

DOI: 10.20535/kpissn.2021.1.231205

УДК 004.942:519.216.3

Р.Л. Пантєєв¹, О.Л. Тимошук², В.Г. Гуськова², П.І. Бідюк^{2*}¹Національний авіаційний університет, Київ, Україна²КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

*corresponding author: pbidyuke_00@ukr.net

МЕТОДИ ФІЛЬТРАЦІЇ ДАНИХ У СИСТЕМАХ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Проблематика. Більшість сучасних динамічних процесів в економіці, фінансах, екології, технологіях і багатьох інших галузях досліджень мають нелінійний нестационарний характер на коротких і довгих часових інтервалах. Тому для їх поглибленого аналізу необхідно створити спеціалізований сучасний високорозвинений інструментарій попередньої обробки даних, моделювання, оцінювання станів і параметрів динамічних систем, прогнозування їх розвитку задля використання у системах підтримки прийняття рішень (СППР).

Мета дослідження. По-перше, попередньо проаналізувати сучасні методи фільтрації статистичних й експериментальних даних. Розглянути актуальні методи фільтрації на основі ймовірнісного Баєсового підходу, які вможливають підготовку даних до побудови адекватних моделей, обчислення високоякісних оцінок станів і короткострокових прогнозів розвитку динамічних систем в умовах стохастичних збурень і похибок вимірювання.

Методика реалізації. Для реалізації сучасних методів фільтрації використовують моделювання, оптимізаційні процедури, ймовірнісні Баєсові методи аналізу даних; застосовують імітаційне моделювання для оцінювання параметрів і базу на основі статистичних критеріїв для дослідження якості проміжних й остаточних результатів у межах СППР.

Результати дослідження. Розглянуто множину методів фільтрації даних, які використовують разом із моделями, що формально описують динаміку вибраних процесів. Запропоновано методику реалізації ймовірнісного Баєсового фільтра, яка ґрунтується на сучасних методах статистичного аналізу даних, зокрема належному застосуванні методів імітаційного моделювання.

Висновки. Створення ефективних засобів моделювання, оцінювання станів і прогнозування динаміки нелінійних нестационарних процесів у різних галузях діяльності дає можливість якісно оцінювати параметри досліджуваних систем й обчислювати коротко- та середньострокові прогнози їхнього розвитку. Розглянуті засоби оптимальної калманівської та ймовірнісної Баєсової фільтрації забезпечують коректний аналіз нелінійних нестационарних процесів, обчислення прогнозів і підтримку прийняття управлінських рішень на основі оцінок прогнозів.

Ключові слова: аналіз даних; нелінійні нестационарні процеси; методи оптимальної фільтрації; методи ймовірнісної фільтрації; імітаційне моделювання.

Вступ

Оцінювання параметрів і станів динамічних систем – актуальна задача, результати розв’язання якої застосовують у дослідженні процесів технічних систем, фізичних дослідженнях, діагностичних системах медичного призначення, економіці, фінансах, біотехнологіях, екології тощо [1, 2]. Попри значні наукові досягнення у цьому напрямі, дослідники досі шукають нові методи оцінювання параметрів і станів досліджуваних об’єктів й удосконалюють наявні. Прикладами таких методів є цифрова та оптимальна фільтрації, які ще в середині минулого століття набули широкого застосування в технічних системах, а з середини 1970-х років їх почали застосовувати в системах обробки фінансово-економічних даних,

фізичних експериментах й інших інформаційних технологіях [3, 4]. Зазвичай апробацію методів оцінювання параметрів і станів динамічних систем виконують у межах відповідних СППР, які є зручним інструментом аналізу даних й експертних оцінок і генерування альтернативних рішень на його основі. Мета створення СППР – надавати користувачу можливість прискорено досліджувати вибрані процеси та використовувати множину методів попередньої обробки даних, оцінювання структури та параметрів моделей; генерувати альтернативні рішення та вибирати кращі результати на основі об’єктивного добору альтернативи за допомогою критеріїв якості.

До задач аналізу даних належить оцінювання невимірюваних змінних стану, що змінюються в часі, із застосуванням вимірів

інших змінних за наявності похибок дискретних вимірів. Похибки вимірювання є завжди, коли реєструють вимірювальну інформацію. Вони зумовлені недосконалістю вимірювальних приладів, зовнішніми шумовими впливами на лініях передачі сигналів і скінченною довжиною розрядної сітки аналого-цифрових перетворювачів і комп'ютерів [5]. Коли дані збирають вручну, похибки вимірювання будуть існувати внаслідок помилок, яких припускаються учасники процесу збору даних [6].

Випадкові збурення станів динамічних систем також негативно впливають на якість оцінювання станів. Ця задача потребує уваги дослідників, які працюють над зменшенням впливу випадкових збурень станів на значення оцінок змінних на виході систем. Шуми/похибки вимірювання і збурення станів враховують явно за допомогою математичних моделей динамічних систем у просторі станів, які особливо широко застосовують для розв'язування задач прогнозування та синтезу систем керування динамічними об'єктами. Але, крім технічних систем автоматичного/автоматизованого керування, такі моделі застосовують і для оцінювання та прогнозування станів досліджуваних систем в економіці та фінансах, екології, кліматології тощо.

У задачах моделювання часових рядів у просторі станів основним поняттям є вектор стану, який містить усю необхідну для опису спостережуваної системи інформацію в конкретній задачі. Наприклад, у задачах стеження за рухом об'єктів ця інформація може стосуватися координат, швидкості та прискорення об'єкта; в економетричних застосуваннях — дослідження ціни активів, аналізу відсоткових ставок, рівня інфляції, рівня виробництва ВВП, волатильності процесів тощо. Вектор вимірів представляє зашумлені спостереження, пов'язані з вектором стану. Він може мати меншу розмірність, ніж вектор стану через невимірювані компоненти. Прикладом невимірюваної компоненти може бути обсяг капіталу, який періодично передають в офшори; температура всередині вала двигуна з високою швидкістю обертання, що внеможливіює встановлення у ньому датчика; температура всередині високотемпературного розплаву [6].

За використання ймовірнісних методів аналізу даних для формування ймовірнісного висновку щодо стану динамічної системи необхідно будувати принаймні дві моделі.

По-перше, модель, що описує зміну стану системи в часі (модель динаміки системи чи змінних її стану); по-друге, модель, що пов'язує зашумлені виміри компонент вектора стану з процесами похибок (модель вимірів). Такі моделі в просторі станів мають бути також доступними для дослідження та застосування в імовірнісній формі [7, 8]. Побудова моделей такого типу зазвичай є предметом окремого дослідження у кожній конкретній галузі.

Завданням лінійної та нелінійної фільтрації є формування/обчислення статистичного чи ймовірнісного висновків щодо стану системи з огляду на наявні виміри. В межах Баєсового підходу до аналізу даних це відбувається обчисленням або апроксимацією апостеріорного розподілу вектора стану за умови використання всіх наявних на момент обчислення вимірів й оцінок невимірюваних компонент. Оскільки функція розподілу ймовірностей вимірів практично містить усю доступну статистичну інформацію про досліджуваний об'єкт, її оцінювання є досить повним розв'язком задачі оцінювання стану, прогнозування його розвитку та підтримки прийняття управлінських рішень [8].

Нижче розглянемо сучасні методи оптимальної та ймовірнісної нелінійних фільтрацій статистичних/експериментальних даних й особливості їх застосування в розв'язанні задачі оцінювання станів динамічних систем, зокрема супроводженні рухомих об'єктів. Буде обґрунтовано створення СППР для моделювання та оцінювання траєкторії рухомого об'єкта на основі сучасних методів фільтрації, а також застосування алгоритму фільтрації Баєсового типу ("гранулярного фільтра", який дедалі ширше застосовують у розв'язуванні задач оцінювання та прогнозування станів динамічних систем).

Постановка задачі

Метою дослідження є: розглянути особливості певних підходів до розв'язання задач лінійної та нелінійної фільтрації статистичних/експериментальних даних, які забезпечують обчислення оптимальних оцінок станів досліджуваних об'єктів і короткострокове прогнозування їхнього розвитку. Виконати аналіз і навести приклади програмної реалізації методу гранулярної Баєсової фільтрації, а також розглянути приклад розв'язання задачі позиціонування робота з використанням імовірнісного фільтра.

Підходи до розв'язування задач лінійної та нелінійної фільтрації

Класичними підходами до розв'язання задач лінійної та нелінійної фільтрації вважаються, зокрема, подані нижче. Задачу одночасного оцінювання стану та прогнозування руху динамічної системи розв'язують за допомогою методів оптимальної фільтрації, зокрема фільтра Калмана (ФК). Нині існує кілька модифікацій ФК, які забезпечують розв'язання задач згладжування даних, обчислення оцінок прогнозів на основі оптимальних оцінок вектора стану; оцінювання невимірюваних компонент вектора стану, а також певних параметрів математичних моделей.

