 200 g/L CuSO₄, 60 g/L H₂SO₄, 0.2 g/L KCl and RUBIN T-200 additive. In the selected electrolyte, the value of the inverse slope of the cathode polarization curve is 2120 mA/(V×cm²). Verification of the process of local electrodeposition in the selected electrolyte during the electroformation of a cylindrical object with a diameter of 4 mm and a height of 100 μm was carried out. It was determined that no more than 5 % of metal was deposited outside the capillary of the working electrode.

Conclusions. The results of the work can be used to create an electrochemical 3D printing system. Further research should be aimed at approbation of the obtained parameters of local electrodeposition in an installation that simulates the operation of a 3D printer and establish the accuracy and speed of printing of a three-dimensional object.

Keywords: additive manufacturing, electrical conductivity, electrolyte composition, polarization, local electrodeposition.

Рекомендована Радою
хіміко-технологічного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
19 жовтня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI 10.20535/kpissn.2023.1-4.297046

UDC [678.742.2:549.623.9]:544.526.2+620.17](045)

Kovinchuk Iryna^{1,2*}, Sokolsky Georgii¹, Lazzara Giuseppe²

¹Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

²University of Palermo, Palermo, Italy

*Corresponding author: i.kovinchuk.hd11f@kpi.ua

SINGLE-STAGE AND SIMPLE FABRICATION OF POLYETHYLENE FILMS DECORATED WITH HALLOYSITE NANOTUBES

Background. Environmental pollution with plastic waste is a global problem that requires searching for effective and safe ways to dispose or process secondary raw materials. The use of photocatalysts for polymer degradation is a modern approach. Combining photocatalysts with support material to improve stability, activity, and lifetime is an important area of research.

Objective. The aim of the work was to develop a technique for applying nanomaterials to the surface of a polyethylene film by partially dissolving the upper layer of the polymer in a heated nanomaterial suspension, namely, aluminosilicate halloysite nanotubes in a solvent. Cyclohexane was used as a solvent.

Methods. Thermogravimetric, optical, and dynamic mechanical analyses of synthesised samples were carried out, and their properties were compared with reference samples of pure polyethylene and treated without the addition of nanomaterial.

Results. A method of decorating PE film with halloysite nanotubes has been developed. The introduction of 2.83 % by mass under the condition of immersing the film in a suspension of HNTs in cyclohexane (3 % by mass) at a temperature of 50 °C for 120 seconds was achieved. The decrease of the contact angle of the sample to 77.11° indicates the inclusion of hydrophilic HNTs into the surface layer of PE. Optical analysis confirmed the uniform distribution of particles on the surface of the film. The synthesized samples show a decrease in mechanical properties such as elasticity and tensile strength due to the destructive effect of the solvent on the polymer.

Conclusions. Different conditions of application of HNTs on the surface of PE films using cyclohexane were tested. A method allows to achieve the introduction of a maximum of 2.83 % by mass of HNT. This method confirmed the possibility of attaching nanomaterials, namely HNTs, to the surface of the film by partially dissolving the surface layer of the polymer. Unlike our previous study [3], where the solvent casting method was used to introduce the catalyst into the PE film, the above approach does not require complete dissolution of the polymer and heating of the material to high temperatures and can be applied to the processing of industrially produced PE films. The addition of functional materials can be useful for modifying the properties of films, in particular PE. Studying the peculiarities of adding a photocatalyst to a polymer film at ambient temperature and the technology of industrial production of a PE film capable of decomposition can be the next stage of research.

Keywords: polymer, halloysite, nanomaterial, thermogravimetry, chemical technology

Introduction

The wide use of plastics, the difficulties of their recycling, and the long degradation time in ambient conditions give rise of environmental pollution on a planetary scale. Understanding this problem, the European Commission adopted the EU Plan, in which all plastic packaging will be recyclable by 2030 [1]. The biggest challenge is household waste,

as a mixture of different types of contaminated plastics. One of the approaches used for processing household plastic is mechanical recycling. There are two types of mechanical recycling: Primary recycling (processing exclusively uncontaminated plastic of a single type into a product of equal quality) and Secondary recycling. A latter is often demanding on materials since preliminary sorting by type and rejection of contaminated plastic or washing is

Пропозиція для цитування цієї статті: І.В. Ковінчук, Г.В. Сокольський, Дж. Лаззара, “Одностадійне та просте декорування поліетиленових плівок галузитними нанотрубками”, *Наукові вісті КПІ*, № 1–4, с. 93–98, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.297046

Offer a citation for this article: Kovinchuk Iryna, Sokolsky Georgii, Lazzara Giuseppe, “Single-stage and simple fabrication of polyethylene films decorated with halloysite nanotubes”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 93–98, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.297046

necessary. Thus, recycled material costs are often higher than pristine plastic, and the quality of the processed material decreases with each cycle. As an alternative, thermo-chemical recycling – is less demanding and often acceptable for heterogeneous raw materials. The main idea is to split the polymer into individual monomers to produce a high-quality secondary product. Quaternary recycling is used for highly contaminated packaging, namely, waste incineration for energy recovery. The most environmentally friendly way for waste utilization is biological. Plastics can be degraded with the help of bacteria, fungi and enzymes. The disadvantage of biorecycling is its extremely long duration. Using landfills for waste disposal is one of the common methods, but it leads to soil and water contamination and occupies large areas.

Solid phase photocatalysis is a promising research topic for the removal of pollutants from the environment. Some commonly used photocatalysts for acceleration of degradation are TiO_2 , ZnO , ZrO_2 , SnO_2 , CoO , In_2O_3 , ZrO_2 , Cu_2O NiO etc. The introduction of 0.1 % of TiO_2 in LDPE film leads to enhanced degradation up to 18 % mass loss after UV exposure during 300 h [2]. This work is focused on the degradation of PE packaging through photocatalytic processes where oxides of Ti/Mn display the most promising activity [3]. The mechanical mixture of TiO_2 and MnO_2 in a ratio of 1:1 added to the HDPE film in an amount of 1 % led to an increase in the rate of degradation of the polymer. After 90 h of UV irradiation composite film lost 21.2 % of the mass, while the pure polymer lost only 0.5 %. The nature of its properties explained the choice of manganese dioxide. The choice of manganese dioxide was explained by its properties as a semiconductor widely used in catalysis, organic synthesis, and energy storage. Its distinctive feature is a narrow bandgap of around 1–3 eV, which allows it to be an active photocatalyst even in daylight [4]. To achieve higher efficiency of photocatalysts, the possibility of introducing such a support as halloysite nanotubes in a catalytic system should be studied.

Halloysite (HNT) is a natural aluminosilicate of the kaolin group with Al : Si in the ratio 1:1, having the chemical formula $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$, where n can vary from 0 to 4. The average size depends on the origin and ranges between 40 and 70 nm in diameter and 200–1500 nm in length [5, 6]. Different methods for introducing the nanoparticles in the polymer matrix are reported. For instance, in

situ polymerization, solvent casting method, extruder blending, and deposition by layer [7].

The chemical compositions and the opposite charge of the inner and outer surfaces open up wide possibilities in the development of HNT-based composite materials. Namely, decorating the outer surface of nanotubes with positively charged molecules or nanoparticles and loading the inner cavity with negatively charged molecules. The cavity can be used as a container for loading active substances (drugs, proteins, surfactants, corrosion inhibitors, catalysts) and their subsequent controlled release. Moreover, some inorganic salts may also be loaded into the tube cavity [8]. Modifying the outer surface of nanotubes can affect the stability of colloidal solutions, improve the filler distribution in polymer matrices [9], and develop surface area of catalysts, preventing aggregation. Moreover, adding HNT to the polymer leads to the improvement of the mechanical properties of films, influencing the flammability [10], and crystallinity of materials [11].

Problem statement

In our previous work, the solvent-casting method was used for introducing the catalyst into the PE film [3]. This technique has shown high efficiency. But at the same time, it includes using toxic solvents at high temperatures during a long time (100 °C for 45 minutes). Therefore, this study aimed to find alternative methods for adding nanomaterials to the polymer film interface.

Methodology. PE film decorating technique

PE is resistant to most solvents at room temperature. Only some liquids are capable of dissolving polyethylene when heated. Cyclohexane (CHX) was chosen as one used widely in similar works as the most suitable for PE dissolving at relatively low temperatures [12]. Cyclohexane was heated to 50 °C and 60 °C then 3 mass % of HNT was added. Mechanical and ultrasound stirring was applied to achieve a uniform distribution of particles. Rectangular PE film samples of 12 cm² were immersed in suspension for various time intervals (60 sec. and 120 sec.) at 50 and 60 °C (Table 1). Sample 0 was prepared without halloysite at the same conditions for comparison. After, the film was washed with distilled water and dried at room temperature.

Table 1. Film preparation conditions.

Sample name	HNT / mass %	Temperature / °C	Immersion time / sec
0	0	50	60
1	3	50	60
2	3	50	120
3	3	60	60

Methods

The efficiency of introducing nanoparticles into the film, as well as HNT's influence on PE film properties, was examined by the following methods: the wettability was measured using OCA 20 Data Physics Instruments equipped with a high-resolution CCD camera; the contact angle (θ) of water in the air was measured by the sessile drop method.

Dynamic mechanical measurements were conducted using the DMA Q800 (TA Instruments). Tensile tests were performed with a stress ramp of $1 \text{ MPa}\cdot\text{min}^{-1}$ at $25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Thermogravimetric analysis (Q5000 IR, TA Instruments) under nitrogen flow with heating ramp $20 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{min}^{-1}$ from 25 to $600 \text{ }^\circ\text{C}$ was performed to evaluate the efficiency of HNT's introduction in the film and thermal stability of treated samples.

Optical images were taken with Optika polarizing microscope to study the uniformity of nanomaterial deposition on the surface.

Results and Discussion

The TG curve of pure halloysite nanotubes has one mass loss of $14.95 \text{ mass } \%$ [13] is attributed to the removal of the interlayer water molecules from the HNT structure. On the other hand, Sample 0–3 showed a significant mass reduction of about $90\text{--}100 \%$ from 400 to $520 \text{ }^\circ\text{C}$ as a consequence of the PE thermal degradation.

Moreover, thermogravimetric data provided the mass fraction of HNT in composite films. Sample II, immersed in HNT suspension in cyclohexane at $50 \text{ }^\circ\text{C}$ for 120 seconds, showed the most considerable residual mass among all samples (Table. 1). The calculated HNT content was equal to $2.83 \text{ mass } \%$ corrected on water loss. Sample III immersed at $60 \text{ }^\circ\text{C}$ for 60 sec, showed a slightly lower HNT content of 2.74% . PE degradation temperature (T_d) was calculated from the maximum of the DTG peaks. It can be pointed out that T_d for Sample II is shifted towards lower temperatures 37° compared with pure PE, while for Sample III the main degradation peak

is shifted towards higher temperature for 14° compared with pure PE.

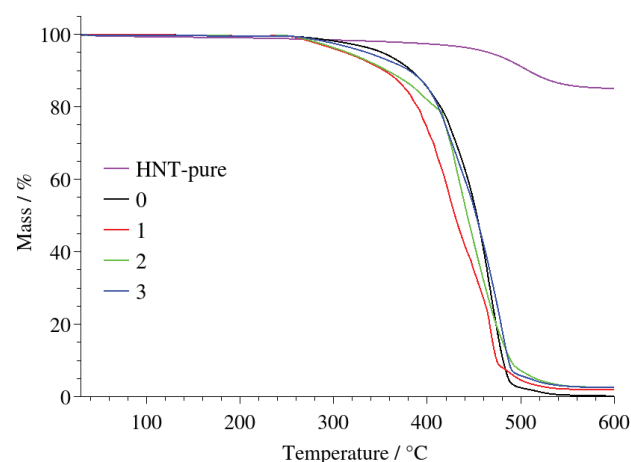


Fig. 1. Thermogravimetric curves of treated PE composite samples

At the same time, Sample 2 showed the highest hydrophilicity with contact angle 77.11° when Sample 0 demonstrates contact angle of 99.24° (Fig. 2). It can be explained by the presence of hydrophilic HNTs on the film's surface. Which is in good agreement with TGA analysis. Sample 3, in turn, remains hydrophobic despite the almost equal content of nanotubes. Possibly due to the higher treatment temperature, nanotubes were included into a deeper layer of a film.

Dynamic mechanical analysis (Fig. 3) showed that samples are elastic since the strain grows linearly with stress. After reaching the yielding point – deformation becomes irreversible. As a result of mechanical tests, it can be concluded that the duration of treatment is of key importance. Processed for the longest time of 120 sec Sample II, has the lowest mechanical characteristics. An increase in elasticity can be noted for samples treated for 60 sec. (Sample 1 and 3) in a Halloysite suspension, while the strength characteristics remained almost constant compared to reference Sample 0, prepared without HNT's (Table 3).

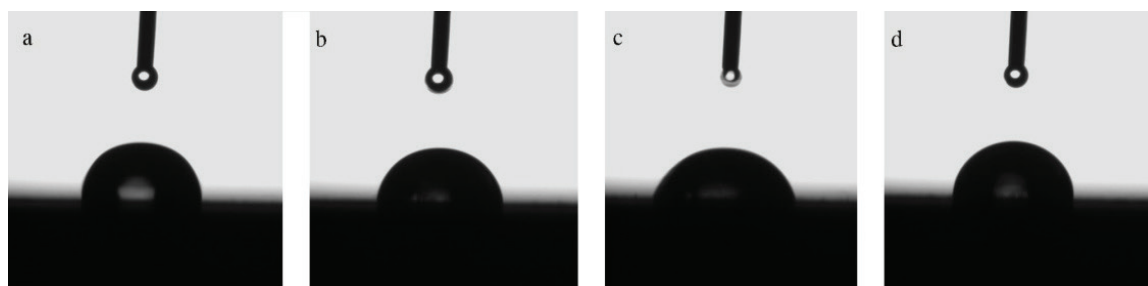


Fig. 2. Images of droplets just after their deposition onto the surface of (a) Sample 0, (b) Sample 1, (c) Sample 2, (d) Sample 3

Table 2. Thermogravimetric and wetting properties of treated samples

Sample name	RM600, %	Contact angle, °
0	0.18	99.24 ± 0.76
1	1.93	$85.21 \pm 8,81$
2	2.59	$77.11 \pm 4,71$
3	2.51	$89.18 \pm 4,03$

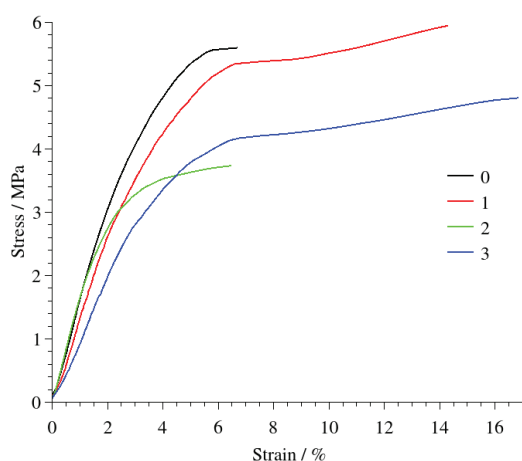


Fig. 3. Stress vs. strain curves of treated samples

It is worth notifying the values of Elastic Modulus, also known as Young's modulus, as a property of materials that measures their stiffness or resistance to elastic deformation for the synthesized samples, are higher than those of pristine PE. The reinforcing effect of HNT in polymers is often explained as a result of agglomerates of nanoparticles and the formation of the interface region between matrix/nanoparticles, which restricts the mobility and deformability of PE [14, 15].