1. Оптимальний ФК – обчислює апостеріорний розподіл для лінійних Гаусових систем рекурсивним оновленням скінченно-вимірних статистичних даних. ФК є оптимальним у своєму класі (лінійних Гаусових систем), але обмеження на його практичне застосування є достатньо жорсткими [9, 10].

Рівняння фільтрації для вільної динамічної системи (без урахування можливих керувань впливів), яке ґрунтується на моделі процесу в просторі станів, можна записати так:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{z}(k) - \mathbf{H} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k-1)],$$

де $\hat{\mathbf{x}}(k)$ – оптимальна оцінка вектора стану $\mathbf{x}(k)$ у момент часу k ; \mathbf{A} – матриця динаміки процесу (перехідна матриця); $\mathbf{z}(k)$ – вектор вимірів змінних на виході об'єкта; \mathbf{H} – матриця вимірів; $\mathbf{K}(k)$ – оптимальний матричний коефіцієнт фільтра, який обчислюється за мінімізації функціонала:

$$J = \min_{\mathbf{K}} E \{ [\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)]^T [\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)] \},$$

тобто за мінімуму математичного сподівання суми квадратів похибок оцінювання вектора стану процесу (оптимальне значення \mathbf{K} визначається розв'язком відповідного рівняння Ріккаті). Алгоритм оцінювання вектора стану також дає можливість оцінювати однокроковий прогноз компонент вектора стану:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k|k),$$

за допомогою якого можна отримати оцінки прогнозів на довільну кількість S кроків:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+s|k) = \mathbf{A}^s \hat{\mathbf{x}}(k|k).$$

Цінність фільтра полягає в його ролі алгоритму згладжування та прогнозування з урахуванням невизначеностей параметрів (математичне сподівання та коваріація) досліджуваних стохастичних процесів збурення станів і похибок вимірів, а тому його введення у СППР надає системі додаткові можливості. До того ж адаптивний фільтр дає змогу в реальному часі оцінювати статистичні характеристики збурення стану та похибок вимірів, які не завжди можна визначити апріорно.

2. Розширений фільтр Калмана (РФК). У цьому випадку для оцінювання станів нелінійних негаусових моделей застосовують алгоритм фільтрації Калмана до лінеаризованої моделі досліджуваного об'єкта з Гаусовим шумом і тими ж моментами першого та другого порядків. РФК апроксимує нелінійну функцію, використовуючи її розклад у ряд Тейлора другого порядку. Недоліками цього підходу є, зокрема, підміна реальної функції розподілу щільності нормальною та використання наближеної моделі динаміки [9, 10]. Іноді можуть виникати проблеми зі збіжністю алгоритму фільтрації.

3. Модифікований РФК. Складнішим типом нелінійності є залежність неперервних змінних стану $\mathbf{X}(t)$ від можливих дискретних змінних $\mathbf{D}(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, які можуть мати нестационарні розподіли, відмінні від розподілу неперервної змінної. Через це виникає задача формулювання гіпотез для всіх можливих варіантів значень дискретних змінних. Кількість таких гіпотез може зростати експоненційно за збільшення довжини дискретної послідовності, що призводить до значних обчислювальних проблем. Для такого випадку запропоновано модифікацію РФК, яка передбачає введення випадкової змінної $H(k)$, кожне значення якої відповідає одній із можливих гіпотез [11]. Розподіл $H(k)$ відповідає правдоподібності вибраної гіпотези. У процесі реалізації такого фільтра розглядають усі комбінації значень $H(k)$ і $\mathbf{D}(k+1)$, що призводить до аналізу суміші, яка містить $K \times |\mathbf{D}|$ компонент. Кожна нова гіпотеза кондиціонується (нормується) на вимірах $\mathbf{Y}(k+1)$, і завдяки Баєсовому кондиціонуванню корегуються вагові коефіцієнти суміші та параметри багатовимірних гаусіан.

4. Фільтр на основі нелінійного перетворення розподілу ймовірностей (*unscented transform*) даних. Реалізація такого фільтра ґрунтується на тому принципі, що множину дискретних вимірів можна використати для

параметризації середнього значення та коваріації.

Інформація, необхідна для оцінювання середнього значення та коваріації, міститься (кодується) у множині точок (дискретному розподілі вимірів), які називають сигма-точками (*sigma points*). Цей розподіл можна трансформувати в інший (необхідний), застосовуючи нелінійне перетворення до кожного виміру. Середнє значення та коваріацію отриманого нового розподілу становлять оцінки, необхідні для алгоритму фільтрації. На відміну від РФК, у якому нелінійна функція апроксимується лінійною, принципова перевага цього підходу полягає в повному використанні наявної нелінійної функції (моделі даних). Тобто немає необхідності застосовувати лінеаризацію, яка потребує диференціювання нелінійної функції, що сприяє підвищенню якості оцінок на виході фільтра. Водночас спрощується практична реалізація фільтра, оскільки непотрібно будувати та використовувати відповідну матрицю Якобі.

Загалом такий алгоритм оцінювання генерує результати, еквівалентні за якістю тим, що генерує оптимальний ФК для лінійних систем, але його використовують для нелінійних систем без застосування лінеаризації, яку необхідно виконувати для РФК. Аналітично показано, що якість фільтрації за такої умови перевищує якість РФК і може порівнюватись із якістю функціонування Гаусового фільтра другого порядку [12, 13]. Водночас метод не обмежується Гаусовим розподілом шумових компонент вимірів.

5. Фільтр матеріальних точок (*point mass filter*, або PMF). У цьому випадку на простір станів накладається вибрана сітка, на якій рекурсивно обчислюється апостеріорний розподіл станів. Цей фільтр придатний для будь-яких нелінійних і негаусових моделей і здатний представити з прийнятною точністю будь-який апостеріорний розподіл. Головними недоліками цього методу є великий розмір сітки за високого порядку простору станів і квадратичність обчислювальної складності алгоритму оцінювання щодо розміру сітки.

6. Гранулярний (багаточастинковий, *particle filter* (PF)) фільтр. Цей фільтр подібний до фільтра матеріальних точок, але використовує адаптивну стохастичну сітку, що автоматично обирає релевантні точки (значення) в просторі станів. На відміну від фільтра матеріальних точок, алгоритм гранулярної фільтрації (ГФ)

за складністю є лінійним щодо розміру сітки обчислень. Перевагами такого фільтра є можливість застосування майже до довільного типу розподілу даних, відносна простота чисельної реалізації та практичного використання. Гранулярні Баєсові фільтри будуть розглянуті в цій роботі докладніше.

Загальна форма Баєсового алгоритму оцінювання стану

Динаміку нелінійної стохастичної системи можна описати дискретними рівняннями в просторі станів:

– рівнянням спостережень:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{w}(k-1)], \quad (1)$$

– рівнянням вимірів: $\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)]$, (2)

де $\mathbf{x}(k)$ – вектор стану досліджуваної системи з довільним негаусовим розподілом $P_{\mathbf{x}(k)}$; $\mathbf{z}(k)$ – вектор дійсних вимірів, які в загальному випадку можуть бути комплексними числами, перетвореними на дійсні; $\mathbf{w}(k)$ – вектор випадкових зовнішніх збурень із відомою щільністю розподілу ймовірностей $P_{\mathbf{w}(k)}$; $\mathbf{v}(k)$ – вектор похибок (шуму) вимірів із відомою щільністю розподілу $P_{\mathbf{v}(k)}$; \mathbf{f} , \mathbf{h} – нелінійні детерміновані функції; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – дискретний час. Випадкові збурення стану та шум вимірів зазвичай уводять у рівняння (1) і (2) в адитивній формі, що спрощує оцінювання параметрів моделі та дає змогу побудувати модель високого ступеня адекватності. За необхідності в модель (1) і (2) можна додати вектор керівних впливів $\mathbf{u}(k)$. Перший вимір $\mathbf{z}(1)$ дає можливість оцінити стан $\mathbf{x}(1)$, а з надходженням нових вимірів будуть оцінюватись майбутні стани. Введемо позначення $\mathbf{x}(1:k) = \{\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)\}$ – послідовність значень вектора станів; аналогічно можна позначити інші змінні розглянутої моделі в просторі станів.