Based on the analysis of optical images, we can assert that treatment of films at a temperature of 50 °C allows us to obtain a uniform deposition of nanomaterial on the surface while raising the temperature to 60 °C leads to the formation of areas with aggregated particles (Fig. 4).

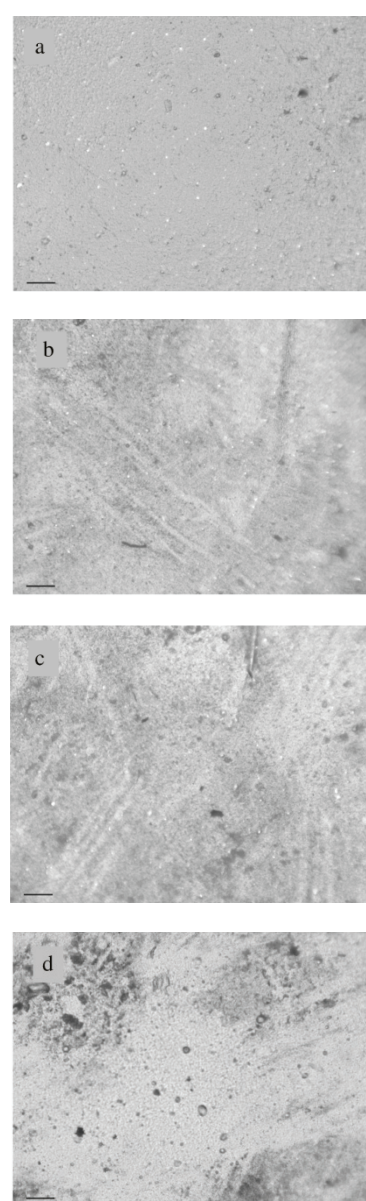


Fig. 4. Optical images of PE films treated in HNT/cyclohexane suspension under different conditions: (a) Sample 0, (b) Sample 1, (c) Sample 2, (d) Sample 3. The scale bar is equal to 0.1 mm

Table 3. Tensile strength properties of films

Sample name	Elongation at break / %	Stress at break point / MPa	Elastic modulus / MPa	Yield point / %
PE non-treated	>150	>12	80.4	11.9
0	6.68	5.60	168.9	3.48
1	14.27	5.64	135.2	5.69
2	6.45	3.74	164.8	2.44
3	16.82	4.81	103.3	5.39

Conclusions

Different conditions of application of HNTs on the surface of PE films using cyclohexane were tested. A method allows to achieve the introduction of a maximum of 2.83 wt. % of HNT. This method confirmed the possibility of attaching nanomaterials, namely HNTs, to the surface of the film by partially dissolving the surface layer of the polymer. Unlike our previous study [3], where the solvent casting method was used to introduce the catalyst into the

PE film, the above approach does not require complete dissolution of the polymer and heating of the material to high temperatures and can be applied to the processing of industrially produced PE films.

The addition of functional materials can be useful for modifying the properties of films, in particular PE. Studying the peculiarities of adding a photocatalyst to a polymer film at ambient temperature and the technology of industrial production of a PE film capable of decomposition can be the next stage of research.

References

- [1] C. Schmidt, T. Krauth, and S. Wagner, "Export of Plastic Debris by Rivers into the Sea," *Environ. Sci. Technol.*, vol. 51, no. 21, pp. 12246–12253, Nov. 2017, doi: 10.1021/acs.est.7b02368.
- [2] R. T. Thomas, V. Nair, and N. Sandhyarani, "TiO₂ nanoparticle assisted solid phase photocatalytic degradation of polythene film: A mechanistic investigation," *Colloids Surf. Physicochem. Eng. Asp.*, vol. 422, pp. 1–9, Apr. 2013, doi: 10.1016/j.colsurfa.2013.01.017.
- [3] I. Kovinchuk, N. Haiuk, G. Lazzara, G. Cavallaro, and G. Sokolsky, "Enhanced photocatalytic degradation of PE film by anatase/ γ -MnO₂," *Polym. Degrad. Stab.*, vol. 210, p. 110295, Apr. 2023, doi: 10.1016/j.polymdegradstab.2023.110295.
- [4] E. Cockayne and L. Li, "First-principles DFT+U studies of the atomic, electronic, and magnetic structure of α -MnO₂ (cryptomelane)," *Chem. Phys. Lett.*, vol. 544, pp. 53–58, Aug. 2012, doi: 10.1016/j.cplett.2012.06.061.
- [5] K. Song, "Micro- and nano-fillers used in the rubber industry," in *Progress in Rubber Nanocomposites*, Elsevier, 2017, pp. 41–80. doi: 10.1016/B978-0-08-100409-8.00002-4.
- [6] E. Abdullayev and Y. Lvov, "Halloysite clay nanotubes as a ceramic 'skeleton' for functional biopolymer composites with sustained drug release," *J. Mater. Chem. B*, vol. 1, no. 23, p. 2894, 2013, doi: 10.1039/c3tb20059k.
- [7] T. S. Gaaz, A. B. Sulong, A. A. H. Kadhum, A. A. Al-Amiery, M. H. Nassir, and A. H. Jaaz, "The Impact of Halloysite on the Thermo-Mechanical Properties of Polymer Composites," *Molecules*, vol. 22, no. 5, Art. no. 5, May 2017, doi: 10.3390/molecules22050838.
- [8] S. Riela, M. Massaro, C. Colletti, G. Lazzara, S. Milioto, and R. Noto, "Halloysite Nanotubes as Support for Metal-Based Catalysts," *J Mater Chem A*, vol. 5, May 2017, doi: 10.1039/C7TA02996A.
- [9] X. u Zhao, Z. Li, Y. Chen, L. Shi, and Y. Zhu, "Solid-phase photocatalytic degradation of polyethylene plastic under UV and solar light irradiation," *J. Mol. Catal. Chem.*, vol. 268, no. 1–2, pp. 101–106, May 2007, doi: 10.1016/j.molcata.2006.12.012.
- [10] G. Cavallaro, G. Lazzara, S. Milioto, and F. Parisi, "Halloysite nanotubes with fluorinated cavity: an innovative consolidant for paper treatment," *Clay Miner.*, vol. 51, no. 3, pp. 445–455, Jun. 2016, doi: 10.1180/claymin.2016.051.3.01.
- [11] V. Bertolino, G. Cavallaro, S. Milioto, and G. Lazzara, "Polysaccharides/Halloysite nanotubes for smart bionanocomposite materials," *Carbohydr. Polym.*, vol. 245, p. 116502, Oct. 2020, doi: 10.1016/j.carbpol.2020.116502.
- [12] J.-H. Arndt, R. Brüll, T. Macko, F. Perez, and J. Panitzky, "Solubility of Polyethylene in *n*-Hexane and Cyclohexane: Experimental Determination and Comparison with Solid–Liquid Equilibria-Based Predictions," *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 60, no. 41, pp. 14968–14976, Oct. 2021, doi: 10.1021/acs.iecr.1c02406.
- [13] M. M. Calvino, L. Lisuzzo, G. Cavallaro, G. Lazzara, and S. Milioto, "Halloysite based geopolymers filled with wax microparticles as sustainable building materials with enhanced thermo-mechanical performances," *J. Environ. Chem. Eng.*, vol. 10, no. 6, p. 108594, Dec. 2022, doi: 10.1016/j.jece.2022.108594.