У термінах умовної щільності розподілу ймовірностей подана вище модель у просторі станів може бути записана так:

$$\mathbf{x}(k) \sim P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1)];$$

$$\mathbf{z}(k) \sim P[\mathbf{z}(k) | \mathbf{z}(k-1)].$$

З погляду Баєсового підходу до обробки даних задачею оцінювання стану є генерування (оцінювання) апостеріорної щільності розподілу $P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k)]$ на основі послідовності ви-

мірів $\mathbf{z}(1:k) = \{\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(k)\}$. Рівняння (1) задає прогнозу умовну перехідну щільність імовірностей $P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1), \mathbf{z}(1:k-1)]$ на основі значення попереднього стану та всіх вимірів від першого до $\mathbf{z}(1:k-1)$. Рівняння спостережень (2) визначає функцію правдоподібності для поточного спостереження за умови відомого поточного стану $P[\mathbf{z}(k) | \mathbf{x}(1:k)]$. Апріорну ймовірність стану, $P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)]$, можна визначити за формулою (теоремою) Баєса так:

$$\begin{aligned} P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)] &= \\ &= \int P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1), \mathbf{z}(1:k-1)] \\ &P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k-1) \end{aligned} \quad (3)$$

Щільність розподілу ймовірностей на попередньому кроці визначається як $P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)]$. На кроці корегування оцінки стану обчислюють функцію щільності розподілу:

$$\begin{aligned} P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)] &= \\ &= c P[\mathbf{z}(k) | \mathbf{x}(1:k-1)] P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)], \end{aligned} \quad (4)$$

де c – нормувальна константа.

Задача фільтрації полягає в рекурсивному обчисленні перших двох моментів вектора $\mathbf{x}(k)$ за умови відомих вимірів $\mathbf{z}(1:k)$. Для деякого загального типу розподілу $P(\mathbf{x})$ ця задача полягає в рекурсивному оцінюванні математичного сподівання будь-якої (фактичної) функції від $\mathbf{x}(k)$, наприклад, $\langle g(\mathbf{x}) \rangle_{p(\mathbf{x})}$ із використанням рівнянь (3) і (4) й обчисленням інтеграла:

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle_{p(\mathbf{x})} = \int g(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Однак цей інтеграл неможливо взяти в замкненій формі в разі аналізу загальних багатовимірних розподілів, а тому його значення необхідно апроксимувати відомими методами [14, 15].

Рівняння (1) і (2) часто застосовують із адитивними випадковими Гаусовими складниками такого типу:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k-1)] + \mathbf{w}(k-1), \quad (6)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k), \quad (7)$$

де $\mathbf{w}(k)$ і $\mathbf{v}(k)$ – випадкові векторні процеси, що представляються в імітаційній моделі Гаусовими випадковими змінними з нульовим

середнім значенням і коваріаційними матрицями $\mathbf{Q}(k)$ і $\mathbf{R}(k)$ відповідно. Початковий стан $\mathbf{x}(0)$ також моделюється випадковими величинами, незалежними від обох шумових складників із середнім значенням, $\hat{\mathbf{x}}_0$, і коваріаційною матрицею $\mathbf{P}_0^{\mathbf{xx}}$.

Припустимо, що нелінійні детерміновані функції \mathbf{f} , \mathbf{h} і коваріаційні матриці \mathbf{Q} і \mathbf{R} – стаціонарні, тобто їхні параметри не залежать від часу. Тепер прогнозу щільність можна подати так:

$$\begin{aligned} P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1), \mathbf{z}(1:k-1)] &= \\ &= N(\mathbf{x}(k); \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)), \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (8)$$

де $N(t; \tau, \Sigma)$ – багатовимірний Гаусів розподіл, який у загальному випадку описується виразом

$$\begin{aligned} N(t, \tau, \Sigma) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \|\Sigma\|}} \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2} [t - \tau]^T (\Sigma)^{-1} [t - \tau]\right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рівняння (3), яке визначає апріорну ймовірність, можна представити так [16]:

$$\begin{aligned} P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)] &= \\ &= \int N[\mathbf{x}(k); \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)), \mathbf{Q}] \\ &P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k-1). \end{aligned} \quad (10)$$

Сподівання величини \mathbf{t} для Гаусового розподілу $N(t; \mathbf{f}(\tau), \Sigma)$ можна записати так [16–19]:

$$E\{\mathbf{t}\} = \int \mathbf{t} N(t; \mathbf{f}(\tau), \Sigma) d\mathbf{t} = \mathbf{f}(\tau). \quad (11)$$

Згідно з рівнянням (10), математичне сподівання вектора стану можна записати так:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)\} &= \\ &= \int \mathbf{x}(k) P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k) = \\ &= \int \mathbf{x}(k) \left\{ \int N[\mathbf{x}(k); \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)), \mathbf{Q}] \right. \\ &P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k-1) \left. \right\} d\mathbf{x}(k) = \\ &= \int \left\{ \int \mathbf{x}(k) N[\mathbf{x}(k); \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)), \mathbf{Q}] d\mathbf{x}(k) \right\} \\ &P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k-1) = \\ &= \int \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)) P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] d\mathbf{x}(k-1). \end{aligned} \quad (12)$$

У виразі (12) використано рівняння (11) для оцінювання внутрішнього інтеграла. Запишемо розподіл вектора стану для моменту часу $k-1$ із урахуванням наявних вимірів:

$$P[\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{z}(1:k-1)] = N(\mathbf{x}(k-1); \hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k-1 | k-1)), \quad (13)$$

де $\hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1)$ і $\mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k-1 | k-1)$ – оцінки середнього значення для вектора стану та коваріаційної матриці для $\mathbf{x}(k-1)$ за наявності вимірів $\mathbf{z}(1:k-1)$. Оцінки середнього значення та коваріації ($\hat{\mathbf{x}}(k | k-1)$ і $\mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)$) для $\mathbf{x}(k)$ за наявності спостережень, $\mathbf{z}(1:k-1)$, можна отримати за допомогою рівняння (12) як

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k-1) = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)) N(\mathbf{x}(k-1); \hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k-1 | k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \quad (14)$$

а також

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1) &= \mathbf{Q} + \\ &+ \int \mathbf{f}(\mathbf{x}(k-1)) \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(k-1)) N(\mathbf{x}(k-1); \hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k-1 | k-1)) d\mathbf{x}(k-1) - \\ &- \hat{\mathbf{x}}(k | k-1) \hat{\mathbf{x}}^T(k | k-1). \end{aligned} \quad (15)$$

Очікуване значення вектора $\mathbf{z}(k)$ за наявності $\mathbf{x}(k)$ і $\mathbf{z}(1:k-1)$ можна отримати так:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{z}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{z}(1:k-1)\} &= \\ &= \int \mathbf{z}(k) P[(\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1))] d\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо використати Гаусову апроксимацію для розподілу $P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)]$, який задається виразом

$$P[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1:k-1)] = N(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)), \quad (17)$$

то можна отримати оцінку $\hat{\mathbf{z}}(k | k-1)$ як вираз для математичного сподівання $E\{\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{z}(1:k-1)\}$ через інтеграл:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(k | k-1) &= \\ &= \int \mathbf{z}(k) N(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)) d\mathbf{x}(k) = \\ &= \int \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) N(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)) d\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо позначити векторну похибку оцінювання вектора вимірів $\mathbf{e}^y(k | k-1) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) - \hat{\mathbf{z}}(k | k-1)$, то можна записати вираз для оцінювання коваріації вектора $\mathbf{z}(k)$ за наявності $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{z}(1:k-1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\mathbf{yy}}(k | k-1) &= \\ &= E\{[\mathbf{e}^y(k | k-1)] [\mathbf{e}^y(k | k-1)]^T\} = \\ &= \mathbf{R} + \int \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}(k)) N(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)) d\mathbf{x}(k) - \\ &- \hat{\mathbf{y}}(k | k-1) \hat{\mathbf{y}}^T(k | k-1). \end{aligned} \quad (19)$$

За аналогією можна оцінити матрицю взаємної коваріації $\mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(k | k-1)$ за виразом

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(k | k-1) &= \\ &= E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k | k-1)] [\mathbf{e}^y(k | k-1)]^T\} = \\ &= \int \mathbf{x}(k) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}(k)) N(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1)) d\mathbf{x}(k) - \\ &- \hat{\mathbf{x}}(k | k-1) \hat{\mathbf{y}}^T(k | k-1). \end{aligned} \quad (20)$$

Загалом ФК можна застосувати до майже будь-якої динамічної системи, поданої в просторі станів, із адитивними Гаусовими випадковими процесами в обох рівняннях незалежно від нелінійностей. Однак за такої умови можуть виникнути труднощі зі збіжністю алгоритму фільтрації. Але можливо побудувати Гаусову апроксимацію апостеріорної щільності $P(\mathbf{x}(k | k))$ із середнім значенням і коваріацією, які визначаються так [16]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k | k) &= \hat{\mathbf{x}}(k | k-1) + \\ &+ \mathbf{K}(k)[\mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k | k-1)], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k) = \mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k-1) - \mathbf{K}(k) \mathbf{P}^{\mathbf{yy}} \mathbf{K}^T(k), \quad (22)$$

де оптимальний коефіцієнт фільтра визначається за

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(k | k-1) [\mathbf{P}^{\mathbf{yy}}(k | k-1)]^{-1}. \quad (23)$$

Зазначимо, що єдина апроксимація, яку було використано в наведених вище викладках, стосується моделювання шумових складників адитивними Гаусовими послідовностями; обчислення оцінок $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ і $\mathbf{P}^{\mathbf{xx}}(k | k)$ виконується без апроксимації. Однак для практичної реалізації розглянутого фільтра необхідно отримати процедури обчислення інтегралів

у рівняннях (14), (15) і (18)–(20), тобто такі проміжки ставляться з тире без пробілів, які мають таку форму:

$$I = \int \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}^{\text{xx}}) d\mathbf{x}, \quad (24)$$

де $N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}^{\text{xx}})$ – багатовимірний Гаусів розподіл із вектором середніх значень $\hat{\mathbf{x}}$ і коваріаційною матрицею вектора стану \mathbf{P}^{xx} . Три апроксимації для обчислення інтеграла (24) розглянуто в [16]. Із них можна обрати прийнятний для конкретної реалізації варіант.

Гранулярний фільтр

Розглянемо варіант реалізації ймовірнісного Баєсового фільтра, який отримав назву гранулярного (*particle filter*). Завданням методу ГФ є апроксимація апостеріорної щільності розподілу невідомого стану за наявності вимірів, тобто потрібно оцінити $P[x(k) | z(1:k)]$. Є кілька алгоритмів ГФ, що ґрунтуються на методі Монте-Карло для генерування псевдовипадкових послідовностей, які використовують для оцінювання розподілів випадкових величин необхідних типів [17–19].

Алгоритм генерування послідовної вибірки за значимістю. Алгоритм генерування послідовної вибірки за значимістю (Sequential Importance Sampling, або SIS Algorithm) є методом реалізації рекурсивного Баєсового фільтра з використанням псевдовипадкової послідовності, яку задає метод Монте-Карло. Це базовий алгоритм ГФ. Основною ідеєю є представлення бажаної апостеріорної щільності розподілу як множини випадкових елементів із асоційованими ваговими коефіцієнтами для обчислення оцінок на основі цих згенерованих елементів і вагових коефіцієнтів. За значного збільшення кількості елементів псевдовипадкової вибірки характеристика застосування методу Монте-Карло стає еквівалентною звичайному функціональному опису апостеріорної щільності, а SIS-фільтр наближається до оптимальної Баєсової оцінки.

Нехай $\{x^i(1:k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}$ – випадкова міра, що характеризує апостеріорну щільність $P[x(1:k) | z(1:k)]$, де $\{x^i(1:k), i=0,1,\dots,N_s\}$ – множина k -крокових траєкторій руху опорних точок (гранул) із асоційованими нормованими ваговими коефіцієнтами $\{w^i(k), i=0,1,\dots,N_s\}$, $\sum_{i=1}^{N_s} w^i(k)=1$; тут N_s – задана кількість гранул. Тепер апостеріорна щільність у момент часу k може бути апроксимована так:

$$P[x(1:k) | z(1:k)] \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) \delta(x(1:k) - x^i(1:k)), \quad (25)$$

де $\delta(x)$ – δ -функція Дірака, тобто $P[x^i(1:k) | z(1:k)] \approx w^i(k)$.

Вагові коефіцієнти обирають за принципом генерування вибірки за значущістю. Припустимо, що $P(x) \propto \pi(x)$ (тут “ \propto ” означає пропорційність) – це щільність розподілу випадкової величини, реалізацію якої складно згенерувати з її дійсного розподілу, але для якої можна обчислити $\pi(x)$. Нехай також $x^i \sim P(x)$, $i=0, \dots, N_s$ – реалізації випадкової величини, що легко генеруються з розподілу зі щільністю $Q(\cdot)$, яка називається запропонованою щільністю чи значущою щільністю (*proposal density* й *importance density*). Тепер зважена апроксимація щільності $P(\cdot)$ виглядає так:

$$P(x) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) \delta(x - x^i),$$

де

$$w^i \propto \frac{\pi(x^i)}{Q(x^i)} \quad (26)$$

є нормованою вагою для i -ї гранули (після обчислення відношення нормують вагові коефіцієнти так, щоб забезпечити умову $\sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) = 1$).

Тепер, якщо реалізації $x^i(1:k)$ були згенеровані з розподілу із запропонованою щільністю $Q[x(1:k) | z(1:k)]$, то вагові коефіцієнти в (25), відповідно до виразу (26), визначимо так:

$$w^i \propto \frac{P[x(1:k) | z(1:k)]}{Q[x(1:k) | z(1:k)]}. \quad (27)$$

У випадку послідовних обчислень, маючи на кожній ітерації зважену вибірку, що апроксимує апостеріорну щільність $P[x(1:k-1) | z(1:k-1)]$, можна було б апроксимувати $P[x(1:k) | z(1:k)]$ новою вибіркою. Але, якщо запропонована щільність обра-на так, що вона розкладається на множники:

$$\begin{aligned} Q[x(1:k) | z(1:k)] &= \\ &= Q[x(k) | x(1:k-1), z(1:k)] \\ &= Q[x(1:k-1) | z(1:k-1)], \end{aligned}$$

то можна отримати елементи $x^i(1:k) \sim P[x(1:k) | z(1:k)]$, доповнюючи кожен із наявних елементів вибірки $x^i(1:k-1) \sim P[x(1:k-1) | z(1:k-1)]$ новою оцінкою стану $x^i(k) \sim P[x(k) | x(1:k-1), z(1:k)]$.

У практичних застосуваннях найчастіше вимагають лише фільтровану оцінку розподілу $P(x(k) | z(1:k))$ на кожному кроці, а не умовний розподіл одразу всієї траєкторії $P(x(1:k) | z(1:k))$. Тому надалі будемо розглядати саме цей випадок.

Використовуючи прямий наслідок із теорему Баєса:

$$P(x(k) | z(1:k)) = \frac{P(z(k) | x(k)) P(x(k) | z(1:k-1))}{P(z(k) | z(1:k-1))},$$

якщо

$$Q(x(k) | x(1:k-1), z(1:k)) = Q(x(k) | x(k-1), z(k)),$$

тобто запропонована щільність залежить лише від $x(k-1)$ і $z(k)$, можна показати, спираючись на [17, 19], що для оновлення вагових коефіцієнтів справедливе співвідношення:

$$w^i(k) \propto w^i(k-1) \frac{P(z(k) | x^i(k)) P(x^i(k) | x^i(k-1))}{P(x^i(k) | x^i(k-1), z(k))}, \quad (28)$$

а фільтрований апостеріорний розподіл може бути апроксимований так:

$$P(x(k) | z(1:k)) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) \delta(x(k) - x^i(k)). \quad (29)$$

Необхідно підкреслити, що вагові коефіцієнти $w^i(k)$ мають бути нормовані так, щоб $\sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) = 1$. Вибір запропонованого розподілу

є одним із найважливіших етапів проектування гранулярного фільтра. Водночас можливі варіанти вибору, переваги та недоліки яких розглянуті в [17, 19]. Зокрема, важливо, щоб дисперсія вагових коефіцієнтів, $w^i(k)$, була незначною. Часто як запропонований розподіл використовують апріорний розподіл даних:

$$Q(x(k) | x^i(k-1), z(k)) = P(x(k) | x^i(k-1)), \quad (30)$$

що, очевидно, є досить зручним варіантом вибору. В такому разі (28) спрощують до

$$w^i(k) \propto w^i(k-1) P(z(k) | x^i(k)). \quad (31)$$

Однак такий вибір запропонованого розподілу є найкращим не в усіх задачах.