- [14] Yu. A. Dzenis, "Effect of aggregation of a dispersed rigid filler on the elastic characteristics of a polymer composite," *Mech. Compos. Mater.*, vol. 22, no. 1, pp. 12–19, 1986, doi: 10.1007/BF00606002.
- [15] J. W. Sikora, I. Gajdole, and A. Puszka, "Polyethylene-Matrix Composites with Halloysite Nanotubes with Enhanced Physical/Thermal Properties," *Polymers*, vol. 11, no. 5, p. 787, May 2019, doi: 10.3390/polym11050787.

I.V. Ковінчук, Г.В. Сокольський, Дж. Лаззара

ОДНОСТАДІЙНЕ ТА ПРОСТЕ ДЕКОРУВАННЯ ПОЛІЕТИЛЕНОВИХ ПЛІВОК ГАЛУАЗИТНИМИ НАНОТРУБКАМИ

Проблематика. Забруднення навколишнього середовища полімерними відходами є глобальною проблемою, що вимагає пошуку ефективних та безпечних способів утилізації або переробки вторинної сировини. Використання фотокаталізаторів для деградації полімеру є сучасним підходом. Сполучення фотокаталізаторів з матеріалом підкладки для підвищення стабільності, активності та тривалості роботи є важливим напрямом досліджень.

Мета дослідження. Метою роботи була розробка методу нанесення наноматеріалів на поверхню поліетиленової (ПЕ) плівки за допомогою часткового розчинення верхнього шару полімеру в нагрітій суспензії наноматеріалу, а саме алюмосилікатних нанотрубок галуазиту (ГНТ) у розчиннику. В якості розчинника використовувався циклогексан.

Методика реалізації. Проведено термогравіметричний, оптичний аналіз та вивчені механічні властивості синтезованих зразків, порівняно їх властивості з референтними зразками чистого та обробленого ПЕ без додавання ГНТ.

Результати дослідження. Розроблено метод декорування ПЕ плівки нанотрубками ГНТ. Досягнуто введення 2,83 мас. % за умови занурення плівки в суспензію ГНТ у циклогексані (3 мас. %) за температури 50 °C упродовж 120 сек. Зниження кута зразка до 77,11° свідчить про включення гідрофільних ГНТ у поверхневий шар ПЕ. Оптичний аналіз підтвердив рівномірний розподіл частинок на поверхні плівки. Зафіксовано зниження механічних властивостей (еластичність та міцність на розрив), що може бути пов'язано із деструктивною дією розчинника на полімер.

Висновки. Протестовано різні умови нанесення нанотрубок ГНТ на поверхню ПЕ плівок з використанням циклогексану. Розроблено метод, що дозволяє досягти введення максимум 2,83 мас. % ГНТ. Цей метод підтвердив можливість прикріплення наноматеріалів, а саме ГНТ, до поверхні плівки за допомогою часткового розчинення поверхневого шару полімеру. На відміну від нашого попереднього дослідження [3], де для введення каталізатора в ПЕ плівку використовувався метод лиття з розчинника, вищезазначений підхід не вимагає повного розчинення полімеру та нагрівання матеріалу до високих температур та може бути застосований для обробки промислово виготовлених ПЕ плівок. Додавання функціональних матеріалів може бути корисним для модифікації властивостей плівок, зокрема ПЕ. Вивчення особливостей додавання фотокаталізатора до полімерної плівки за температури навколишнього середовища та технології промислового виготовлення здатної до розкладання ПЕ плівки може стати наступним етапом досліджень.

Ключові слова: полімер, галуазитні нанотрубки, наноматеріал, термогравіметрія, хімічна технологія.

Рекомендована Радою
Хіміко-технологічного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
01 грудня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

DOI: 10.20535/kpissn.2023.1-4.291501

УДК 666.3

Ю.М. Молчан*, А.А. Зеленська, О.І. Янушевська, Т.А. Донцова

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*corresponding author: molchan.ylia@iill.kpi.ua

ВПЛИВ ТИПУ КАРБОНАТУ НА ТРАНСПОРТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЕРАМІЧНИХ МЕМБРАН НА ОСНОВІ SiC

Проблематика. Керамічні мембрани останнім часом набувають особливої уваги через їх термічну, хімічну стійкість, можливість використання в агресивних умовах, а також через їх тривалий термін служби. Серед керамічних мембран особливої уваги заслуговують мембрани, що виготовляються з силіцій карбїду через їх високу міцність. Однак невирішеною проблемою є висока вартість таких мембран та контрольованість пористих характеристик, які суттєво впливають на транспортні характеристики. Тому вкрай важливими є дослідження способів, що можуть дозволити зменшити температуру відпалу SiC-мембран та контролювати їх пористість.

Мета дослідження. Встановлення впливу типу карбонату на фізико-хімічні властивості та транспортні характеристики керамічних мембран на основі силіцій карбїду.

Методика реалізації. Метод пресування та спікання з різним складом карбонатів. Аналіз отриманих керамічних мембран дифракційним методом та скануючою електронною мікроскопією.

Результати дослідження. Показано, що за додавання натрій карбонату утворюється нова фаза – натрій алюмосилікат, а у разі застосування амоній гідрокарбонату утворення нових фаз не виявлено. Морфологія синтезованих керамічних мембран має зернисту структуру, що характеризується порами розміром від 13 до 21 мкм та питомою площею поверхні – від 1,5 до 1,9 м²/г. Досліджені транспортні характеристики керамічних мембран свідчать про те, що застосування амоній гідрокарбонату дозволяє отримати керамічну мембрану з достатньо високою пропускнуою здатністю, яку можна рекомендувати для застосування в області мікрофільтрування.

Висновки. Амоній гідрокарбонат є більш перспективною пороутворюючою домішкою до керамічних мембран на основі силіцій карбїду. Подальші дослідження будуть зосереджені на вивченні вмісту пороутворювача на транспортні та механічні властивості керамічних мембран.

Ключові слова: керамічні мембрани, силіцій карбїд, натрій карбонат, амоній гідрокарбонат, пористість, транспортні характеристики, водоочищення.