Основний алгоритм. Підсумуємо формулювання алгоритму послідовного генерування вибірки за значущістю. Елементи $x^i(1:1)$ у зваженій вибірці на першому кроці $\{x^i(1:1), \frac{1}{N_s}\}_{i=1}^{N_s}$

генеруються з початкового розподілу $P(x(1))$. Оскільки цей розподіл істинний, то виконувати корегування значень непотрібно, та всі вагові коефіцієнти мають бути однаковими, тобто

$$w^i(1) = \frac{1}{N_s}.$$

Маючи зважену вибірку на $(k-1)$ -му кроці, процедуру генерування зваженої вибірки на k -му кроці можна представити псевдокодом:

Algorithm 1: SIS Particle Filter

```

[ $\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}$ ] =
= SIS [ $\{x^i(k-1), w^i(k-1)\}_{i=1}^{N_s}, z(k)$ ]
FOR
— Згенерувати  $x^i(k) \sim q(x(k) | x^i(k-1), z(k))$ .
— Присвоїти гранулі  $x^i(k)$  вагу  $w^i(k)$ ,
відповідно до (28)
END FOR

```

Для цього та всіх подальших алгоритмів фільтрації на кожному кроці апостеріорний розподіл можна апроксимувати за формулою (29). Оцінкою умовного математичного сподівання стану $x(k)$ буде

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) x^i(k). \quad (32)$$

Повторне генерування (відсіювання) гранул.

За реалізації SIS гранулярного фільтра часто виникає проблема виродження вагових коефіцієнтів, коли після певної кількості ітерацій усі гранули, крім однієї, мають незначну вагу. Оскільки дисперсія вагових коефіцієнтів може з часом лише збільшуватись, то феномену виродження уникнути неможливо [17, 19, 20]. Таке виродження спричинено витратою значної частини обчислень на оновлення гранул,

внесок яких в апроксимований розподіл $P(x(k) | z(1:k))$ майже нульовий.

Одним зі способів зменшення ефекту виродження є повторне генерування псевдовипадкових значень (*resampling*). Основною ідеєю повторного генерування є виключення з розгляду гранул із незначною вагою та фокусування уваги на гранулах із великою. На цьому кроці генерують нову множину значень $\{x^{i*}(k)\}_{i=1}^{N_s}$, тобто генерується вибірка (із повтореннями) N_s реалізацій випадкової величини $x(k)$ із наближеного дискретного розподілу $P(x(k) | z(1:k))$, заданого виразом (29), так, що $P\{x^{i*}(k) = x^j(k)\} = w^j(k)$. Отримана вибірка є насправді вибіркою незалежних однаково розподілених (н.о.р. або i.i.d.) величин із дискретного розподілу (29), тому вагові коефіцієнти встановлюються нині рівними такій величині:

$$w^i(k) = \frac{1}{N_s}.$$

Наведемо псевдокод повторного генерування. Такий варіант генерування чи систематичне генерування (*systematic resampling*) обрано через простоту реалізації та оцінювання складності алгоритму $O(N_s)$. Водночас для кожного елемента нової вибірки зберігається його індекс у попередній вибірці i^j , що знадобиться в таких алгоритмах.

Algorithm 2: Resampling Algorithm

$$[\{x^{j*}(k), w^j(k), i^j\}_{j=1}^{N_s}] =$$

$$= \text{RESAMPLE} [\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}]$$

Ініціалізувати функцію розподілу (ФР): $c(1) = 0$

FOR $i = \overline{2, N_s}$

— Побудувати ФР: $c(i) = c(i-1) + w^i(k)$

END FOR

Почати спочатку ФР: $i = 1$

Згенерувати початкову точку: $u(1) \sim U[0, N_s^{-1}]$.

FOR $j = \overline{1, N_s}$

— Рухатись уздовж ФР: $u(j) = u(1) + N_s^{-1}(j-1)$

— WHILE $u(j) > c(i)$

— — $i = i + 1$

— END WHILE

— Присвоїти елемент: $x^{j*}(k) = x^i(k)$

— Присвоїти вагу: $w^j(k) = N_s^{-1}$

— Присвоїти основне (батьківське)

значення: $i^j = i$

END FOR

Повторне генерування має недоліки. По-перше, воно звужує можливості паралелізму, оскільки на кроці відсіювання всі гранули мають комбінуватися. По-друге, гранули з великою вагою будуть обиратися багаторазово, що може призвести до втрати різноманітності вибірки, тобто результуюча вибірка міститиме багато повторів. Ця проблема відома як збідніння вибірки (*sample impoverishment*); вона є особливо гострою в разі малого шуму (коливань) процесу. Тоді всі гранули можуть зліпитися воедино через кілька ітерацій.

Фільтр на основі генерування вибірки за значущістю з відсіюванням. Фільтр на основі генерування вибірки за значущістю з відсіюванням (Sampling Importance Resampling Filter (SIR)) — це метод Монте-Карло, який можна застосовувати до задач рекурсивної Баєсової фільтрації. Обмеження, накладені на його використання, є дуже слабкими. Функції $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ і $\mathbf{h}(\cdot, \cdot)$ у моделях (1) і (2) мають бути відомими, необхідно мати змогу генерувати реалізації псевдовипадкових послідовностей із розподілу шуму $P(v(k-1))$ й апіорного розподілу $P(x(k) | x(k-1))$ та визначати щільність розподілу $P(z(k) | x(k))$ у потрібних точках, принаймні з точністю до спільної константи.

SIR-алгоритм можна легко вивести з алгоритму SIS відповідним вибором таких величин:

1. Насамперед запропонованого розподілу $Q(x(k) | x^i(k-1), z(k))$ — ним обирається апіорна щільність $P(x(k) | x^i(k-1))$.

2. Кроку відсіву, який здійснюється в кожен момент часу. Такий вибір запропонованого розподілу зумовлює необхідність генерування реалізацій із $P(x(k) | x^i(k-1))$. Реалізацію $x^i(k) \sim P(x(k) | x^i(k-1))$ можна отримати, якщо згенерувати реалізацію шуму $v^i(k-1) \sim P(v(k-1))$, а покласти $x^i(k) = f(x^i(k-1), v^i(k-1))$.

Для такого спеціального вибору запропонованої щільності формула оновлення вагових коефіцієнтів набуває вигляду (31). Але, взявши до уваги, що відсів відбувається в кожен момент часу, отримуємо: $w^i(k-1) = 1/N_s$, $\forall i$, а тому

$$w^i(k) \propto P(z(k) | x^i(k)). \quad (33)$$

Вагові коефіцієнти, задані в (33), нормуються перед фазою відсіювання. Псевдокод ітерації цього алгоритму такий:

Algorithm 3: SIR Particle Filter

$\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s} = \text{SIR}[\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}, z(k)]$

FOR $i = \overline{1, N_s}$

— Згенерувати $x^i(k) \sim p(x(k) | x^i(k-1))$

— Обчислити $w^i(k) = p(z(k) | x^i(k))$

END FOR

Обчислити загальну вагу: $t = \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k)$

FOR $i = \overline{1, N_s}$

— Нормувати i -ту вагу: $w^i(k) = t^{-1} w^i(k)$

END FOR

Провести відсів, використовуючи Algorithm 2 (Resampling Algorithm):

— $\{x^i(k), w^i(k), -\}_{i=1}^{N_s} =$

$= \text{RESAMPLE} [\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}]$

Допоміжний фільтр генерування вибірки за значущістю з відсіюванням. Допоміжний фільтр генерування вибірки за значущістю з відсіюванням (Auxiliary Sampling Importance Resampling Filter (ASIR)) є варіантом стандартного алгоритму фільтрації вибірки за значущістю з відсіюванням. Його можна отримати з SIR-фільтра введенням запропонованої щільності $Q(x_k, i | z_{1:k})$, із якої генеруються реалізації пар $\{x^j(k), i^j\}_{j=1}^{N_s}$, де i^j позначає номер гранули в $(k-1)$ -й момент. Значення i^j у цьому фільтрі називають допоміжною змінною, оскільки її єдина мета — допомогти реалізувати задачі імітації.

Використовуючи теорему Баєса, покажемо:

$$\begin{aligned} P(x(k), i | z(1:k)) &\propto P(z(k) | x(k)) \\ P(x(k) | x^i(k-1)) w^i(k-1). \end{aligned} \quad (34)$$

ASIR-фільтр генерує реалізацію зі спільного розподілу, $P(x(k), i | z(1:k))$, а потім опускає номер i у парі $(x(k), i)$, щоб отримати вибірку $\{x^j(k)\}_{j=1}^{N_s}$ з маргінального розподілу $P(x(k) | z(1:k))$. Запропонована щільність для $\{x^j(k), i^j\}_{j=1}^{N_s}$ має задовольняти пропорційності:

$$\begin{aligned} Q(x(k), i | z(1:k)) &\propto P(z(k) | \mu^i(k)) \\ P(x(k) | x^i(k-1)) w^i(k-1), \end{aligned} \quad (35)$$

де $\mu^i(k)$ — певна характеристика $x(k)$ за умови $x^i(k-1)$. Наприклад, це може бути умовне математичне сподівання $\mu^i(k) = E[x(k) | x^i(k-1)]$, мода чи реалізація $\mu^i(k) \sim P(x(k) | x^i(k-1))$.

Якщо записати

$$\begin{aligned} Q(x(k), i | z(1:k)) &= \\ &= Q(x(k) | i, z(1:k)) P(i | z(1:k)), \end{aligned}$$

і покласти

$$Q(x(k) | i, z(1:k)) = P(x(k) | x^i(k-1)),$$

то з (35) випливає:

$$Q(i | z(1:k)) \propto P(z(k) | \mu^i(k)) w^i(k-1). \quad (36)$$

Парі $\{x^j(k), i^j\}_{j=1}^{N_s}$ присвоюється вага, пропорційна відношенню (34) і (35):

$$w^i(k) \propto \frac{P(z(k) | x^i(k))}{P(z(k) | \mu^i(k))}. \quad (37)$$

Псевдокод ітерації цього алгоритму:

Algorithm 4: Auxiliary Particle Filter

$\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s} =$

$= \text{APF} [\{x^i(k-1), w^i(k-1)\}_{i=1}^{N_s}, z(k)]$

FOR $i = \overline{1, N_s}$

— Обчислити $\mu^i(k)$

— Обчислити

$$w^i(k) = q(i | z(1:k)) \propto p(z(k) | \mu^i(k)) w^i(k-1).$$

END FOR

Обчислити загальну вагу: $t = \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k)$

FOR $i = \overline{1, N_s}$

— Нормувати i -ту вагу: $w^i(k) = t^{-1} w^i(k)$

END FOR

Провести відсів, використовуючи Algorithm 2 (Resampling Algorithm):

— $\{-, -, i^j\}_{j=1}^{N_s} =$

$= \text{RESAMPLE} [\{x^i(k-1), w^i(k)\}_{i=1}^{N_s}]$

FOR $j = \overline{1, N_s}$

— Згенерувати $x^j(k) \sim q(x(k) | i^j, z(1:k)) =$

$= p(x(k) | x^{i^j}(k-1))$, як у SIR-фільтрі

— Присвоїти вагу $w^j(k)$, використовуючи (15)

END FOR

Обчислити загальну вагу: $t = \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k)$

FOR $i = \overline{1, N_s}$
 — Нормувати i -ту вагу: $w^i(k) = t^{-1}w^i(k)$
 END FOR

Щоб згенерувати реалізацію з розподілу $P(x(k), i | z(1:k))$, спочатку генерують номер i із ймовірністю $w^i(k) \propto Q(i | z(1:k))$ (це ймовірності першого етапу), а потім $x(k)$ із розподілу $P(x(k) | x^i(k-1))$. Після цього індекс i відкидають, а $x(k)$ присвоюють ваги, відповідно до (37), тобто вагові коефіцієнти другого етапу. Водночас є сподівання, що отримані вагові коефіцієнти другого рівня мають меншу дисперсію, ніж ваги в оригінальному SIR-алгоритмі.

Регуляризований гранулярний фільтр. Метод відсіювання введено для зменшення ефекту виродження результату на виході фільтра, що є проблемою для гранулярних фільтрів. Але, як було зазначено в його обговоренні, відсіювання призводить до інших проблем, зокрема проблеми втрати різноманітності гранул. Вона виникає, бо на кроці відсіювання реалізації псевдовипадкових значень генеруються з дискретного, а не неперервного розподілу. Якщо не акцентувати на цій проблемі, вона може призвести до екстремального випадку “зліплювання гранул”, коли всі N_s гранул знаходяться в тому самому секторі простору станів і погано відображають шуканий апостеріорний розподіл.

Для боротьби з цією проблемою запропоновано регуляризований гранулярний фільтр (Regularized Particle Filter (RPF)). У ньому за відсіювання генеруються гранули з неперервної $p(x(k) | z(1:k))$, а не з дискретної апроксимації, як у SIR-фільтрі. А саме такої апроксимації:

$$P(x(k) | z(1:k)) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i(k) K_h(x(k) - x^i(k)), \quad (38)$$

де

$$K_h(x) = \frac{1}{h^{n_x}} K\left(\frac{x}{h}\right); \quad (39)$$

масштабоване статистичне ядро щільності розподілу (kernel density) $K(\cdot)$; $h > 0$ – параметр згладжування (скалярний); n_x – розмірність вектора стану x ; $w^i(k)$, $i = 1, \dots, N^S$ – нормовані вагові коефіцієнти. Статистичне ядро $K(\cdot)$ – це симетрична функція щільності розподілу, що:

$$\int x K(x) dx = 0, \quad \int \|x\|^2 K(x) dx < \infty.$$

Тобто випадковий вектор зі щільністю $K(\cdot)$ має нульове математичне сподівання та скінченні моменти другого порядку.

Статистичне ядро $K(\cdot)$ і параметр згладжування $h > 0$ обираються так, щоб мінімізувати середнє інтегроване квадратичне відхилення (mean integrated square error (MISE)) між справжньою апостеріорною щільністю та відповідним регуляризованим емпіричним представленням у (38), яке визначається так:

$$MISE(\hat{p}) = E \left[\int (\hat{p}(x(k) | z(1:k)) - p(x(k) | z(1:k)))^2 dx(k) \right],$$

де розподіл $\hat{p}(x(k) | z(1:k))$ позначає апроксимацію, визначену в (38). У спеціальному випадку, коли всі елементи мають однакову вагу $\frac{1}{N_s}$, оптимальним вибором ядра є ядро Єпанечнікова:

$$K_e(x) = \begin{cases} \frac{n_x + 2}{2c_{n_x}} (1 - \|x\|^2), & \text{якщо } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}, \quad (40)$$

де c_{n_x} – об’єм одиничної гіперсфери в просторі R^{n_x} . Часто зручно використовувати Гаусове ядро:

$$K_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n_x}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}. \quad (41)$$

До того ж, якщо щільність, що апроксимується, є Гаусовою з одиничною коваріаційною матрицею, то оптимальним вибором параметра згладжування є:

$$h_{opt} = A(K) N_s^{1/(n_x+4)}, \quad (42)$$

де $A(K_e) = [8c_{n_x}^{-1}(n_x + 4)(2\sqrt{\pi})^{n_x}]^{1/(n_x+4)}$ для ядра Єпанечнікова та $A(K_n) = [4 / (n_x + 2)]^{1/(n_x+4)}$ для Гаусового ядра [19].

В алгоритмі регуляризованого гранулярного фільтра відсіювання проводять не на кожному кроці, а тоді, коли значення міри виродження стає нижчим деякого заданого порогу N_T . Міра виродження обчислюється:

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_s} (w^i(k))^2}. \quad (43)$$

Зазначимо: якщо встановити порогове значення N_T рівним N_S , то відсіювання відбуватиметься на кожній ітерації алгоритму.

Псевдокод ітерації алгоритму:

Algorithm 5: Regularized Particle Filter

$\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_S} =$
 $= \text{RPF}[\{x^i(k-1), w^i(k-1)\}_{i=1}^{N_S}, z(k)]$
 FOR $i = \overline{1, N_S}$
 — Згенерувати $x^i(k) \sim q(x(k) | x^i(k-1), z(k))$
 — Присвоїти гранулі $x^i(k)$ вагу $w^i(k)$,
 відповідно до (6)
 END FOR

Обчислити загальну вагу: $t = \sum_{i=1}^{N_S} w^i(k)$

FOR $i = \overline{1, N_S}$

— Нормувати i -ту вагу: $w^i(k) = t^{-1} w^i(k)$

END FOR

Обчислити N_{eff} , використовуючи (21)

IF $N_{eff} < N_T$

— Обчислити емпіричну коваріаційну матрицю $S(k)$ для $\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_S}$

— Обчислити матрицю $\sum(k)$ таку,

$$\text{що } \sum(k) \sum^T(k) = S(k)$$

(наприклад, $\sum(k) = E(k)D^{1/2}(k)$, де

$$S(k) = E(k)D(k)E^T(k) -$$

спектральний розклад матриці $S(k)$)

— Провести відсіювання, використовуючи

Algorithm 2 (Resampling Algorithm:

— — $\{x^i(k), w^i(k), \cdot\}_{i=1}^{N_S} = \text{RESAMPLE}$

$$\{x^i(k), w^i(k)\}_{i=1}^{N_S}$$

— FOR $i = \overline{1, N_S}$

— — Згенерувати $\varepsilon^i \sim K$ зі статистичного ядра (використати (18) чи (19))

$$— — x^{i*}(k) = x^i(k) + h_{opt} \sum(k) \varepsilon^i$$

(використати (20))

— END FOR

END IF

Хоча результати (40)–(42) є оптимальними лише в окремих випадках, їх можна використовувати в загальному випадку для отримання субоптимального фільтра.