Вступ

Останнім часом застосування керамічних мембран у технологіях очищення води суттєво збільшується завдяки наявності цілої низки їх переваг порівняно з полімерними мембранами. Основними характеристиками керамічних матеріалів, з яких виготовляють керамічні мембранні модулі, є: хімічна та термічна стабільність, зокрема й в агресивних середовищах; низька схильність до забруднення і наявність ефективних способів очищення та регенерації мембран; тривалий термін служби; високі транспорт-

ні властивості; стійкість до корозії тощо [1, 2]. Кількість опублікованих наукових досліджень за останні два десятиліття щодо технологій, пов'язаних з виготовленням та застосуванням керамічних мембран, переконливо свідчить про збільшення зацікавленості науковців і технологів у необхідності та своєчасності збільшення частки застосування саме керамічних мембран у мембранних технологіях [3]. Завдяки своїм унікальним властивостям керамічні мембрани широко застосовуються, зокрема, в процесі очищення промислових стічних вод [4]. Переваги керамічних мембран не обмежуються вищепереліченими

Пропозиція для цитування цієї статті: Ю. М. Молчан, А. А. Зеленська, О. І. Янушевська, Т. А. Донцова, “Вплив типу карбонату на транспортні характеристики керамічних мембран на основі SiC”, *Наукові вісті КПІ*, № 1–4, с. 99–105, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.291501

Offer a citation for this article: Y.M. Molchan, A.A. Zelenska, O.I. Yanushevska, T.A. Dontsova, “Influence of carbonate type on transport characteristics of SiC-based ceramic membranes”, *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 99–105, 2023. doi: 10.20535/kpissn.2023.1-4.291501

характеристиками, також вони позбавлені такої властивості, як набухання розчинником під час фільтрування, що покращує їх гідравлічні показники [5].

Однією з перешкод на шляху збільшення темпів застосування керамічних мембран у процесах очищення води та стічних вод, на жаль, залишається їх висока вартість. До того ж процес спікання керамічних мембран вимагає високої температури (понад 1000 °C), що також впливає на їх вартість і транспортні характеристики.

Постановка задачі

Одними з найбільш широкоживаних матеріалів для виготовлення керамічних мембран є алюміній оксид, цирконій оксид, титан оксид, кремній карбід та цеоліти. Керамічні мембрани з алюміній оксиду порівняно з керамічними мембранами, що виготовлені з іншої вказаної сировини, є найдешевшими завдяки відносно низькій вартості глинозему [6, 3]. Цікавим є те, що з використанням як матеріалів для виготовлення керамічних мембран: Al_2O_3 , TiO_2 , ZrO_2 , SiC , вартість керамічних мембран зростає від Al_2O_3 до SiC , але показники керамічних мембран, такі як гідрофільність, проникність, хімічна та механічна стійкість, покращуються у зворотному напрямку в разі. Крім цього, така важлива характеристика, як потенціал щодо забруднення – має мінімальне значення, серед наведених матеріалів, саме для SiC . Комерційно доступні керамічні мембрани можуть працювати в широкому діапазоні рН, температури та тиску.

Мембрани, які виготовлені із силіцій карбїду мають найкращі характеристики робочого тиску, робочого діапазону застосування рН та температури серед наведених матеріалів. Наприклад, керамічна мембрана фірми LiqTech, Denmark, яка виготовляється з SiC здатна витримувати тиск до 10 бар, температуру – до 800 °C і працювати в максимальному діапазоні рН, тобто від 0 до 14 (для порівняння, керамічна мембрана з Al_2O_3 фірми ItN-Nanovation, Germany, має такі робочі характеристики: робочий тиск – до 0,5 бар, рН – від 2 до 12, температура – до 130 °C) [3].

Мембрани з SiC завдяки своїй надзвичайній міцності, хімічній стабільності, здатності стійкості до обростання та водонепроникності широко використовуються у багатьох процесах: розділення нафти та газу, очищення стічних вод, оброблення харчових продуктів і напоїв, інтенсифікації процесів ферментації тощо [7]. Крім

того, оптимізація процесу спікання мембран за рахунок використання різних домішок і варіювання складу керамічної матриці дозволяє усунути особливі недоліки мембран із SiC – витрати на виробництво, які у випадку SiC -мембран є найбільш високими, навіть більшими ніж під час виробництва керамічних мембран на основі Al_2O_3 , TiO_2 або ZrO_2 , і також низький контроль у цих мембранах розміру пор в UF і NF діапазоні, а отже й транспортних характеристик [8].

Розробка мембрани із SiC з використанням алюміній нітрату, як спікаючої домішки, показала [7], що додавання останнього знижує температуру спікання підготовленої мембрани порівняно зі звичайним синтезом мембрани із SiC , а отже дозволяє зменшити витрати на їх виробництво. До того ж мембрана продемонструвала чудову стійкість до корозії в кислому та лужному середовищах протягом 30 днів без істотних змін у властивостях мембрани. Проникність чистої води крізь мембрани складала 2252 $dm^3/год \cdot m^2 \cdot бар$. Виготовлена мембрана (середній розмір пор – 0,35 мкм) показала високий ступінь видалення крапель олії (99,7 %) з емульсії олії та води.

Слід зазначити, що більш економічний спосіб виробництва керамічних мембран з використанням SiC передбачає варіювання складу матриці, а саме використання SiC як домішки до більш дешевих компонентів. У роботі [8] автори показали процес виготовлення ультрафільтрувальних мембран з використанням хімічного осадження SiC з газової фази за низького тиску на Al_2O_3 -матрицю за наявності прекурсорів (SiH_2Cl_2 і C_2H_2/H_2) за температури 750 °C. Для регулювання розміру пор мембрани використовували варіювання часу осадження від 0 до 150 хв. Проведені дослідження розділення емульсії (мастило/вода) продемонстрували, що як оборотне, так і незворотне забруднення такої мембрани було значно нижчим, ніж для чистої матриці з алюміній оксиду. Дослідження авторів [8] свідчать про можливість створювати SiC -мембрани з низьким рівнем фоулінгу і з налаштованими розмірами пор на відносно дешевій основі.

Важливою характеристикою керамічної мембрани також є проникність, яка залежить, головним чином, від її пористості та морфології пор, що забезпечує її транспортні властивості, а отже й ефективність. Введення у склад керамічної мембрани пороутворюючого агента є простим, ефективним і економічним способом

збільшення її пористості [9]. Пороутворювачі поділяють на два типи: неорганічні й органічні. Неорганічні пороутворювачі містять неорганічні солі та карбонові матеріали, які розкладаються за високої температури: амоній, натрій і кальцій карбонати, амоній бікарбонат, амоній хлорид, графіт і вугільний порошок. Органічні пороутворювачі містять: природні волокна та полімери (крохмаль, полістирол, поліметилметакрилат (PMMA), тирса).

У роботі [10] у процесі приготування керамічних матриць на основі каоліну до складу мембран додавали різні кількості кальцій карбонату та натрій карбонату (Na_2CO_3 від 0 до 40 мас.%, CaCO_3 від 0 до 40 мас.%). Додавання кальцій карбонату викликало збільшення пористості і хімічної стабільності зразків, додавання натрій карбонату – збільшення щільності пор і зменшення їх діаметра. Зразок із вмістом CaCO_3 20 мас.% показав хороші результати в розділенні емульсій (мастило/вода) – 98 % відторгнення мастила за трансмембранного тиску 103 кПа.

Дослідження [11] демонструє ефективність використання CaCO_3 як пороутворюючого агента в керамічній мембрані на основі каоліну, целюліти та кремнеземних ксерогелевих композитів. Встановлено, що вміст кальцій карбонату впливає на об'ємну частку сполучених пор у зразку. Зразок із вмістом 30 мас.% забезпечував найбільшу об'ємну частку однорідно сполучених між собою пор, що своєю чергою забезпечувало найбільше значення потоку пермеату. Ефективність сепараційних властивостей мембрани була перевірена у процесі видалення нецукрових домішок у кокосовому соку.