Введення регуляризації покращує результат, як порівняти зі звичайним SIR-фільтром, коли є значна втрата різноманітності вибірки гранул, наприклад, якщо шум у процесі є невеликим. Однією з проблем такого підходу

є збільшення дисперсії апостеріорного розподілу.

Для глибшого аналізу властивостей алгоритмів ГФ, вибору запропонованих розподілів, аналізу збіжності процесів генерування вибірок, точного виведення формул тощо необхідно звернутись до [14–20].

Приклад: локалізація робота. Розглянемо описану модель й алгоритми ГФ на варіанті задачі глобальної локалізації мобільних роботів (global localization for mobile robots) або задачі про викраденого робота (hijacked robot problem). У загальному варіанті вона полягає у визначенні положення робота за даними з сенсора. Ця задача була розв'язана низкою ймовірнісних методів наприкінці 1990-х — на початку 2000-х років. Задача є важливою та знаходить застосування в мобільній робототехніці та промисловості [20–22]. Схожими по суті є задачі позиціонування підводних човнів, літальних апаратів, автомобілів тощо.

Розглянемо задачу позиціонування робота [23]. Нехай у темному лабіринті ввімкнувся робот. Він має мапу лабіринту та компас. У лабіринті в деяких точках встановлено позначені на мапі станції, що можуть приймати та відбивати сигнал. Робот не знає, в якому місці лабіринту знаходиться, але може в кожен момент часу відправляти сигнал і з певною похибкою дізнатися відстань до найближчої станції. Робот починає блукати лабіринтом, роблячи кожен крок у новому випадково обраному напрямку, але його компас також дає певну несистематичну похибку. На кожному кроці робот визначає відстань до найближчої станції. Мета дослідження: оцінити координати робота в лабіринті в системі відліку, введеної на мапі.

Переведемо цю задачу в модель у просторі станів. Невідомим станом робота, який необхідно оцінити за допомогою ГФ, є пара його координат на k -му кроці $(x(k), y(k))$. Вимірюваною змінною $z(k)$ є відстань до найближчої станції на поточному кроці. Так, маємо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(k-1) \\ y(k-1) \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} \cos(\theta(k-1)) \\ \sin(\theta(k-1)) \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$z(k) = \left\| \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| + v(k), \quad (45)$$

де L — довжина кроку робота; $\theta(k) \sim U(\theta^0(k) - \Delta / 2, \theta^0(k) + \Delta / 2)$ — кут повороту робота

в радіанах на k -му кроці. Він є рівномірно розподіленим, враховуючи похибку компаса, в інтервалі з центром $\theta^0(k)$ – випадково вибраним на цей крок значенням кута повороту, з огляду на покази компаса $\theta(k) \in [0; 2\pi]$; (x^*, y^*) – координата найближчої до робота станції; $v(k) \sim N(0, \sigma^2)$ – похибка вимірювання відстані до найближчої станції.

Застосування гранулярних фільтрів. Для застосування гранулярних фільтрів знадобляться такі розподіли даних: $p(x(k), y(k) | x(k-1), y(k-1))$, $p(z(k) | x(k), y(k))$.

Очевидно, що

$$p(z(k) | x(k), y(k)) = N \left(\left\| \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|, \sigma^2 \right). \quad (46)$$

Розглянемо розподіл $p(x(k), y(k) | x(k-1), y(k-1))$. Із геометричних міркувань видно: якщо кут повороту робота розподілений рівномірно на відріжку, то координата $(x(k), y(k))$ після кроку буде належати відповідній дузі з центром у точці $(x(k-1), y(k-1))$ і радіусом L .

За такої умови $(x(k), y(k))$ має рівномірний розподіл на дузі:

$$p(x(k), y(k) | x(k-1), y(k-1)) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi L}, & (x(k), y(k)) \in \text{дузі} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Генерування стану $(x(k), y(k))$ з розподілу $p(x(k), y(k) | x(k-1), y(k-1))$ можна виконувати безпосередньо, а саме згенерувати реалізацію випадкової величини $\theta(k-1)$, яка має рівномірний розподіл $U(\theta^0(k-1) - \Delta/2, \theta^0(k-1) + \Delta/2)$, й обчислити $(x(k), y(k))$ із (44).

Оскільки попередньої інформації щодо положення робота немає, початкова координата $(x(1), y(1))$ є рівномірно розподіленою величиною по вільній від перешкод області лабіринту. В цій задачі гранули $\{x^i(k)\}_{i=1}^{N_s}$ по суті відповідають гіпотезам про координату робота. Задача полягає в знаходженні на кожному кроці розподілу ймовірностей для всіх можливих положень робота на мапі.

У наданій програмі для імітаційного моделювання поставленої задачі реалізується ГФ для визначення стану робота за обраним методом [23]. Доступними операціями є: фільтрація вибірки даних за значущістю з відсіюванням

(SIR), допоміжний фільтр вибірки за значущістю з відсівом (APF) і регуляризований гранулярний фільтр (RPF). Базовий алгоритм послідовного генерування вибірки за значущістю (SIS) у чистому вигляді не використовують через проблему виродження вагових коефіцієнтів. Методи реалізовані відповідно до наведеного псевдокоду з такими уточненнями:

1. За обчислення розподілу $p(z(k) | x(k), y(k))$ за формулою (24) для гранул, координати яких $(x(k), y(k))$ знаходяться поза лабіринтом, отримане значення штрафується – множиться на емпіричний коефіцієнт 0,5. Так зменшується вага тих гранул, які завідомо не відповідають точному положенню робота.

2. В APF-фільтрі як $\mu^i(k)$ використовують реалізацію з перехідного розподілу стану робота: $\mu^i(k) \sim p(x(k), y(k) | x^i(k-1), y^i(k-1))$. Тоді розподіл $p(z(k) | \mu^i(k))$ також має форму (24).

3. У RPF як запропонований розподіл $q(x(k), y(k) | x^i(k-1), y^i(k-1), z(k))$ використовують апріорний $p(x(k), y(k) | x^i(k-1), y^i(k-1))$.

4. У RPF як статистичне ядро використовують Гаусове ядро в двовимірному просторі, оскільки для нього зручно генерувати реалізації ε .

5. У RPF порогове значення N_T емпірично обране рівним $0,2N_s$ (коефіцієнт можна змінити як константу в коді програми).

Програмна реалізація поставленої задачі подана в [23]. Унаслідок обчислювальних експериментів встановлено, що координати робота в лабіринті в системі відліку, введеній на мапі, визначаються з прийнятною для використання точністю. Так, ймовірнісний Баєсовий фільтр може бути використаний для слідування за розташуванням рухомих об'єктів. Очевидно, що поданий вище приклад – це лише одне з можливих застосувань методів імовірнісної фільтрації. Задачі розглянутого типу доцільно розв'язувати за допомогою спеціалізованих СППР, які створюються на множині методів попередньої обробки даних, моделювання, прогнозування та генерування альтернативних (керівних) впливів. Системи такого типу надають можливість оперативно розглянути різні (допустимі) варіанти знаходження розв'язків поставлених задач за множиною вибраних методів й обрати кращий (прийнятний) варіант для подальшого практичного використання, зокрема в реальному часі. Водночас на кожному етапі обчислень потрібно використовувати множину статистичних критеріїв якості, які забезпечать

високоякісні проміжні й остаточні результати аналізу даних.

Висновки

Подано короткий огляд сучасних методів оптимальної та ймовірнісної фільтрації даних. Зокрема, це лінійні та нелінійні алгоритми фільтрації Калмана та варіанти реалізації ймовірнісного Баєсового фільтра, який дедалі більше застосовують для розв'язання задач згладжування даних, оцінювання компонент вектора стану, що не вимірюються, та короткострокового прогнозування. Ймовірнісні методи обробки даних мають деякі переваги перед відомими статистичними процедурами, а саме: автоматично враховують невизначеності ймовірнісного та амплітудного типів; можуть бути застосовані для аналізу нелінійних нестационарних процесів, які трапляються практично в усіх галузях досліджень; дані можуть бути неперервними чи дискретними. Подані обчислювальні процедури можуть бути успішно застосовані для побудови алгоритмів фільтрації та короткострокового прогнозування за статистичними чи експериментальними даними.

Реалізацію поданих вище методів фільтрації доцільно виконувати в межах спеціалізованої СППР, яка надасть можливість вибору та застосування кращого для конкретного випадку методу фільтрації на основі імітаційного

моделювання наявних методів і вибору найефективнішого з них для конкретних даних і постановки задачі. Саме СППР призначена для прискореного аналізу можливостей реалізованих у системі методів фільтрації, а також методів оцінювання структури та параметрів математичних моделей і методів формування альтернативних рішень на основі оцінок прогнозів. Апробовані в межах СППР методи фільтрації та моделювання надалі можна переносити в системи реального часу. Такий підхід відповідає концепціям побудови СППР і підвищенню ефективності їх використання. Висока якість проміжних й остаточних результатів аналізу даних у СППР забезпечується множинами критеріїв якості: критеріями якості даних (інформативність, структурованість, повнота тощо), критеріями адекватності математичних моделей, що будуються за наявними статистичними (експериментальними) даними, критеріями якості прогнозів й альтернативних рішень, які ґрунтуються на обчислених оцінках прогнозів.

У подальших дослідженнях буде розглянуто можливості застосування поданих методів фільтрації для розв'язання задач фільтрації та прогнозування в межах спеціалізованих СППР. Також заплановано порівняльний аналіз цих методів на прикладах нелінійних нестационарних процесів у різних галузях досліджень.

References

- [1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979, 357 p.
- [2] P.I. Bidyuk *et al.*, *Time Series Analysis*. Kyiv, Ukraine: Polytechnika, 2013.
- [3] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1993, 595 p.
- [4] C.K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2009, 229 p. doi: 10.1007/978-3-540-87849-0
- [5] S. Haykin, *Adaptive Filtering Theory*, 4th ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002, 936 p.
- [6] M.Z. Zgurovskii and V.N. Podladchikov, *Analytical Methods of Kalman Filtering*. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka, 1995, 285 p.
- [7] S.J. Press, *Subjective and Objective Bayesian Statistics*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003. doi: 10.1002/9780470317105
- [8] A. Pole *et al.*, *Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [9] B.P. Gibbs, *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011, 627 p. doi: 10.1002/9780470890042
- [10] J.L. Anderson, "An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation for data assimilation," *Monthly Weather Rev.*, vol. 129, pp. 2284–2903, 2001.
- [11] U. Lerner *et al.*, "Bayesian fault detection and diagnosis in dynamic systems," in *Proc. Seventeenth National Conf. Artificial Intelligence*, Austin, Texas, 2000, pp. 531–537.
- [12] S.J. Julier and J.K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," *Proc. IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, 2004. doi: 10.1109/JPROC.2003.823141
- [13] X. Luo and I.M. Moroz, "Ensemble Kalman filters with the unscented transform," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 238, no. 5, pp. 549–562. doi: 10.1016/j.physd.2008.12.003

- [14] I.R. Petersen and A.V. Savkin, *Robust Kalman Filtering for Signals and Systems with Large Uncertainties*. Basel: Birkhäuser, 1999, 207 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1594-3
- [15] H.M.T. Menegaz et al., “A systematization of the unscented Kalman filter theory,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 60, no. 10, pp. 2583–2598, 2015. doi: 10.1109/TAC.2015.2404511
- [16] A.J. Haug, “A Tutorial on Bayesian Estimation and Tracking Techniques Applicable to Nonlinear and Non-Gaussian Processes,” MITRE Corp., McLean, Virginia, MTR 05W0000004, Jan 2005.
- [17] F. Gustafsson, “Particle filter theory and practice with positioning applications,” *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.*, vol. 25, no. 7, pp. 53–82, 2010. doi: 10.1109/MAES.2010.5546308
- [18] K. Ito and K. Xiong, “Gaussian filters for nonlinear filtering problems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, no. 5, pp. 910–927, 2000. doi: 10.1109/9.855552
- [19] M.S. Arulampalam et al., “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 2, pp. 174–188, 2002.
- [20] D. Fox et al., “Monte Carlo localization: Efficient position estimation for mobile robots,” in *Proc. Sixteenth Nat. Conf. on Artificial Intelligence and Eleventh Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence*, Orlando, Florida, 1999, pp. 343–349.
- [21] J. Röwekämper et al., “On the position accuracy of mobile robot localization based on particle filters combined with scan matching,” in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vilamoura-Algarve, Portugal, 2012, pp. 3158–3164. doi: 10.1109/IROS.2012.6385988
- [22] B.W. Silverman, *Density estimation for statistics and data analysis*. London: Chapman & Hall, 1986, 175 p.
- [23] *Particle_filter_demo* [Online]. Available: https://github.com/mjl/particle_filter_demo

Р.Л. Пантеев, О.Л. Тимошук, В.Г. Гуськова, П.И. Бидюк

МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Проблематика. Большинство современных динамических процессов в экономике, финансах, экологии, технологиях и многих других сферах исследований имеют нелинейный нестационарный характер на коротких и длинных временных интервалах. Поэтому для их углубленного анализа необходимо создать специализированный современный высокоразвитый инструментарий предварительной обработки данных, моделирования, оценивания состояний и параметров динамических систем, прогнозирования их развития для использования в системах поддержки принятия решений.

Цель исследования. Во-первых, предварительно проанализировать современные методы фильтрации статистических и экспериментальных данных. Рассмотреть актуальные методы фильтрации на основе вероятностного байесовского подхода которые обеспечивают возможность подготовки данных к построению адекватных моделей, вычисления высококачественных оценок состояний и краткосрочных прогнозов развития динамических систем в условиях стохастических возмущений и ошибок измерений.

Методика реализации. Для реализации современных методов фильтрации используют моделирование, оптимизационные процедуры, вероятностные байесовские методы анализа данных; применяют имитационное моделирование для оценивания параметров и надлежущую базу на основе статистических критериев для исследования качества промежуточных и окончательных результатов в рамках СППР.

Результаты исследования. Рассмотрен ряд методов фильтрации данных, которые используют совместно с моделями, формально описывающими динамику выбранных процессов. Предложена методика реализации вероятностного байесовского фильтра, которая базируется на современных методах статистического анализа данных, включая должное применение методов имитационного моделирования.

Выводы. Создание эффективных средств моделирования, оценивания состояний и прогнозирования динамики нелинейных нестационарных процессов в различных областях деятельности дает возможность качественно оценивать параметры исследуемых систем и вычислять кратко- и среднесрочные прогнозы их развития. Рассмотренные средства оптимальной калмановской и вероятностной байесовской фильтрации обеспечивают корректный анализ нелинейных нестационарных процессов, вычисления прогнозов и поддержку принятия управленческих решений на основе оценок прогнозов.

Ключевые слова: анализ данных; нелинейные нестационарные процессы; методы оптимальной фильтрации; методы вероятностной фильтрации; имитационное моделирование.

R.L. Pantyeyev, O.L. Timoshchuk, V.H. Huskova, P.I. Bidyuk

DATA FILTERING TECHNIQUES IN DECISION SUPPORT SYSTEMS

Background. The majority of modern dynamic processes in economy, finances, ecology, technologies and many other areas of studies exhibit short- and long-term nonlinear and nonstationary behavior. That is why it is required to create for their thorough analysis modern highly developed specialized instrumentation providing for appropriate preliminary statistical data processing, simulation state and parameter estimation and quality forecasting their evolution in time to be used in decision support systems (DSS).

Objective. The purpose of the paper is to perform introductory analysis of some modern methods for filtering statistical and experimental data; to consider modern filtering techniques on the basis of probabilistic Bayesian approach, that provide a possibility

for preparing the data to adequate simulation, computing high quality state and forecast estimates for dynamic systems in stochastic environment and availability of measurement errors.

Methods. To implement modern data filtering techniques appropriate simulation and optimization procedures, probabilistic Bayesian methods of data analysis are utilized; simulation algorithms for parameter estimation, and criteria bases for analyzing quality of intermediate and final results in the frames of DSS are used.

Results. A set of data filtering techniques is presented to be used together with the models describing formally selected processes dynamics. The methodology is considered for implementation of probabilistic Bayesian filter based upon modern statistical data analysis techniques including application of appropriate simulation procedures.

Conclusions. Development of effective means for simulation, state estimation and forecasting dynamics of nonlinear non-stationary processes in various areas of human activities provides a possibility for high quality state and parameter estimation and compute short and middle term forecasts for their future evolution. The methods of optimal Kalman and probabilistic Bayesian filtering considered in the review provide a possibility for performing appropriate analysis of nonlinear nonstationary processes, compute forecasts and provide for managerial decision support on the basis of the forecast estimates.

Keywords: data analysis; nonlinear nonstationary processes; methods of optimal filtering; methods of probabilistic filtering; simulation.

Рекомендована Радою
Інституту прикладного системного аналізу
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
18 листопада 2020 року

Прийнята до публікації
29 березня 2021 року