У дослідженнях [12] розроблено технологію приготування пористої кераміки, у склад якої як пороутворювач додавали амоній гідрокарбонат. Загальна та відкрита пористість зразків кераміки залежала від кількості та гранулометричного складу NH_4HCO_3 . За варіюванням вмісту NH_4HCO_3 від 0 до 2,75 мас.%, відкрита та загальна пористість зростала від 25 до 69 % та від 32 до 73 % відповідно.

Таким чином, згідно з критичним аналізом сучасної наукової літератури можна зробити висновки, що додавання різних речовин у матрицю керамічних мембран може суттєво покращити їх механічні, транспортні та селективні характеристики. Такий підхід є науково і практично обґрунтованим та перспективним з погляду збільшення сегмента використання

керамічних мембран у промислових процесах, що ґрунтуються на мембранних технологіях. Зокрема, додавання деяких домішок та пороутворювачів може бути вирішальним у синтезі керамічних мембран із заданими транспортними характеристиками.

Метою статті є встановлення впливу типу карбонату на фізико-хімічні властивості та транспортні характеристики керамічних мембран на основі силіцій карбід.

Методика дослідження

Для отримання керамічних мембран використовували силіцій карбід (SiC), натрій карбонат (Na_2CO_3), амоній гідрокарбонат (NH_4HCO_3), буру ($\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$), алюміній оксид (Al_2O_3), 3-амінопропілетоксилан.

Мембрани отримували таким чином: зважували розраховану кількість вихідних компонентів таретельного їх перемішували, після чого додавали 3-амінопропілетоксилан та знову перемішували; приготовану суміш засипали у сталеву прес-форму діаметром 21 мм; за допомогою ручного гідравлічного пресу застосовували тиск 300 бар впродовж 5 хв. Спресовану мембрану піддавали термічній обробці у муфельній печі за температурі 950 °C впродовж 10 годин [13].

Характеризацію отриманих керамічних мембрани проводили дифракційними методами аналізу (Ultima IV, Rigaku, Японія) та скануючою електронною мікроскопією (S-4700 FE-SEM, Hitachi, Японія). Також синтезовані мембрани досліджували на пористість за стандартною процедурою (ДСТУ 2409-80) та визначали пористі характеристики методом низькотемпературної адсорбції-десорбції азоту (Nova 4200e, Quantachrome®, США).

Транспортні характеристики визначали на спеціальній оригінальній установці, яка містила мембранотримач, манометр і насос. Транспортні характеристики визначали за тиском та питомою пропускну здатністю води.

Результати та їх обговорення

За описаною вище методикою було отримано два зразки керамічних мембран (КМ), які мали склад, що наведений в табл. 1. Геометрія мембран визначалась прес-формою, в якій пресувались вихідні компоненти мембран, розміри яких після пресування становили 21 мм у діаметрі та завтовшки 3 мм.

Таблиця 1. Склад отриманих керамічних мембран

Зразок КМ	Вміст SiC, %	Вміст Al ₂ O ₃ , %	Вміст Na ₂ B ₄ O ₇ , %	Вміст Na ₂ CO ₃ , %	Вміст NH ₄ HCO ₃ , %
SNa-10	55	25	9	10	–
SNH-10	55	26	9	–	10

Як можна бачити із табл. 1 зразки керамічних мембран відрізнялись тільки типом карбонату, що використовувався: зразок SNa-10 містить натрій карбонат, зразок SNH-10 – амоній гідрокарбонат.

У табл. 2 наведено загальну пористість та пористі характеристики (питома площа поверхні) отриманих зразків керамічних мембран.

Таблиця 2. Пористість та пористі характеристики керамічних мембран

Зразок КМ	W _{пор} , %	Г _{умов} , Г/см ³	П _{заг} , %	Питома площа поверхні за БЕТ, м ² /Г
SNa-10	21,91	1,73	38,14	1,85
SNH-10	18,31	1,83	33,76	1,57

Згідно з наведеними даними водопоглинання синтезованих керамічних мембран є високим – на рівні 20 %. Також можна бачити, що загальна пористість коливається в межах 30–40 %, що є достатнім для використання цих керамічних мембран як мікрофільтрувальних. Питома площа поверхні (визначена за БЕТ) одержаних керамічних мембран є низькою, що обумовлено висо-

кою умовною густиною та невисокою загальною пористістю керамічного матеріалу одночасно.

На рис. 1 подано дифрактограми синтезованих керамічних мембран.

Аналіз наведених дифрактограм свідчить, що після спікання керамічна мембрана SNa-10 має дещо інший склад, аніж вихідна суміш: є фази силіцій карбїду, алюміній оксиду та утворюється нова сполука – натрій алюмосилікат. У складі керамічної мембрани SNH-10 виявлені лише дві фази – силіцій карбїд та алюміній оксид.

На рис. 2 наведено СЕМ-зображення керамічних мембран SNa-10 та SNH-10. Як можна бачити з рисунка мембрани мають зернистий характер з наявними порами на їх поверхні.

Проведене додаткове математичне моделювання за допомогою програмного забезпечення СЕМ дозволило визначити середній розмір пор для зразків КМ (табл. 3). Отримані значення свідчать про те, що синтезовані керамічні мембрани SNa-10 та SNH-10 є макропористими, що дозволяє рекомендувати використовувати їх також як матриці для виготовлення керамічних мембран.

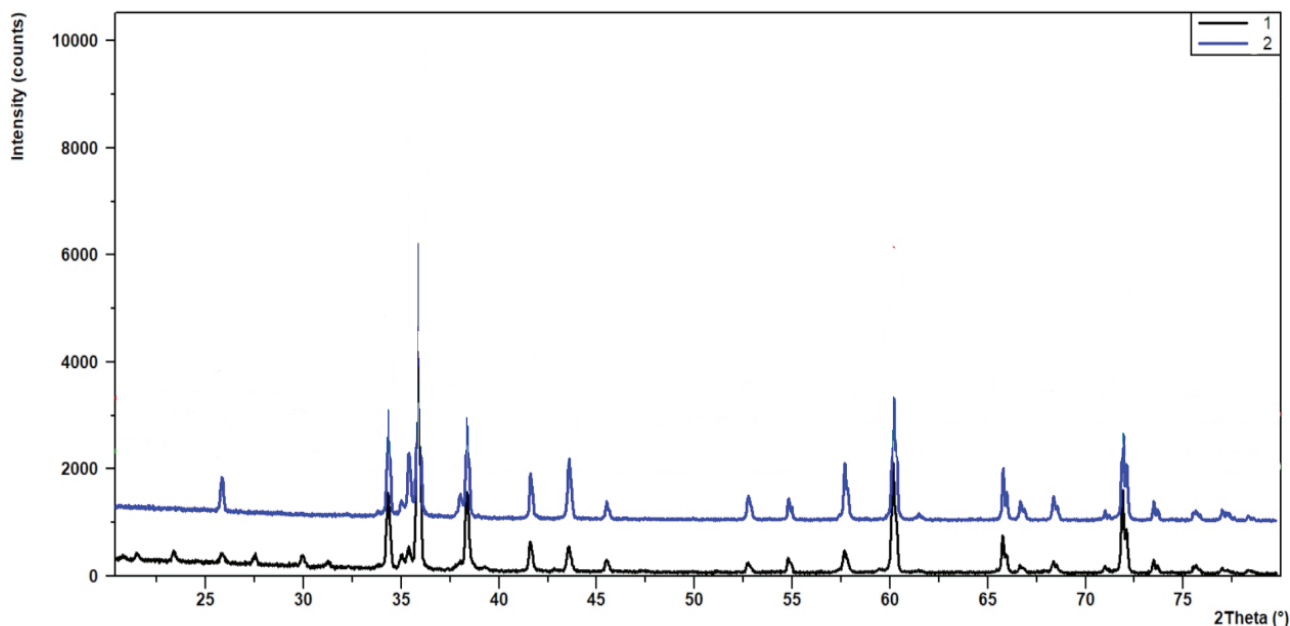
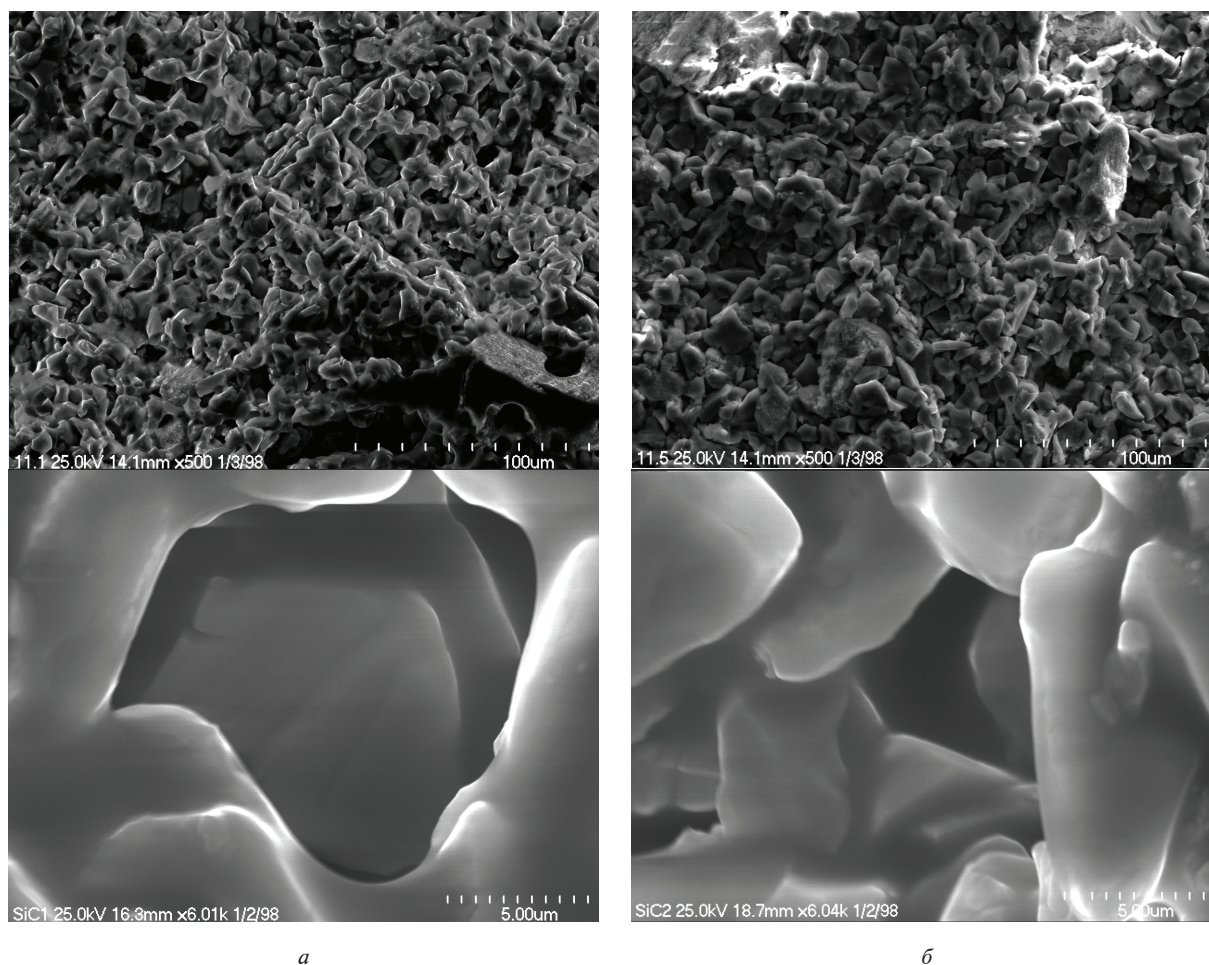


Рис. 1. Дифрактограми керамічних мембран (1) SNa-10 та (2) SNH-10



а

б

Рис. 2. СЕМ керамічних мембран (а) SNa-10 та (б) SNH-10

Таблиця 3. Розмір пор керамічних мембран (за СЕМ)

Зразок КМ	SNa-10	SNH-10
Розмір пор, мкм	13	21

Результати досліджень транспортних характеристик, а саме тиску та швидкості пропускання води через мембрану, подано в табл. 4. Згідно з наведених даних можна зробити висновок, що керамічна мембрана SNa-10 не пропускає воду за максимального тиску (6 бар) на цій установці, що може свідчити або про відсутність відкритих пор, або про їх звуження до нанорозмірів, через які фільтрування можливо лише за більших тисків.

Таблиця 4. Транспортні характеристики керамічних мембран

Назва мембрани	SNa-10	SNH-10
Тиск, бар	6	2
Швидкість пропускання, см ³ /хв	0	396

Керамічна мембрана SNH-10 виявляє достатньо високу пропускну здатність, а саме дистильована вода фільтрується зі швидкістю 396 см³/хв за тиску 2 бар. Такий результат вказує на те, що ця керамічна мембрана має мікрофільтрувальні властивості.

Висновки

Методом пресування виготовлено керамічні мембрани на основі силіцій карбіді із додаванням бури (для зниження температури відпалу) та різного типу карбонатів (як пороутворювачів). Отримано різні типи керамічних мембран, які охарактеризовано дифракційними методами аналізу та скануючою електронною мікроскопією. З'ясовано, що у випадку додавання натрій карбонату утворюється нова фаза – натрій алюмосилікат, водночас під час застосування амоній гідрокарбонату утворення нових фаз не виявлено. Показано, що морфологія синтезованих кераміч-

них мембран характеризується зернистою структурою з розмірами пор – 13 та 21 мкм, питома площа поверхні є незначною – на рівні від 1,5 до 1,9 м²/г. Досліджено транспортні характеристики мембран: керамічні мембрани із використанням натрій карбонату не пропускають воду за тиску 6 бар, що може свідчити або про відсутність відкритих пор, або про їх звуження, через які фільтрування можливо за більших тисків; керамічна мембрана, яка виготовлена із застосування амоній гідрокарбонату, виявляє достатньо високу пропускну здатність – вода фільтрується зі швидкістю 396 см³/хв за тиску 2 бар. Цей результат характерний для мікрофільтрувальних мембран. Отже, згідно з отриманих даних можна

вказати, що амоній гідрокарбонат є більш перспективною пороутворюючою домішкою до керамічних мембран на основі силіцій карбиду.

У подальших дослідженнях необхідно дослідити вплив вмісту амоній карбонату на транспортні та механічні властивості керамічних мембран.

Подяка

Автори вдячні Національному фонду досліджень України за фінансову підтримку цього дослідження, що було виконано в межах проекту із виконання наукових досліджень і розробок № 2020.02/0024.

References

- [1] C. Li *et al.*, “Ceramic nanocomposite membranes and membrane fouling: A review”, *Water Research*, vol. 175, p. 115674, 2020. doi: 10.1016/j.watres.2020.115674
- [2] R. B. Merlet *et al.*, “Hybrid ceramic membranes for organic solvent nanofiltration: State-of-the-art and challenges”, *Journal of Membrane Science*, vol. 599, p. 117839, 2020. doi: 10.1016/j.memsci.2020.117839
- [3] M. B. Asif *et al.*, “Ceramic membrane technology for water and wastewater treatment: A critical review of performance, full-scale applications, membrane fouling and prospects”, *Chemical Engineering Journal*, vol. 418, p. 129481, 2021. doi: 10.1016/j.cej.2021.129481
- [4] J. Liu *et al.*, “Coupling ferrate pretreatment and in-situ ozonation/ceramic membrane filtration for wastewater reclamation: Water quality and membrane fouling”, *Journal of Membrane Science*, vol. 590, p. 117310, 2019. doi: 10.1016/j.memsci.2019.117310
- [5] S. M. Samaei *et al.*, “The application of pressure-driven ceramic membrane technology for the treatment of industrial wastewaters – A review”, *Separation and Purification Technology*, vol. 200, pp. 198–220, 2018. doi: 10.1016/j.seppur.2018.02.041
- [6] G. Zhang *et al.*, (2023), “Asymmetric alumina-based ultrathin composite ceramic membranes with interfacial modification of black talc nanosheets”, *Ceramics International*, no. 49(15), pp. 25371–25380, 2023. doi: 10.1016/j.ceramint.2023.05.073
- [7] E. Eray *et al.*, “A roadmap for the development and applications of silicon carbide membranes for liquid filtration: Recent advancements, challenges, and perspectives”, *Chemical Engineering Journal*, vol. 414, p. 128826, 2021. doi: 10.1016/j.cej.2021.128826
- [8] M. Chen *et al.*, “Highly permeable silicon carbide-alumina ultrafiltration membranes for oil-in-water filtration produced with low-pressure chemical vapor deposition”, *Separation and Purification Technology*, vol. 253, p. 117496, 2020. doi: 10.1016/j.seppur.2020.117496
- [9] M. Qiu *et al.*, “1.11 Ceramic Membranes”, In *Elsevier eBooks*, pp. 270–297, 2017. doi: 10.1016/b978-0-12-409547-2.12243-7
- [10] H. Kaur *et al.*, “Effect of carbonates composition on the permeation characteristics of low-cost ceramic membrane supports”, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 44, pp. 185–194, 2016. doi: 10.1016/j.jiec.2016.08.026
- [11] H. Aripin *et al.*, “Characterization of Ceramic Membrane based on Calcium Carbonate from Onyx Stone and Its Application for Coconut Sap Treatment”, *International Journal of Engineering*, no. 35(2), pp. 300–306, 2022. doi: 10.5829/ije.2022.35.02b.05
- [12] J. Locs *et al.*, “Ammonium hydrogen carbonate provided viscous slurry foaming – A novel technology for the preparation of porous ceramics”, *Journal of the European Ceramic Society*, no. 33(15–16), pp. 3437–3443, 2013. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2013.06.010
- [13] A. O. Serhiienko *et al.*, “Characterization of ceramic membrane support based on Ukrainian kaolin”, *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, no. 3, pp. 1–14, 2022. doi: 10.1080/15421406.2022.2091279

Y.M. Molchan, A.A. Zelenska, O.I. Yanushevskaya, T.A. Dontsova

INFLUENCE OF CARBONATE TYPE ON TRANSPORT CHARACTERISTICS OF SiC-BASED CERAMIC MEMBRANES

Background. Ceramic membranes have recently attracted particular attention due to their thermal and chemical resistance, ability to be used in aggressive environments, and long service life. Among ceramic membranes, silicon carbide membranes deserve special attention due to their high strength. However, the high cost of such membranes and the controllability of porous characteristics, which significantly affect the transportation characteristics, remain an unresolved problem. Therefore, it is extremely important to investigate ways to reduce the annealing temperature of SiC membranes and control their porosity.

Objective. The aim of this work is to determine the effect of the type of carbonate on the physicochemical properties and transport characteristics of ceramic membranes based on silicon carbide. The ceramic membranes were obtained by pressing, to which borax (to reduce the annealing temperature) and carbonates (as a pore forming agent) were added.

Methods. Method of pressing and sintering with different composition of carbonates. Analysis of the obtained ceramic membranes by the diffraction method and scanning electron microscopy.

Results. It has been shown that the addition of sodium carbonate results in the formation of a new phase, sodium aluminosilicate, while no new phases were detected when ammonium bicarbonate was used. The morphology of the synthesized ceramic membranes has a granular structure characterized by pores ranging in size from 13 to 21 μm and a specific surface area of 1.5–1.9 m^2/g . The investigated transport characteristics of ceramic membranes indicate that the use of ammonium bicarbonate allows to obtain a ceramic membrane with a sufficiently high throughput, which can be recommended for use in the field of microfiltration.

Conclusions. Ammonium bicarbonate is a more promising pore-forming additive for ceramic membranes based on silicon carbide. Further research will focus on studying the effect of the defoamer content on the transport and mechanical properties of ceramic membranes.

Keywords: ceramic membranes, silicon carbide, sodium carbonate, ammonium bicarbonate, porosity, transport characteristics, water treatment.

Рекомендована Радою
хіміко-технологічного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
10 серпня 2023 року

Прийнята до публікації
11 грудня 2023 року

АВТОРИ НОМЕРА

Бондарчук Максим Юрійович
ORCID: 0000-0002-4861-6627

Васильєв Георгій Степанович
ORCID: 0000-0003-4056-5551

Войтер Анатолій Петрович
ORCID: 0000-0003-4693-1364

Гейчук Володимир Миколайович
ORCID: 0000-0002-6704-3721

Гончар Андрій Миколайович
ORCID: 0009-0006-6203-7046

Донг Джан
ORCID: 0000-0003-3529-6529

Донцова Тетяна Анатоліївна
ORCID: 0000-0001-8189-8665

Зеленська Анастасія Андріївна
ORCID: 0009-0000-0628-7549

Ковінчук Ірина Василівна
ORCID: 0000-0003-4841-992X

Котик Михайло Михайлович
ORCID: 0009-0005-8255-481X

Краєв Максим Валерійович
ORCID: 0000-0001-7610-6934

Лаззара Джузеппе
ORCID: 0000-0003-1953-5817

Маслянюк Павло Павлович
ORCID: 0000-0003-4001-6934

Мірко Сергій Сергійович
ORCID: 0009-0002-8254-7351

Молчан Юлія Миколаївна
ORCID: 0000-0002-2364-3530

Орлюк Михайло Володимирович
ORCID: 0000-0002-4728-9097

Піманов Валерій Володимирович
ORCID: 0000-0001-6609-6904

Романюк Вадим Васильович
ORCID: 0000-0003-3543-3087

Ситник Станіслав Володимирович
ORCID: 0000-0003-1358-268X

Сокольський Георгій Володимирович
ORCID: 0000-0002-2082-5806

Тесленко Олександр Кирилович
ORCID: 0000-0002-5891-4345

Чанг Джибао
ORCID: 0009-0008-8029-2088

Чанг Лей
ORCID: 0009-0007-1199-9365

Янушевська Олена Іванівна
ORCID: 0000-0002-3457-8965